

ZAGADKI

WYKŁAD 3: RUCH I ZMIANA

Czym są: ruch i zmiana? Niektórzy twierdzili, że to co jest, jest niezmiennie – bo gdyby było zmienne, to musiałoby przejść od tego czym jest, do tego czym nie jest; ale tego czym nie jest przecież nie ma, a więc zmiana jest niemożliwa. *Ruchu nie ma* – powiedział Parmenides i odszedł. *Strzała wypuszczona z łuku nie porusza się* – twierdził Zenon: w każdym momencie pozostaje bowiem nieruchoma, a suma bezruchu przecież ruchu dać nie może. Nie są to tylko czcze igraszki słowne – wiążą się z nimi podstawowe pytania o naturę rzeczywistości oraz możliwości jej poznania. Z pobytu w dyskotecie wiesz, że ludzie wykonują różne – czasem dziwne – ruchy. Pełno jest także ruchu w Przyrodzie – tu coś pełźnie, tam coś fruwa, a tam dalej coś kołysze, itp. W jaki sposób opisujemy tę olbrzymią różnorodność ruchów? Czy *każdy* rodzaj ruchu (powiedzmy: turbulентne przepływy cieczy) potrafimy opisać matematycznie? Jedną z największych zagadek Natury jest to, że obiekty fizyczne zachowują się zgodnie z pewnymi prawami *minimalizującymi* wybrane parametry. Skąd, u licha, mała-głupia-cząstka *wie*, która z nieskończenie wielu dróg między dwoma punktami jest najkrótsza?

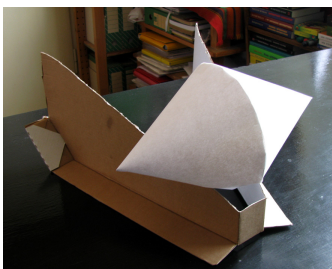
1 Mrówka na linie

Rozważmy następujący eksperyment myślowy. Mamy doskonale (nieskończenie) elastyczną linę o długości, powiedzmy, 1km. Lina rozciąga się z jednostajną prędkością 1km/sec. Tak więc, traktując lewy koniec liny jako nieruchomy, jej prawy koniec oddala się od lewego właśnie z jednostajną prędkością 1km/sec: po jednej sekundzie lina ma 2km długości, po dwóch sekundach 3km długości, itd. Z lewego końca liny startuje mała mrówka, poruszając się wzdłuż liny ze stałą prędkością (względem samej liny), powiedzmy, 1cm/sec. Pytanie: czy mrówka dotrze do prawego końca liny w skończonym czasie, czy też będzie dreptała w nieskończoność, nigdy nie docierając do prawego końca liny?



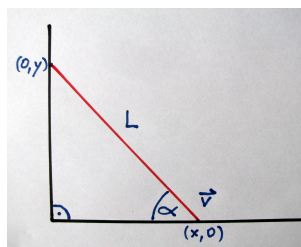
2 Oscypek na szynach

Z treścią tej uroczej zagadki zaznajamia się zwykle studentów pierwszego roku fizyki. Została ona przedstawiona w XVII wieku przez Wiliama Leybourn. Jej treść jest następująca. Na wznoszących się szynach, które oddalają się od siebie kładziemy bryłę w kształcie *oscypka*: podwójnego stożka (dwóch identycznych stożków, zetkniętych podstawami). Czy taki podwójny stożek będzie – pod wpływem siły grawitacji – zjeżdżał w dół po tych szynach, wjeżdżał po nich pod górę, czy też będzie stał w miejscu? Przy jakich wartościach parametrów (kącie rozwarcia stożka, promień jego podstawy, kącie wznoszenia się szyn, kącie rozwarcia szyn) otrzymujemy określony rodzaj ruchu?



3 Drabina na ścianie

Drabina o długości L opiera się górnym końcem o pionową ścianę, a jej dolny koniec spoczywa na poziomie gleby. Drabina tworzy z poziomem gleby kąt ostry α . Przypuśćmy, że dolny koniec drabiny porusza się (jest ciągnięty) po poziomie gleby z jednostajną prędkością v . Z jaką prędkością górny wierzchołek drabiny uderzy w poziom gleby?



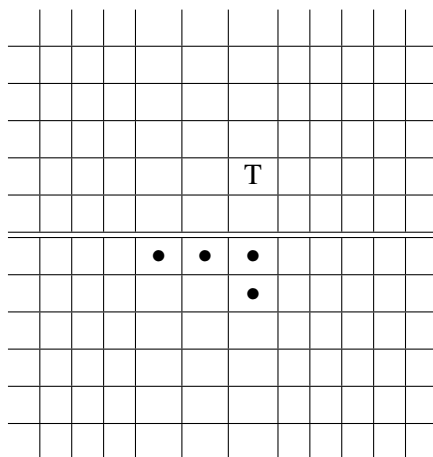
4 Armia Conwaya

Każdy ze słuchaczy zetknął się zapewne z różnymi grami planszowymi, w których pionki przesuwa się wedle z góry ustalonych zasad. Takie gry inspirują czasami

pewne problemy czysto matematyczne. Omówimy jeden z nich, znany pod nazwą *armii Conwaya*.

Nieskończoną szachownicę dzieli pozioma bariera – tak, jak oś odciętych w układzie kartezjańskim dzieli płaszczyznę. Na polach szachownicy pod barierą gromadzimy armię pionków. Poruszać się one mogą poziomo lub pionowo (nie po przekątnych!) w ten sposób, że pionek wykonujący właśnie ruch przeskakuje przez pionek przed nim (usuwając go tym samym z planszy) i ląduje na polu za nim, pod warunkiem, że pole to jest puste. Celem gry jest osiągnięcie przez co najmniej jeden pionek ustalonego poziomu ponad barierą.

