

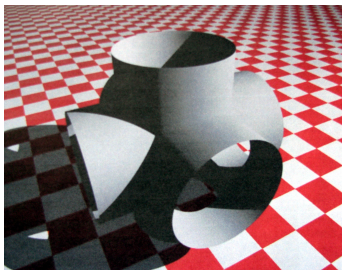
ZAGADKI

WYKŁAD 4: KSZTAŁT I PRZESTRZEŃ

Ile *wymiarów* ma przestrzeń, w której żyjemy? Czy można *zobaczyć* czwarty wymiar? Jakie reguły obowiązują w świecie Płaszczyzaków (istot dwuwymiarowych)? W szkole zmuszono cię do poznania kilku, może kilkunastu kształtów, powierzchni, brył. Łatwo jednak wyobrazić sobie całe mnóstwo bardzo złożonych kształtów, powierzchni, itp. Czy można je wszystkie jakoś rozumnie poklasyfikować? Jakie w tym celu wykorzystać środki – geometryczne, algebraiczne czy jeszcze jakieś inne? Jesteś przyzwyczajona do kilku sposobów mierzenia *odległości* między dwoma punktami – np. na płaszczyźnie będzie to długość odcinka łączącego te punkty, na sferze długość stosownego łuku koła wielkiego. W centrum miasta, gdzie poruszać się można jedynie po prostokątnej sieci ulic odległość między punktami wyznaczona będzie przez długość pewnej łamanej, łączącej te punkty. Snuje ci się po głowie intuicyjne określenie: *odległość* między dwoma punktami to długość najkrótszej drogi łączącej te punkty. Jak nadać tej intuicji precyzyjną formę? Czy zawsze, w każdej przestrzeni o ustalonej strukturze można poprawnie zdefiniować odległość? Zapewne słyszałaś, że oprócz geometrii euklidesowej nauczanej w skromnym wymiarze w szkole są jeszcze geometrie *nienieuklidesowe*. Czym różnią się od tej szkolnej? A może istnieją jeszcze inne geometrie?

1 Trzy ortogonalne walce

Mark Haddon w *Dziwnym przypadku psa nocną porą* opowiada o autystycznym chłopcu, który dla rozrywki i uspokojenia rozwiązywał w pamięci wcale niełatwe zadania matematyczne. Pewnego razu wyobraził sobie trzy wzajem ortogonalne walce o promieniu 1 każdy (powiedzmy, trzy walce dookoła osi współrzędnych w przestrzeni trójwymiarowej) i z zadowoleniem ujrzał bryłę, będącą ich częścią wspólną. Czy potrafisz opisać kształt tej bryły?

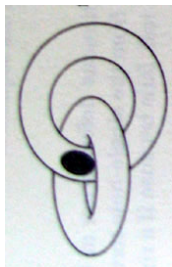


2 Precelek

Czy można (bez rozrywania i sklejania) przekształcić precelek (powiedzmy, z plasteliny) w kształcie ósemki w precelek, w którym jedno z kółek tworzących ową ósemkę przewleczone będzie przez drugie?

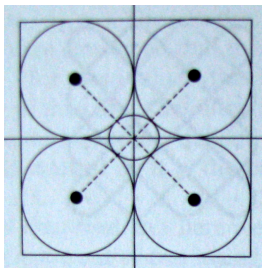
3 Torus kanibal

Pewnie wszyscy wiedzą, jak wygląda torus – to obwarzanek, dętka rowerowa, obrączka, itp. Przypuśćmy, że mamy dwa torusy, położone względem siebie jak na poniższym rysunku, przy czym jeden z nich ma dziurę. Czy można włożyć przez tę dziurę drugi torus do wnętrza pierwszego tak, aby pierwszy i drugi torus obejmowały pustą przestrzeń wewnątrz obu obwarzanków? Zakładamy, że dziurę w pierwszym torusie można dowolnie rozszerzać, nie wolno jedynie rozcinać ani zlepić kawałków żadnego z torusów.



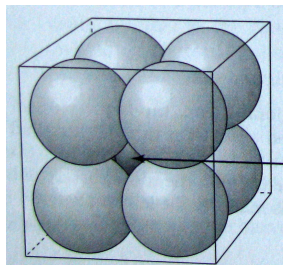
4 Sfera w kostce

Wpiszmy cztery okręgi o promieniu 1 w kwadrat o boku 4 w sposób pokazany na rysunku poniżej:



Widać, że możemy wpisać mniejszy okrąg tak, że będzie on styczny do czterech „narożnych” okręgów. Łatwo też, stosując twierdzenie Pitagorasa, obliczyć

jego promień: $\sqrt{1^2 + 1^2} - 1 = \sqrt{2} - 1$. Popatrzmy teraz na analogiczną sytuację w trzech wymiarach:



Promień małej kulki w środku sześcianu, stycznej do kul „narożnych” wynosi w tym przypadku: $\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} - 1 = \sqrt{3} - 1$.

