MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

ZALICZENIE POPRAWKA: 7.II.2017

KOGNITYWISTYKA UAM, 2016–2017

Imię i nazwisko: . . . . ŁOWCY ŁANI KYRENEJSKIEJ

1. Pokaż, że nie jest prawem rachunku zbiorów (tutaj X' oznacza dopełnienie zbioru X w rozważanym uniwersum):

$$A \cap (C \cup B)' = (A - C) \cap (B - C)$$

2. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

$$a_n = \sqrt[n]{2^n + \pi^n}$$

3. Oblicz drugą pochodną funkcji:

$$f(x) = e^{\sin x}$$

4. Znajdź wartości liczbowe ekstremów lokalnych funkcji:

$$f(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 36 \cdot x + 6 \cdot \sin \frac{\pi}{2}$$

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Matematyczne Podstawy Kognitywistyki

Zaliczenie Poprawka: 7.II.2017

Kognitywistyka UAM, 2016–2017

Imię i nazwisko: . . . . Łowcy Dzika Erymantejskiego

1. Pokaż, że nie jest prawem rachunku zbiorów (tutaj X' oznacza dopełnienie zbioru X w rozważanym uniwersum):

$$A \cup (C \cup B)' = (A - C) \cap (A - B)$$

2. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

$$a_n = \sqrt[n]{\pi^n + 5^n}$$

3. Oblicz drugą pochodną funkcji:

$$f(x) = e^{\cos x}$$

4. Znajdź wartości liczbowe ekstremów lokalnych funkcji:

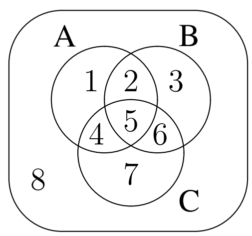
$$f(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 6 \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$$

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

ROZWIĄZANIA

ŁOWCY ŁANI KYRENEJSKIEJ

1. Zadanie można rozwiązać różnymi sposobami. Pokażemy rozwiązanie wykorzystujące diagramy Venna. Można narysować diagramy Venna dla lewej i prawej strony badanej równości i pokazać, że reprezentują one różne zbiory, zaznaczając np. różnymi kolorami brane pod uwagę obszary. Ponieważ jednak mamy pokazać, że rozważana równość ***nie*** zachodzi, więc zadanie jest łatwiejsze: umieścimy w każdej składowej diagramu Venna jakiś element (np. liczbę), obliczymy czemu równa jest wtedy lewa i prawa strona rozważanej równości i (jeżeli pytanie było uczciwe) dostaniemy w wyniku różne zbiory.



W oznaczeniach tego diagramu mamy zatem:

1. $A = \{1, 2, 4, 5\}$
2. $B = \{2, 3, 5, 6\}$
3. $C = \{4, 5, 6, 7\}$
4. $C \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
5. $(C \cup B)' = \{1, 8\}$
6. $A - C = \{1, 2\}$
7. $B - C = \{2, 3\}$
8. $A \cap (C \cup B)' = \{1\}$

9. $(A - C) \cap (B - C) = \{2\}$

10. Tak więc: $A \cap (C \cup B)' = \{1\} \neq \{2\} = (A - C) \cap (B - C)$.

2. Skorzystamy z twierdzenia o trzech ciągach. Ponieważ $2 < \pi$, więc zachodzą nierówności:

$$\sqrt[n]{\pi^n} \leqslant \sqrt[n]{2^n + \pi^n} \leqslant \sqrt[n]{\pi^n + \pi^n}.$$

Mamy dalej: $\sqrt[n]{\pi^n} = \pi$ oraz $\sqrt[n]{\pi^n + \pi^n} = \sqrt[n]{2 \cdot \pi^n} = \pi \cdot \sqrt[n]{2}$. Jak wiadomo z wykładu, $\lim\limits_{n\to\infty} \pi \cdot \sqrt[n]{2} = \pi \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = \pi \cdot 1 = \pi$.

Mamy zatem trzy ciągi:

1. $b_n = \sqrt[n]{\pi^n}$, przy czym $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pi$

2. $c_n = \sqrt[n]{2 \cdot \pi^n}$, przy czym $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \pi$

3. $a_n = \sqrt[n]{2^n + \pi^n}$, przy czym $b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$ dla wszystkich n.