Twoim zadaniem jest podanie przykładów armii, które osiągają poziomy: pierwszy, drugi, trzeci, czwarty oraz piąty. Dla przykładu, podajemy rozwiązanie dla poziomu drugiego:



Minimalna armia osiągająca poziom drugi.

5 Kapelusz i mafia

Mafia wysyła zabójcę z miasta A do miasta B statkiem płynącym w dół rzeki przez dwa dni. Zabójcy nie udaje się wykonać w B zlecenia, wraca do A statkiem płynącym w górę tejże rzeki trzy dni. Nieudolnego zabójcę czeka wiadomy koniec: nogi w miskę z zastygającym betonem i chlup do rzeki. Kapelusz niedoszłego zabójcy ląduje w rzece w A . Po ilu dniach dopłynie on rzeką do B (zakładamy, że nie zatonie, nikt go nie ukradnie, na rzece nie ma tamy, itd.)?

6 Zboczenica

Przypuśćmy, że jesteś małym niewinnym chłopcem i miałeś pecha natknąć się na zboczenicę. Goni cię ona w kole o promieniu, powiedzmy, jednego kilometra (np. na okrągłej wyspie, z której nie ma ucieczki). Wasze maksymalne prędkości są równe. Kto z was ma strategię zwycięską? Inaczej mówiąc: czy zboczenica prędzej czy później cię dopadnie, niezależnie od tego, w jaki sposób będziesz uciekał, czy też masz taką drogę ucieczki, że zawsze umkniesz zboczenicy, niezależnie od wybranego przez nią sposobu pościgu?

7 Jeep problem

Na skraju pustyni masz praktycznie nieograniczoną ilość paliwa. Dysponujesz jednym motocyklem i jednym dodatkowym kanistrem na paliwo. Czy możesz tak przygotować sobie trasę, umieszczając w stosownych odległościach zapasy paliwa, aby przebyć całą pustynię, jakkolwiek byłaby ona wielka?

8 Ucieczka z lawiny

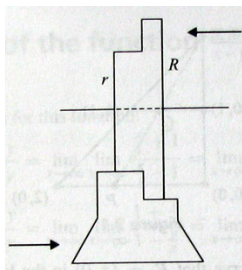
Przypuśćmy, że krasnoludek (albo małe robaczki, jeśli drażnią cię krasnoludki) miał pecha znaleźć się w lawinie śnieżnej w górach. Dokładniej, znalazł się gdzieś w środku kuli śnieżnej (powiedzmy, w kształcie elipsoidy) o objętości 500 metrów sześciennych. Krasnoludek może kopać tunel w śniegu z prędkością jednego metra na minutę, ale siła i powietrza wystarczy mu tylko na 24 minuty. Jak powinien kopać, aby mieć szansę (pewność?) wydostania się z kuli śnieżnej?

9 Ruch środka drabiny osuwającej się po ścianie

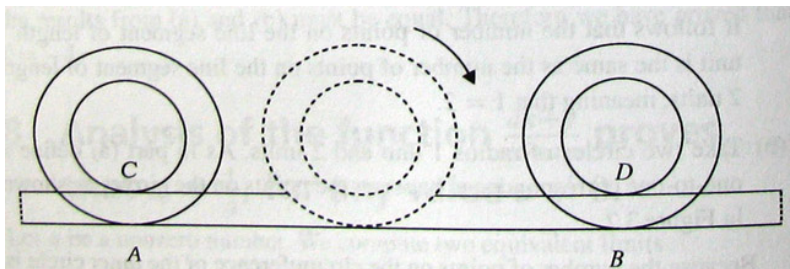
Wróćmy do przykładu z osuwającą się po ścianie drabiną. Przyjmijmy tym razem, że rozważamy tylko matematyczny aspekt zjawiska – interesuje nas jedynie ruch odcinka, którego końce leżą na osiach współrzędnych (w pierwszej ćwiartce). Przypuśćmy, że początkowo mamy do czynienia z odcinkiem leżącym całkowicie na osi rzędnych, a następnie dolny jego koniec porusza się z jednostajną prędkością po osi odciętych, a koniec górny nie opuszcza osi rzędnych. Ruch trwa aż do momentu, gdy górny koniec odcinka osiągnie początek układu współrzędnych. Pytanie brzmi: jaką krzywą zakreśli w tym ruchu *środek* rozważanego odcinka?

10 Koła Arystotelesa

Wyobraźmy sobie dwa koncentryczne okręgi o promieniach r oraz R i niech $r < R$. Dalej, niech okręgi te będą obwodami kół pojazdu (czyli koło pojazdu jest bryłą złożoną z dwóch przylegających do siebie walców), poruszającego się po szynie, jak ilustruje to poniższy rysunek (strzałka z lewej wskazuje na przekrój szyny, strzałka z prawej na przekrój koła pojazdu):



Jeśli teraz oba koła dokonają pełnego obrotu, to długość AB jest równa długości większego okręgu, czyli $2\pi R$, natomiast długość CD jest równa długości mniejszego okręgu, czyli $2\pi r$:



Ponieważ długości AB oraz CD są równe, więc $2\pi R = 2\pi r$, a zatem $r = R$, sprzecznie z początkowym założeniem. Gdzie tkwi błąd w powyższej argumentacji?

Rozwiązania zagadek podane zostaną na wykładzie.

Jerzy Pogonowski
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
www.logic.amu.edu.pl