Czy potrafisz wyznaczyć promień tej środkowej kulki w kostce n -wymiarowej?

5 Wydrążona kula

W kuli wydrążono otwór w kształcie walca, którego wysokość równa jest jednostce. Powstała w ten sposób bryła w kształcie obrączki. Jaka jest jej objętość?

6 Koza na sznurku

Jesteś dumnym posiadaczem jednej kozy i łąki w kształcie trójkąta równobocznego o długości boku 100m. Chciałbyś dokładnie połowę łąki przeznaczyć na pastwisko dla kozy, a na drugiej połowie zasiać cokolwiek (tylko nie konopie). Koza jest uwiązana na sznurku zaczepionym do palika w jednym z wierzchołków rozważanego trójkąta. Jak długi powinien być sznurek, aby koza miała dostęp dokładnie do połowy twojego pola? Czynimy oczywiście śmieszne założenie, że koza jest punktem.

7 Sadzenie drzew

W jaki sposób posadzić można cztery drzewa tak, aby wszystkie odległości między punktami posadzeń były równe? Po krótszym lub dłuższym zastanowieniu się, z pewnością ustalisz, że punkty nasadzeń nie mogą leżeć w jednej płaszczyźnie. Tak więc, aby spełnione były warunki tego zadania, punkty nasadzeń muszą znajdować się w wierzchołkach czworościanu foremnego, czyli wystarczy trzy drzewa

posadzić w wierzchołkach trójkąta równobocznego, a czwarte w odpowiednio głębokim dołku (lub na odpowiednio wysokiej górze).

Czy można posadzić dziewięć drzew, w dziewięciu rzędach, po trzy drzewa w jednym rzędzie? Pisząc, że drzewa stoją w jednym rzędzie mamy oczywiście na myśli to, że punkty ich zasadzeń leżą na jednej prostej.

8 Mucha Herona

Heron z Aleksandrii rozwiązał następujący problem, który znajdujemy dziś w każdym prawie podręczniku geometrii:

Niech A i B będą punktami po tej samej stronie linii prostej p . Znaleźć punkt C na prostej p taki, że suma odległości od A do C oraz od C do B jest minimalna.

Czy potrafisz znaleźć punkt C ?

Możemy to czysto geometryczne zadanie przedstawić także w formie zagadki o musze i kropli miodu. Mucha znajduje się na zewnętrznej powierzchni szklanki w kształcie walca, powiedzmy mniej więcej w połowie wysokości szklanki. Na wewnętrznej powierzchni szklanki jest kropelka smacznego miodu. Jaka jest najkrótsza droga, po której dreptać musi mucha, aby dostać się do miodu?

Nie musimy przyjmować smutnego założenia, że mucha jest kaleką i nie potrafi latać, może tylko dreptać. Zakładamy jednak, że nie potrafi przegryźć szklanki, aby dostać się na jej wewnętrzną powierzchnię. Grubość szklanki pomijamy. Zauważmy też, że w tym przypadku podaliśmy najpierw matematyczną reprezentację problemu, a potem fabułę, tworzącą zagadkę. Zachęcamy do dalszych tego typu prób fabularnych: postaraj się przekształcić wybrane zadania matematyczne w zagadki o interesującej fabule.

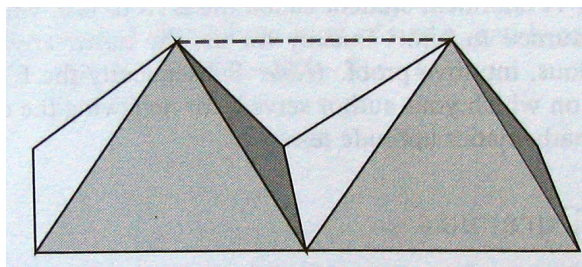
9 Wyznaczanie promienia kuli

Czy potrafisz wyznaczyć promień danej kuli, korzystając jedynie z cyrkla oraz linijki (bez podziałki)?

10 Zlepianie brył

Rozważmy dwie bryły: czworościan foremny o boku długości a oraz ostrosłup o podstawie kwadratowej, boku podstawy równym a oraz długości krawędzi łączących wierzchołki podstawy z wierzchołkiem ostrosłupa także równej a . Przypuśćmy teraz, że zlepiamy te bryły w ten sposób, że ścianę czworościanu zlepiamy

(utożsamiamy) z jedną z trójkątnych ścian ostrosłupa. Jakim wielością jest powstała bryła – ile ma ścian, wierzchołków, krawędzi? Wskazówkę podaje rysunek:



Rozwiązania zagadek podane zostaną na wykładzie. W wykładzie dotyczącym *Wzorców i struktur* podamy także przykłady zagadek dotyczących *wypełniania przestrzeni*.

Jerzy Pogonowski
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
www.logic.amu.edu.pl