Na mocy twierdzenia o trzech ciągach mamy wtedy: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \pi$.

3. Obliczamy pierwszą pochodną funkcji $f(x) = e^{\sin x}$:

$$(f(x))' = (e^{\sin x})' = e^{\sin x} \cdot (\sin x)' = e^{\sin x} \cdot \cos x$$

Obliczamy drugą pochodną funkcji $f(x) = e^{\sin x}$:

$$f''(x) = (e^{\sin x} \cdot \cos x)' = ((e^{\sin x})' \cdot \cos x + e^{\sin x} \cdot (\cos x)') =$$
$$= e^{\sin x} \cdot (\sin x)' \cdot \cos x + e^{\sin x} \cdot (-\sin x) = e^{\sin x} \cdot (\cos x \cdot \cos x - \sin x) =$$
$$= e^{\sin x} \cdot (\cos^2 x - \sin x)$$

4. Mamy do czynienia z funkcją wielomianową, a więc jej dziedziną jest cały zbiór $\mathbb{R}$. Obliczamy pochodną funkcji $f(x)$:

$$f(x)' = (2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 36 \cdot x + 6 \cdot \sin \frac{\pi}{2})' = 6 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 36 = 6 \cdot (x^2 - x - 6)$$

Mamy: $f(x)' = 0$ dokładnie wtedy, gdy $x^2 - x - 6 = 0$. W szkole nauczyliśmy się, jak rozwiązywać równanie kwadratowe:

1. Można obliczyć wyróżnik $\Delta = 25$ i znaleźć dwa pierwiastki $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, posługując się stosownym wzorem szkolnym.

2. Można skorzystać z faktu, że iloczyn pierwiastków równy jest -6, zaś ich suma równa jest 1 i na tej podstawie ustalić, że $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

Tak więc, $f(x)' = 0$ dla $x = -2$ oraz $x = 3$. Badamy znak pochodnej w trzech przypadkach: dla argumentu mniejszego od -2, dla argumentu między -2 a 3 oraz dla argumentu większego od 3:

1. $f(-3)' = 36 > 0$

2. $f(0)' = -36 < 0$

3. $f(4)' = 36 > 0$

Tak więc, funkcja f jest:

1. rosnąca w przedziale $(-\infty, -2)$

2. malejąca w przedziale $(-2, 3)$

3. rosnąca w przedziale $(3, \infty)$.

W konsekwencji, funkcja f ma:

1. maksimum lokalne w punkcie -2 i mamy $f(-2) = 50$ (pamiętamy, że $\sin \frac{\pi}{2} = 1$)

2. minimum lokalne w punkcie 3 i mamy $f(3) = -75$.

Ponieważ badana funkcja jest funkcją wielomianową o nieparzystym wykładniku przy najwyższej potędze x oraz dodatnim współczynniku przy tej potędze, więc otrzymujemy dodatkowo:

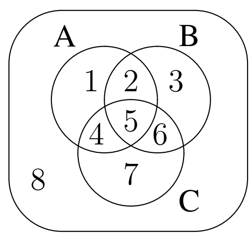
1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Rozwiązania

Łowcy Dzika Erymantejskiego

1. Zadanie można rozwiązać różnymi sposobami. Pokażemy rozwiązanie wykorzystujące diagramy Venna. Można narysować diagramy Venna dla lewej i prawej strony badanej równości i pokazać, że reprezentują one różne zbiory, zaznaczając np. różnymi kolorami brane pod uwagę obszary. Ponieważ jednak mamy pokazać, że rozważana równość ***nie*** zachodzi, więc zadanie jest łatwiejsze: umieścimy w każdej składowej diagramu Venna jakiś element (np. liczbę), obliczymy czemu równa jest wtedy lewa i prawa strona rozważanej równości i (jeżeli pytanie było uczciwe) dostaniemy w wyniku różne zbiory.



W oznaczeniach tego diagramu mamy zatem:

1. $A = \{1, 2, 4, 5\}$
2. $B = \{2, 3, 5, 6\}$
3. $C = \{4, 5, 6, 7\}$
4. $C \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
5. $(C \cup B)' = \{1, 8\}$
6. $A - C = \{1, 2\}$
7. $A - B = \{1, 4\}$
8. $A \cup (C \cup B)' = \{1, 2, 4, 5, 8\}$

9. $(A - C) \cap (A - B) = \{1\}$

10. Tak więc, $A \cup (C \cup B)' = \{1, 2, 4, 5, 8\} \neq \{1\} = (A - C) \cap (A - B)$

2. Skorzystamy z twierdzenia o trzech ciągach. Ponieważ $\pi < 5$, więc zachodzą nierówności:

$$\sqrt[n]{5^n} \leqslant \sqrt[n]{\pi^n + 5^n} \leqslant \sqrt[n]{5^n + 5^n}.$$

Mamy dalej: $\sqrt[n]{5^n} = 5$ oraz $\sqrt[n]{5^n + 5^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 5^n} = 5 \cdot \sqrt[n]{2}$. Jak wiadomo z wykładu, $\lim\limits_{n\to\infty} 5 \cdot \sqrt[n]{2} = 5 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 5 \cdot 1 = 5$.

Mamy zatem trzy ciągi:

1. $b_n = \sqrt[n]{5^n}$, przy czym $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 5$

2. $c_n = \sqrt[n]{2 \cdot 5^n}$, przy czym $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 5$

3. $a_n = \sqrt[n]{\pi^n + 5^n}$, przy czym $b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$ dla wszystkich n.

Na mocy twierdzenia o trzech ciągach mamy wtedy: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 5$.

3. Obliczamy pierwszą pochodną funkcji $f(x) = e^{\cos x}$:

$$(f(x))' = (e^{\cos x})' = e^{\cos x} \cdot (\cos x)' = -e^{\cos x} \cdot \sin x$$

Obliczamy drugą pochodną funkcji $f(x) = e^{\cos x}$:

$$(f(x))'' = (-e^{\cos x} \cdot \sin x)' = -((e^{\cos x})' \cdot \sin x + e^{\cos x} \cdot (\sin x)') =$$

$$= -(e^{\cos x} \cdot (\cos x)' \cdot \sin x + e^{\cos x} \cdot \cos x) = -(e^{\cos x} \cdot (-\sin x) \cdot \sin x + e^{\cos x} \cdot \cos x) =$$

$$= e^{\cos x} \cdot (\sin^2 x - \cos x)$$

4. Mamy do czynienia z funkcją wielomianową, a więc jej dziedziną jest cały zbiór $\mathbb{R}$. Obliczamy pochodną funkcji $f(x)$:

$$f(x)' = (2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 6 \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4})' = 6 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 12 = 6 \cdot (x^2 - x - 2)$$

Mamy: $f(x)' = 0$ dokładnie wtedy, gdy $x^2 - x - 2 = 0$. W szkole nauczyliśmy się, jak rozwiązywać równanie kwadratowe:

1. Można obliczyć wyróżnik $\Delta = 9$ i znaleźć dwa pierwiastki $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, posługując się stosownym wzorem szkolnym.
2. Można skorzystać z faktu, że iloczyn pierwiastków równy jest -2, zaś ich suma równa jest 1 i na tej podstawie ustalić, że $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Tak więc, $f(x)' = 0$ dla $x = -1$ oraz $x = 2$. Badamy znak pochodnej w trzech przypadkach: dla argumentu mniejszego od -1, dla argumentu między -1 a 2 oraz dla argumentu większego od 2:

1. $f(-2)' = 24 > 0$
2. $f(0)' = -12 < 0$
3. $f(3)' = 24 > 0$

Tak więc, funkcja f jest:

1. rosnąca w przedziale $(-\infty, -1)$
2. malejąca w przedziale $(-1, 2)$
3. rosnąca w przedziale $(2, \infty)$.

W konsekwencji, funkcja f ma:

1. maksimum lokalne w punkcie -1 i mamy $f(-1) = 13$ (pamiętamy, że $\mathrm{tg}\, \frac{\pi}{4} = 1$)
2. minimum lokalne w punkcie 2 i mamy $f(2) = -14$.

Ponieważ badana funkcja jest funkcją wielomianową o nieparzystym wykładniku przy najwyższej potędze x oraz dodatnim współczynniku przy tej potędze, więc otrzymujemy dodatkowo:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Wszystkie prace zaliczeniowe są zarchiwizowane w pokoju 80. Każdy ze słuchaczy może obejrzeć swoją pracę w godzinach dyżuru wykładowcy.

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl