

# MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

## WYKŁAD 3: FUNKCJE

KOGNITYWISTYKA UAM, 2016–2017

JERZY POGONOWSKI

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM

pogon@amu.edu.pl

Pojęcie *funkcji* to jedno z najważniejszych pojęć matematycznych. W opisach *ilościowych*, które są charakterystyczne dla współczesnej nauki, używa się powszechnie tego pojęcia. Funkcje są formalnymi reprezentacjami sytuacji, gdy jakaś wielkość jest w sposób jednoznaczny zależna od innych wielkości. Rozważa się jednak całkiem ogólne sytuacje, a więc również te, w których zależność funkcyjna nie wiąże wielkości liczbowych, lecz elementy jednego zbioru z elementami innego zbioru. Z funkcjami spotykamy się bardzo wcześnie w procesie edukacji – tabliczki dodawania i mnożenia charakteryzują bowiem pewne funkcje, określone dla liczb i mające wartości liczbowe.

W zależności od kontekstu, używa się określeń: funkcja, przyporządkowanie, odwzorowanie, przekształcenie, operacja, i in. Należy jednak wyraźnie podkreślić, że funkcje w matematyce są pewnymi zbiorami, a dokładniej: relacjami, spełniającymi stosowne warunki jednoznaczności. Czasami trudno uwolnić się od różnych intuicyjnych skojarzeń, motywowanych uzusem językowym i skłaniających np. do żywienia przekonań, że funkcje są jakimiś procesami, że za ich przyczyną coś „dzieje się” z rozważanymi obiektami. Pewna praktyka posługiwania się funkcjami pozwala na wyzwolenie się z tego typu złudnych przeświadczeń.

### 1 Podstawowe definicje

Funkcje są relacjami, a więc można byłoby stosować dla nich taką samą notację jak dla relacji. Jednak ze względu na Tradycję, zwykle używamy nieco innej symboliki. Słuchacze znają te konwencje zapisu ze szkoły.

*Funkcją* ze zbioru  $X$  w zbiór  $Y$  nazwiemy każdą taką relację między elementami zbiorów  $X$  oraz  $Y$ , która nie zawiera żadnych dwóch par uporządkowanych mających te same poprzedniki oraz różne następniki. Innymi słowy,  $f$  jest *funkcją* ze zbioru  $X$  w zbiór  $Y$ , jeżeli:

1.  $f \subseteq X \times Y$
2. dla dowolnych  $x \in X$  oraz  $y_1 \in Y, y_2 \in Y$ : jeśli  $(x, y_1) \in f$  i  $(x, y_2) \in f$ , to  $y_1 = y_2$ .

Jeśli  $(x, y) \in f$ , to  $x$  nazywamy *argumentem* funkcji  $f$ , zaś  $y$  nazywamy *wartością* funkcji  $f$  (dla argumentu  $x$ ). Zamiast pisać  $(x, y) \in f$  zwykle piszemy  $f(x) = y$ . Zapis ten jest uzasadniony jednoznacznością wartości funkcji dla danego argumentu. Inaczej niż w przypadku relacji, raczej nie stosujemy zapisu  $xfy$  jako równoznacznego z  $(x, y) \in f$ .

*Dziedziną* funkcji  $f \subseteq X \times Y$  nazywamy zbiór  $dom(f)$  wszystkich jej argumentów, czyli zbiór tych wszystkich  $x \in X$ , dla których istnieje  $y \in Y$  taki, że  $y = f(x)$ .

*Przeciwdziedziną* (lub *zbiorem wartości*) funkcji  $f \subseteq X \times Y$  nazywamy zbiór  $rng(f)$  tych wszystkich  $y \in Y$ , dla których istnieje  $x \in X$  taki, że  $y = f(x)$ .

Funkcje  $f \subseteq X \times Y$  oraz  $g \subseteq X \times Y$  są równe, gdy ich dziedziny są równe (czyli gdy  $dom(f) = dom(g)$ ) oraz gdy ich wartości dla poszczególnych argumentów są równe, czyli gdy  $f(x) = g(x)$  dla każdego  $x \in dom(f)$ .

Jeśli  $f \subseteq X \times Y$  jest funkcją oraz jej dziedzina jest równa całemu zbiorowi  $X$  (czyli gdy  $dom(f) = X$ ), to mówimy, że  $f$  jest określona w zbiorze  $X$  (lub: określona na zbiorze  $X$ ). W takim przypadku używamy (znanego ze szkoły) zapisu  $f : X \rightarrow Y$ . Używa się wtedy określeń:

1. funkcja  $f$  odwzorowuje  $X$  w  $Y$
2. funkcja  $f$  przekształca  $X$  w  $Y$ .

W przypadku, gdy  $f : X \rightarrow X$ , często mówi się, że  $f$  jest *działaniem* w zbiorze  $X$ .

Jeśli dziedzina funkcji  $f \subseteq X \times Y$  nie jest równa całemu zbiorowi  $X$ , to mówi się, że  $f$  jest *funkcją częściową* z  $X$  w  $Y$ .

PRZYKŁADY.

1. Zbiór  $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 1\}$  jest funkcją. Zapisujemy ją:  $y = \frac{1}{x}$  lub  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Mamy w tym przypadku:

(a)  $dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

(b)  $rng(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ .

2. Relacja mniejszości  $<$  liczb rzeczywistych nie jest funkcją.

3. Przyporządkowanie każdemu obywatelowi Rzeczypospolitej Polskiej jego numeru PESEL jest funkcją. Jej dziedziną jest zbiór wszystkich obywateli RP, jej przeciwdziedziną jest zbiór kodów: ciągów cyfr, z których pierwsze sześć koduje datę urodzenia (w schemacie: rmmdd), a następne pięć koduje jakieś inne dane o obywatelu, o których wykładowca nie ma pojęcia – bodaj przedostatnia cyfra koduje płeć (nieparzysta dla mężczyzn, parzysta dla kobiet).
4. Funkcję, która dla każdego swojego argumentu przyjmuje tę samą wartość, nazywamy *funkcją stałą*.
5. Dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x \in \mathbb{R}$ , niech  $\lfloor x \rfloor$  będzie największą liczbą całkowitą, która nie przekracza  $x$  (czyli jest mniejsza lub równa  $x$ ). Wtedy  $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ . Tę funkcję nazywamy funkcją *podłogi*. Dualna do niej jest funkcja *sufitu*  $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ , która każdej liczbie rzeczywistej  $x$  przyporządkowuje najmniejszą liczbę całkowitą  $\lceil x \rceil$ , która jest większa lub równa liczbie  $x$ . Dla przykładu:  $\lfloor \pi \rfloor = 3$ ,  $\lceil \pi \rceil = 4$ .
6. Dla dowolnego ustalonego uniwersum  $U$ , funkcjami są:  $\{(X, \wp(X)) : X \subseteq U\}$  oraz  $\{(X, X') : X \subseteq U\}$ .

Wszystkie dotąd omówione pojęcia dotyczyły *funkcji jednoargumentowych*, albo inaczej *funkcji jednej zmiennej*. Jeśli  $f : X \times Y \rightarrow Z$ , to argumentami funkcji  $f$  są pary uporządkowane  $(x, y) \in X \times Y$ , zaś jej wartościami są elementy zbioru  $Z$ . W takich przypadkach wartość funkcji  $f$  dla argumentu  $(x, y)$  oznaczamy przez  $f(x, y)$ . Mówimy też, że jest to funkcja *dwuargumentowa*. Należy przy tym pamiętać, że kolejność argumentów funkcji dwuargumentowej jest istotna.

W całkiem podobny sposób określamy funkcje trójargumentowe, czteroargumentowe, itd. Ogólnie, mówimy, że  $f$  jest *funkcją  $n$ -argumentową* (*funkcją  $n$  zmiennych*), gdy  $f : \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow Y$ , dla pewnych zbiorów  $X_1, X_2, \dots, X_n$  oraz  $Y$ .

PRZYKŁADY.

1. Dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie liczb rzeczywistych są funkcjami dwuargumentowymi. Dziedziną trzech pierwszych z tych funkcji jest  $\mathbb{R}^2$ , dziedziną dzielenia jest zbiór  $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})$ .
2. Funkcja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem:  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  jest trójargumentowa.
3. Dla dowolnego ustalonego uniwersum  $U$ , funkcjami dwuargumentowymi są:  $\{((X, Y), X \cup Y) : X \subseteq U \text{ oraz } Y \subseteq U\}$  oraz  $\{((X, Y), X \cap Y) : X \subseteq U \text{ oraz } Y \subseteq U\}$ .

W dalszym ciągu będziemy często korzystali nie tylko ze zbiorów  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ , ale także z tych ich podzbiorów, które obejmują jedynie liczby dodatnie odpowiedniego rodzaju. Wygodnie będzie więc przyjąć oznaczenia:

1.  $\mathbb{N}_+$ : zbiór wszystkich dodatnich liczb naturalnych (czyli  $\mathbb{N}_+ = \{0\}$ )
2.  $\mathbb{Z}_+$ : zbiór wszystkich dodatnich liczb całkowitych (co jest tym samym co zbiór  $\mathbb{N}_+$ )
3.  $\mathbb{Q}_+$ : zbiór wszystkich dodatnich liczb wymiernych
4.  $\mathbb{R}_+$ : zbiór wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych.

## 2 Rodzaje funkcji

Słuchacze pamiętają ze szkoły niektóre typy funkcji, m.in. *iniekcje*, *surjekcje* oraz *bijekcje*. Przypomnijmy:

1. *Iniekcje*. Funkcja  $f : X \rightarrow Y$  jest *iniekcją* ze zbioru  $X$  w zbiór  $Y$ , gdy różnym argumentom funkcji  $f$  przyporządkowane są różne jej wartości. Tak więc,  $f : X \rightarrow Y$  jest *iniekcją* ze zbioru  $X$  w zbiór  $Y$ , gdy dla dowolnych  $x_1 \in X$  oraz  $x_2 \in X$ , jeśli  $x_1 \neq x_2$ , to  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Jeśli  $f$  jest iniekcją, to mówimy, że  $f$  jest funkcją *różnowartościową*. Jeśli  $f : X \rightarrow Y$  jest różnowartościowa, to stosujemy zapisy:

$$f : X \xrightarrow[1-1]{} Y \quad \text{lub} \quad f : X \xrightarrow{1-1} Y$$

2. *Surjekcje*. Funkcja  $f : X \rightarrow Y$  jest *surjekcją* ze zbioru  $X$  na zbiór  $Y$ , gdy przeciwdziedziną funkcji  $f$  jest cały zbiór  $Y$ . Tak więc,  $f : X \rightarrow Y$  jest *surjekcją* ze zbioru  $X$  na zbiór  $Y$ , gdy dla każdego  $y \in Y$  istnieje  $x \in X$  taki, że  $f(x) = y$ . Jeśli  $f : X \rightarrow Y$  jest surjekcją, to stosujemy zapisy:

$$f : X \xrightarrow[na]{} Y \quad \text{lub} \quad f : X \xrightarrow{na} Y$$

3. *Bijekcje*. Funkcja  $f : X \rightarrow Y$  jest *bijekcją* ze zbioru  $X$  na zbiór  $Y$  (albo: *bijekcją* między zbiorami  $X$  i  $Y$ ), gdy  $f$  jest jednocześnie iniekcją z  $X$  w  $Y$  oraz surjekcją z  $X$  na  $Y$ . Bijekcje nazywamy funkcjami *wzajemnie jednoznaczными* (także: 1 – 1 funkcjami). Jeśli  $f : X \rightarrow Y$  jest bijekcją, to stosujemy zapisy:

$$f : X \xrightarrow[1-1]{na} Y \quad \text{lub} \quad f : X \xrightarrow[na]{1-1} Y$$

#### PRZYKŁADY.

1. Funkcja  $f(x) = 2x + 3$  jest bijekcją z  $\mathbb{R}$  w  $\mathbb{R}$ .
2. Funkcja  $f(x) = x^2$  jest surjekcją z  $\mathbb{R}$  na  $\mathbb{R}_+$ . Nie jest surjekcją z  $\mathbb{R}$  na  $\mathbb{R}$ .
3. Funkcje sufitu i podłogi są surjekcjami z  $\mathbb{R}$  na  $\mathbb{Z}$ . Nie są surjekcjami z  $\mathbb{R}$  na  $\mathbb{R}$ . Nie są bijekcjami z  $\mathbb{R}$  na  $\mathbb{Z}$ .
4. Bijeckje  $f : X \rightarrow X$  nazywamy również (zwłaszcza w przypadku, gdy zbiór  $X$  jest skończony) *permutacjami* zbioru  $X$ .

Dowolną funkcję, której dziedziną jest zbiór  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  dla pewnej  $n \in \mathbb{N}_+$  nazywamy *ciągami skończonym* (o długości  $n$ ). Wartości takiej funkcji nazywamy wtedy *wyrazami* tego ciągu: jej wartość dla  $k$ -tego argumentu nazywamy  $k$ -tym wyrazem ciągu. Zwykle ciągi skończone o długości  $n$  zapisujemy tak samo jak  $n$ -tki uporządkowane:  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Jeśli żadne dwa wyrazy ciągu nie są identyczne, to ciąg nazywamy *różnowartościowym*.

*Ciągiem nieskończonym* nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór  $\mathbb{N}_+$ . Ciąg nieskończony o  $n$ -tym wyrazie równym  $a_n$  oznaczamy  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$  (czasem przez:  $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}_+}$ ). Często pomijamy indeks  $n \in \mathbb{N}_+$ , gdy kontekst na to pozwala.

Ciągi, których wyrazami są liczby, nazywamy ciągami *liczbowymi*. Podobnie, ciągi, których wyrazami są funkcje, nazywamy ciągami *funkcyjnymi*.

UWAGA. Czasem wygodnie jest numerować wyrazy ciągów poczynając od 1, a czasem od zera.

#### PRZYKŁADY.

1. Ciąg  $(\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\})$  jest skończonym (różnowartościowym) ciągiem zbiorów.
2. Ciąg  $(1, 2, 3, 4, 3, 2, 1)$  jest skończonym ciągiem liczbowym, który nie jest różnowartościowy.
3. Ciąg  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ , którego  $n$ -tym wyrazem jest  $a_n = \frac{1}{n}$  jest ważnym nieskończonym ciągiem liczbowym (nazywanym *ciągami harmonicznym*), który wielokrotnie pojawi się w dalszych wykładach.
4. Ciąg  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ , którego  $n$ -tym wyrazem jest funkcja, zdefiniowana wzorem  $f_n(x) = \frac{1}{n}x$  jest przykładem ciągu funkcyjnego (dla  $x \in \mathbb{R}$ , powiedzmy).
5. Ciąg  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ , którego  $n$ -tym wyrazem jest  $n$ -ta liczba pierwsza  $p_n$  jest nieskończonym ciągiem liczbowym.

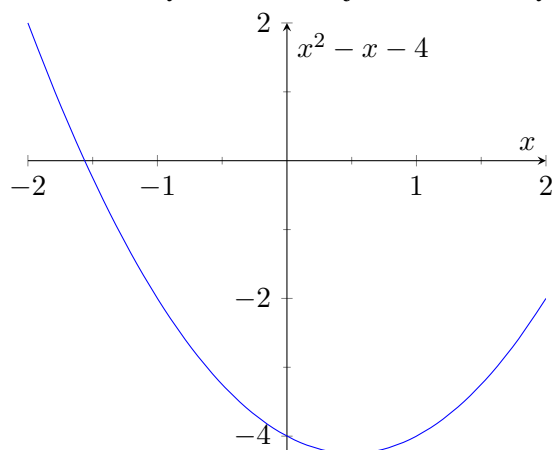
6. Rozwinięcia dziesiętne liczb rzeczywistych traktujemy jako ciągi: zerowym elementem jest część całkowita liczby rzeczywistej, a kolejne dalsze elementy rozwinięcia mają postać  $\frac{c_n}{10^n}$ , gdzie  $n \in \mathbb{N}_+$ , zaś  $c_n$  jest liczbą naturalną nie większą od 10.

### 3 Wizualizacje

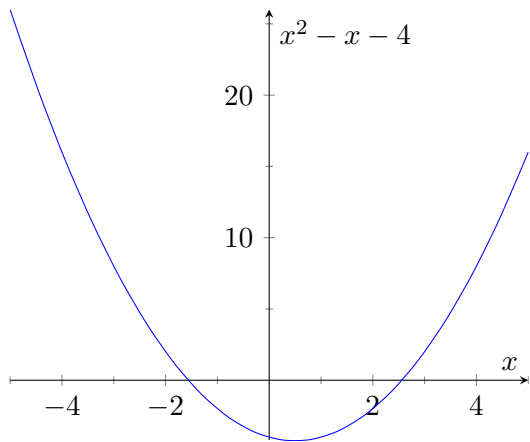
Pamiętamy, że relacje reprezentować można przez grafy. Ponieważ każda funkcja jest relacją, więc również funkcje mogą być reprezentowane przez grafy. Można również, w przypadku funkcji o dziedzinie skończonej, podawać jej reprezentację w postaci tabeli: wertykalnie – kolumna argumentów, kolumna odpowiadających im wartości (albo horyzontalnie – wiersz argumentów, wiersz odpowiadających im wartości). Bardziej rozpowszechniona jest jednak – dobrze znana słuchaczom ze szkoły – reprezentacja graficzna funkcji poprzez ich *wykresy*. Słuchacze pamiętają ze szkoły układ współrzędnych kartezjańskich na płaszczyźnie. Gdy rysujemy wykres funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, to argumenty  $x$  tej funkcji tworzą *oś odciętych*, jej wartości  $f(x)$  znajdują się na takim wykresie pionowo nad  $x$  na takiej wysokości, która odpowiada wartości  $f(x)$ . Rysujemy więc graf relacji  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ . Należy przy tym pamiętać, że na osi odciętych oraz osi rzędnych możemy używać różnej *skali*, co często znakomicie ułatwia zarówno rysowanie wykresów, jak też ich rozpoznawanie. Rozważmy kilka przykładów (źródło: <http://pgfplots.sourceforge.net/gallery.html>).

#### 3.1 Funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 - x - 4$

Skala na osi rzędnych taka sama, jak na osi odciętych:

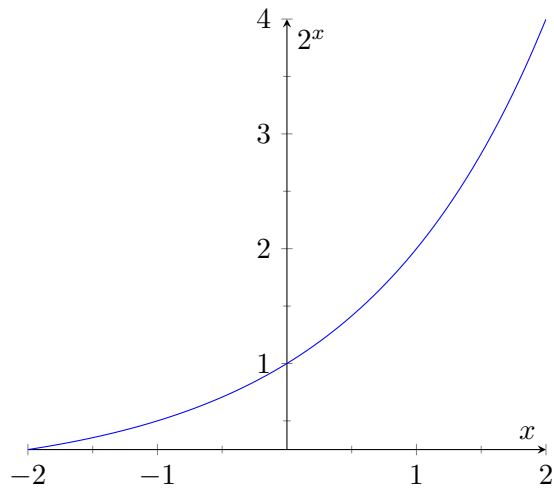


Inne skale na obu osiach:

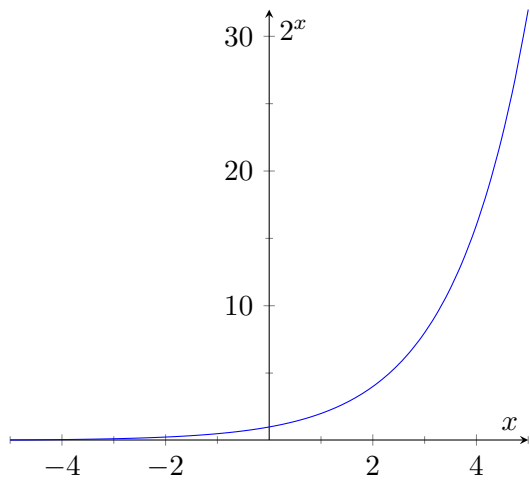


### 3.2 Funkcja wykładnicza $f(x) = 2^x$

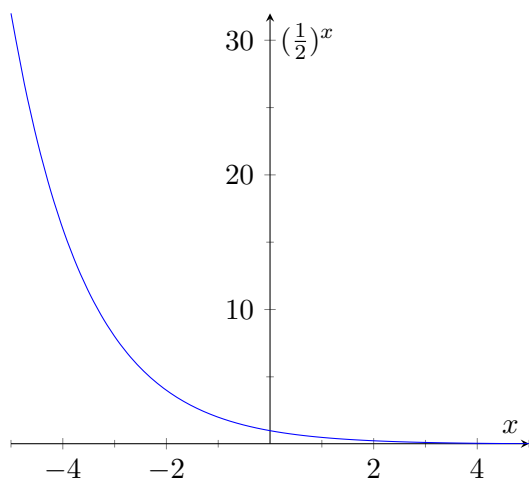
Skala na osi rzędnych taka sama, jak na osi odciętych:



Inne skale na obu osiach:

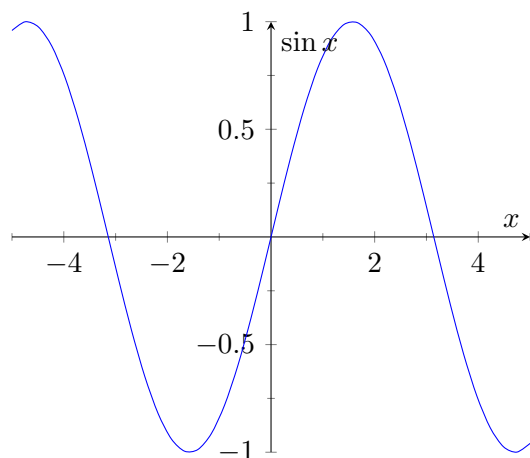


**3.3 Funkcja wykładnicza  $f(x) = (\frac{1}{2})^x$**



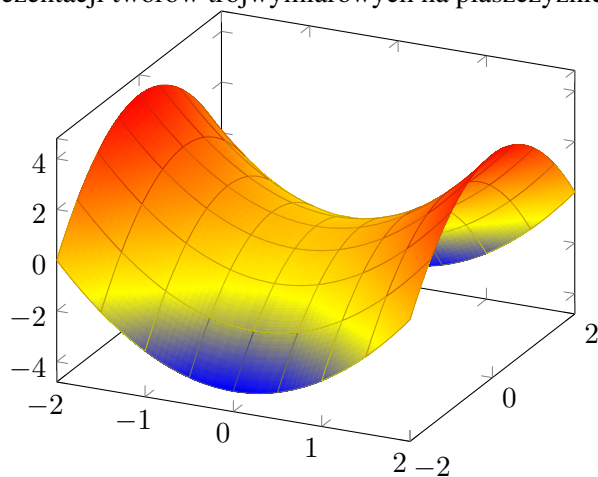


### 3.4 Funkcja trygonometryczna $\sin(x)$

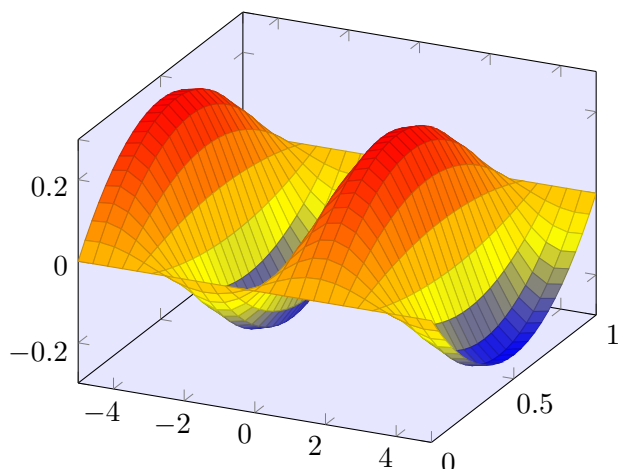


### 3.5 Funkcja dwóch zmiennych $f(x, y) = x^2 - y^2$

Wykres funkcji dwóch zmiennych rzeczywistych tworzymy przyporządkowując każdej parze  $(x, y)$  argumentów tej funkcji (reprezentowanej przez punkt na płaszczyźnie kartezjańskiej) punkt o współrzędnych  $(x, y, f(x, y))$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ . Sytuację tę oddajemy graficznie na płaszczyźnie, stosując konwencje dotyczące reprezentacji tworów trójwymiarowych na płaszczyźnie.



### 3.6 Funkcja dwóch zmiennych $f(x, y) = \sin(x) \cdot y \cdot (1 - y)$

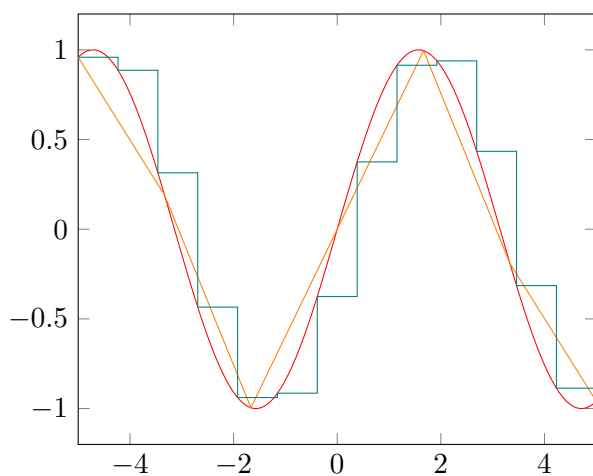


Słuchacze znają ze szkoły pewne wykresy funkcji dwóch zmiennych rzeczywistych: sferę, paraboloidę, elipsoidę, stożek, walec, itp.

Przykładowe prezentacje ukazujące jak rysować takie wykresy:

1. [https://www.youtube.com/watch?v=Q\\_NEbzFAdDE](https://www.youtube.com/watch?v=Q_NEbzFAdDE)
2. <https://www.youtube.com/watch?v=L3QEkUEsLbM>

### 3.7 Kilka funkcji na jednym obrazku



### 3.8 Przykłady pomocy on line

W sieci dostępnych jest wiele programów edukacyjnych z matematyki, zawierających m.in. narzędzia do rysowania wykresów funkcji. Dla przykładu:

1. <https://www.geogebra.org/>
2. <https://www.medianauka.pl/porta:matematyka>
3. <http://www.matemaks.pl/index.html>
4. <http://www.scilab.org/>
5. <http://fooplot.com/>
6. <https://rechneronline.de/function-graphs/>

Portal You Tube zawiera mnóstwo pomocy dydaktycznych dotyczących rysowania wykresów funkcji.

Korzystać też można z bardziej zaawansowanych narzędzi programistycznych, jak np. *MATLAB* lub *Mathematica*.

### 3.9 Złożenie funkcji, funkcja odwrotna, obcięcie funkcji

*Obcięciem* funkcji  $f : X \rightarrow Y$  do zbioru  $Z \subseteq X$  nazywamy funkcję  $f|Z$  zdefiniowaną następująco:

$$f|Z = f \cap (Z \times Y) = \{(x, y) \in f : x \in Z\}.$$

Jeśli funkcja  $g$  jest obcięciem funkcji  $f$  do pewnego zbioru, to  $f$  nazywamy *przedłużeniem*  $g$ . Tak więc,  $f$  jest przedłużeniem  $g$ , gdy  $g = f|dom(g)$ .

*Złożeniem (superpozycją)* funkcji  $f$  oraz  $g$  nazywamy funkcję  $g \circ f$  zdefiniowaną następująco:

$$g \circ f = \{(x, z) \in dom(f) \times rng(g) : \text{istnieje } y \text{ taki, że } (x, y) \in f \text{ oraz } (y, z) \in g\}.$$

Rozpatrując złożenie  $g \circ f$ , zwykle zakłada się, że  $rng(f) \subseteq dom(g)$ . Tak więc, jeśli  $f$  jest funkcją z  $X$  w  $Y$ , zaś  $g$  jest funkcją z  $Y$  w  $Z$ , to ich złożenie, czyli  $g \circ f$  jest funkcją z  $X$  w  $Z$ . Jeśli nie prowadzi to do nieporozumień, to wartość złożenia funkcji  $f$  oraz  $g$  dla argumentu  $x \in dom(f)$  oznaczamy też  $g(f(x))$ .

Jeśli  $f$  jest funkcją różnowartościową, to zbiór  $\{(y, x) : (x, y) \in f\}$  również jest funkcją, nazywaną *funkcją odwrotną* do funkcji  $f$ . Funkcję odwrotną do funkcji  $f$  oznaczamy zwykle przez  $f^{-1}$ . Tak więc, jeśli  $f$  jest funkcją z  $X$  w  $Y$ , to funkcja do niej odwrotna, czyli  $f^{-1}$  jest funkcją z  $Y$  w  $X$ .

PRZYKŁADY.

1. Obcięciem ciągu  $(3, 5, 7, 9, 2, 2, 4)$  do zbioru  $\{3, 4, 5\}$  jest ciąg  $(7, 9, 2)$ .
2. Niech  $f(x) = 2x + 3$  dla  $x \in \mathbb{R}$  oraz  $g(x) = x^2$  dla  $x \in \mathbb{R}$ . Wtedy  $(g \circ f)(x) = (2x + 3)^2$ , natomiast  $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 3$ .
3. Niech  $f(x) = x^2$  dla  $x \in \mathbb{R}$  oraz  $g(x) = \sqrt{x}$  dla  $x \geq 0$ . Wtedy  $(g \circ f)(x) = |x|$  dla  $x \in \mathbb{R}$ .
4. Niech  $f(x) = x^2$  dla  $x \geq 0$ . Wtedy  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$  dla  $x \geq 0$ .

### 3.10 Funkcja charakterystyczna zbioru

Niech  $X$  będzie dowolnym podzbiorem ustalonego uniwersum  $U$ . Funkcją charakterystyczną zbioru  $X$  (w tym uniwersum) nazywamy funkcję  $\chi_X : U \rightarrow \{0, 1\}$ , zdefiniowaną następująco:

1. Jeśli  $x \in X$ , to  $\chi_X(x) = 1$
2. Jeśli  $x \notin X$ , to  $\chi_X(x) = 0$ .

Funkcja charakterystyczna zbioru jest zatem indykatorem przynależności elementów uniwersum do tego zbioru.

PRZYKŁADY.

1. Rozważmy zbiór  $\{x \in \mathbb{N} : x \text{ jest parzystą liczbą pierwszą}\}$ . Funkcja charakterystyczna tego zbioru (w uniwersum  $\mathbb{N}$ ) przyjmuje wartość 1 tylko dla liczby 2, a dla pozostałych liczb naturalnych przyjmuje wartość 0.
2. Funkcja charakterystyczna zbioru wszystkich liczb parzystych w uniwersum  $\mathbb{N}$  przyjmuje wartość 1 dla każdej liczby parzystej, a wartość 0 dla każdej liczby nieparzystej.
3. Rozważmy uniwersum  $\mathbb{R}$  i funkcję charakterystyczną zbioru  $\mathbb{Q}$  wszystkich liczb wymiernych w tym uniwersum. Tę funkcję nazywamy *funkcją Dirichleta*. Czy potrafisz wyobrazić sobie jak wygląda jej wykres?

### 3.11 Obrazy i przeciwobrazy zbiorów względem funkcji

Podobnie jak w przypadku relacji, rozważać możemy obrazy i przeciwobrazy zbiorów względem funkcji. Ograniczymy się do przypadków tworzenia obrazów zbiorów zawartych w dziedzinie funkcji oraz przeciwobrazów zbiorów zawartych w jej przeciwdziedzinie. Niech zatem  $f : X \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq \text{dom}(f)$ ,  $B \subseteq \text{rng}(f)$ .

1. *Obrazem* zbioru  $A$  względem funkcji  $f$  jest zbiór:  $f[A] = \{f(x) : x \in A\}$ .
2. *Przeciwbrazem* zbioru  $B$  względem funkcji  $f$  jest zbiór:  $f^{-1}[B] = \{x \in \text{dom}(f) : f(x) \in B\}$ .

UWAGA. W definicji przeciwbrazu nie wymagamy, aby  $f$  była funkcją różnowartościową. To przykład sytuacji, gdy Tradycja (konwencja zapisu) wprowadza nieco zamieszania (traktujemy tu  $f^{-1}$  jako konwers relacji  $f$ ). Tak to bywa z Tradycjami.

PRZYKŁADY.

1. Rozważmy funkcję  $f(x) = 2x$  oraz przedział otwarty  $(3, 4)$ . Wtedy  $f[(3, 4)] = (6, 8)$ . Proponujemy sporządzić wykres. Jakies refleksje?
2.  $|\mathbb{R} - \mathbb{R}_+| = \mathbb{R}_+$ .
3. Przeciwbrazem zbioru  $\{1\}$  względem funkcji Dirichleta jest zbiór wszystkich liczb wymiernych  $\mathbb{Q}$ .
4. Niech  $f(x) = x^2$  dla  $x \in \mathbb{R}$  oraz niech  $B = (1, 2)$ . Wtedy  $f^{-1}[B] = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x^2 < 2\}$ . Znaną ze szkoły metodą rozwiązywania układu nierówności możemy pokazać, że  $f^{-1}[(1, 2)] = (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$ . Proponujemy narysować wykres rozważanej funkcji, zaznaczyć na nim zbiór  $B$  i zastanowić się nad interpretacją geometryczną zbioru  $f^{-1}[(1, 2)]$ .

### 3.12 Sposoby definiowania funkcji

Jest wiele sposobów definiowania funkcji, czyli określania, w jaki sposób wartości funkcji zależą od jej argumentów. Dla przykładu:

1. *Opis językowy*. Funkcja może zostać określona przepisem otrzymywania jej wartości dla ustalonych argumentów. Przepis musi oczywiście spełniać stosowne warunki formalne: musi gwarantować istnienie oraz jednoznaczność wartości funkcji. Tak definiujemy np. funkcje podłogi oraz sufitu.
2. *Jawny wzór*. Funkcja może zostać określona w postaci jawnego wzoru, ustalającego zależność między argumentami a wartościami. Ten sposób słuchacze dobrze znają ze szkoły – funkcja liniowa, kwadratowa, potęgowa, itd. są tak właśnie definiowane.
3. *Definiowanie warunkowe*. Funkcja może być określona różnymi wzorami dla różnych fragmentów swojej dziedziny. Słuchacze pamiętają definicję wartości bezwzględnej  $|x|$  liczby rzeczywistej  $x$ :  $|x| = x$  dla  $x \geq 0$ , a  $|x| = -x$  dla  $x < 0$ .

4. *Definicje przez indukcję.* Funkcja może być określona przez wzory rekurencyjne, określające jej wartości dla wybranego początkowego argumentu oraz formułujące przepis, jak otrzymywać dalsze wartości, gdy obliczone są już wartości wcześniejsze. Słuchacze znają tego typu definicje ze szkoły: tak przecież definiowano dodawanie, mnożenie i potęgowanie liczb naturalnych. Definicję indukcyjną ma też znana ze szkoły funkcja *silnia*.
5. *Funkcje wyboru.* W teorii mnogości ZFC akceptujemy *aksjomat wyboru*, który gwarantuje, że dla dowolnej rodziny niepustych parami rozłącznych zbiorów istnieje zbiór, który tworzymy wybierając z każdego zbioru rozważanej rodziny dokładnie jeden element (np. z każdej klasy równoważności dokładnie jeden element tej klasy). Zauważmy, że w ogólności ten sposób określania funkcji (wybierz element ze zbioru) nie jest *konstruktywny*, gdyż nie podajemy wyraźnego przepisu, *który* element należy wybrać. Pewne funkcje wyboru mogą jednak zostać określone w sposób efektywny, o czym przekonamy się nieco później.

## 4 Wybrane prawa dotyczące funkcji

Wyliczamy niżej niektóre prawa dotyczące funkcji w ogólności. Pozwalamy sobie przypomnieć, że uczenie się *na pamięć* jest niewskazane, niemodne, *obciachowe*. Niektóre z podanych niżej praw słuchacze mogą próbować udowodnić samodzielnie, dla treningu umysłowego. W istocie dowody tych praw przeprowadza się tak samo, jak uprzednio omówione dowody w rachunku zbiorów i relacji. Korzystamy w nich oczywiście z podstawowej własności funkcji, jaką jest jednoznaczność ustalania jej wartości dla dowolnych argumentów.

Dla dowolnej funkcji  $f : X \rightarrow Y$ :

1.  $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$ .
2.  $f[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f[A_i]$ .
3.  $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$ .
4.  $f[\bigcap_{i \in I} A_i] \subseteq \bigcap_{i \in I} f[A_i]$ .
5.  $f[A] - f[B] \subseteq f[A - B]$ .
6. Jeśli  $A \subseteq B$ , to  $f[A] \subseteq f[B]$ .
7.  $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$ .

8.  $f^{-1}[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[A_i]$ .
9.  $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$ .
10.  $f^{-1}[\bigcap_{i \in I} A_i] = \bigcap_{i \in I} f^{-1}[A_i]$ .
11.  $f^{-1}[A - B] = f^{-1}[A] - f^{-1}[B]$ .
12. Jeśli  $A \subseteq B$ , to  $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$ .
13. Jeśli  $A \subseteq \text{dom}(f)$  i  $B \subseteq \text{rng}(f)$ , to:
  - (a)  $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ ,
  - (b)  $f[f^{-1}[B]] = B$ ,
  - (c)  $f[A] \cap B = f[A \cap f^{-1}[B]]$ .
  - (d)  $f[A] \cap B = \emptyset$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $A \cap f^{-1}[B] = \emptyset$ .
  - (e)  $f[A] \subseteq B$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $A \subseteq f^{-1}[B]$ .

## 5 Zbiory skończone i nieskończone

Dysponując pojęciem funkcji, możemy podać formalną definicję zbiorów skończonych oraz nieskończonych. Możemy obiecać słuchaczom, że nasza Matematyczna Przygoda Edukacyjna stanie się naprawdę frapująca od momentu, gdy zaczniemy obcować z Nieskończonością.

Mamy wszyscy dość dobre intuicje, jeśli chodzi o *skończone* kolekcje przedmiotów, nawet jeśli tych przedmiotów jest *bardzo dużo*. Nasuwającą się charakterystyką zbiorów skończonych jest wyrażenie *liczby ich elementów* poprzez jakąś liczbę naturalną: zbiór  $X$  jest skończony, gdy ma  $n$  elementów, dla pewnej  $n \in \mathbb{N}$ .

Zdarza się, że potrafimy *udowodnić*, że jakiś zbiór jest skończony w powyższym sensie, ale nie potrafimy określić w sposób wyraźny dokładnej liczby jego elementów. Zdarza się i tak, że potrafimy wyrazić liczbę elementów jakiegoś zbioru jako wartość stosownej funkcji liczbowej, ale dokładne wypisanie tej wartości nie jest możliwe.

### 5.0.1 Dygresja: ciąg Mosera-Steinhaus

Wprowadźmy oznaczenia:

1.  $\Delta(n)$  oznacza  $n^n$

2.  $\square(n)$  oznacza iterowanie  $n$  razy operacji  $\Delta$  dla argumentu  $n$

3.  $\star(n)$  oznacza iterowanie  $n$  razy operacji  $\square$  dla argumentu  $n$ .

Czy potrafisz obliczyć  $\star(2)$ ? Odpowiesz zapewne natychmiast: *Oczywiście, każdy potrafi to policzyć, przecież podano wyraźny przepis!* Spróbujmy zatem postępować wedle tego przepisu:

1.  $\star 2 = \square(\square(2)) = \square(\Delta(\Delta(2)))$

2.  $\Delta(\Delta(2)) = \Delta(2^2) = \Delta(4) = 4^4 = 256$

3.  $\star(2) = \square(256) = \Delta(\Delta(\dots(\Delta(256)\dots)))$ , gdzie operacja  $\Delta$  wykonywana jest 256 razy (*wieża potęgowa*).

4.  $\star(2)$  to zatem liczba gigantyczna, którą łatwo opisać, ale obliczyć ją, hm, trudniej.

Notacja Mosera-Steinhaus'a nie kończy się na wymienionych wyżej operacjach. W oryginale posługiwano się argumentem w wielokącie dla zaznaczenia poszczególnych operacji (nie stosujemy tej notacji ze względów typograficznych). Tak więc:

1.  $\Delta(n)$  było oznaczane jako  $n$  w trójkącie.

2.  $\square(n)$  było oznaczane jako  $n$  w czworokącie.

3.  $\star(n)$  było oznaczane jako  $n$  w pięciokącie.

4. Ogólnie,  $n$  w  $k$ -kącie (foremnym) oznaczało  $n$  w  $n(k-1)$ -kątach (foremnych), przy czym pozostawał w mocy podany przepis na obliczanie takiej liczby:  $n$  w  $k$ -kącie oznaczało  $n$ -krotną iterację operacji opisanej dla  $(k-1)$ -kąta.

Liczba  $\star(2)$  (czyli 2 w pięciokącie) nazywana jest czasem *mega*, zaś 2 w mega-kącie (czyli wielokącie o mega bokach) nosi nazwę *moser*. Liczbę  $\star(10)$  (czyli 10 w pięciokącie) nazywa się *megiston*. Powyższa notacja, choć bardzo sprytna, może budzić podejrzliwość osób przyzwyczajonych do „porządnych” arytmetycznych i algebraicznych definicji. Nie ma jednak powodów do niepokoju – cała konstrukcja opisana też może być stosowną definicją rekurencyjną funkcji  $M(n, m, p)$  (więcej o takich definicjach dowiedzą się słuchacze później):

1.  $M(n, 1, 3) = n^n$



2.  $M(n, 1, p + 1) = M(n, n, p)$
3.  $M(n, m + 1, p) = M(M(n, 1, p), m, p)$ .

Tutaj interpretujemy  $M(n, m, p)$  jako odpowiadającą liczbie  $n$  w  $m$   $p$ -kątach jeden w drugim. Wymienione przez nas mega, megiston oraz moser mają następujące definicje w terminach funkcji  $M$ :

1. mega= $M(2, 1, 5)$
2. megiston= $M(10, 1, 5)$
3. moser= $M(2, 1, M(2, 1, 5))$ .

Mamy zatem przykład konstrukcji, o której łatwo opowiedzieć, ale która jest jednocześnie dość złożona, jeśli chodzi o obliczanie konkretnych, wchodzących w grę wielkości. Więcej na ten temat zainteresowani słuchacze znajdą w pracach poświęconych *notacji strzałkowej Knutha*.

Koniec dygresji

PRZYKŁADY.

1. Zbiór  $\{1, 2, 3\}$  jest skończony.
2. Zbiór pusty jest skończony.
3. Zbiór wszystkich wielościanów foremnych jest skończony: zawiera pięć elementów (czworościan, sześcian, ośmiościan, dwunastościan oraz dwudziestościan). Jego elementy nazywamy *bryłami platońskimi*.
4. Zbiór wszystkich liczb naturalnych  $n$ , dla których równanie  $x^n + y^n = z^n$  ma rozwiązania w liczbach naturalnych  $x, y, z$  jest skończony. Jest on równy zbiorowi  $\{0, 1, 2\}$ . Ustalenie tego faktu zajęło matematykom kilka stuleci – jest to tzw. Wielkie Twierdzenie Fermata, które sformułował w 1637 roku Pierre de Fermat, a ostatecznie udowodnił w 1994 roku Andrew Wiles.
5. Zbiór  $\mathbb{P}$  wszystkich liczb pierwszych nie jest skończony.

Udowodnimy ostatnie z powyższych stwierdzeń metodą nie wprost. Przypuścimy, że jest tylko skończenie wiele liczb pierwszych (tj. takich liczb  $n$ , które mają dokładnie dwa dzielniki: 1 oraz  $n$ ):  $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots, p$ .

Zatem  $p$  jest (rzekomo) największą liczbą pierwszą.

Tworzymy iloczyn:  $m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \dots \cdot p$  (rzekomo) wszystkich liczb pierwszych.

Liczba  $m + 1$  jest liczbą pierwszą, ponieważ nie dzieli się bez reszty przez żadną z liczb pierwszych  $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots, p$ . Nadto,  $m + 1$  jest większa od  $p$ .

Otrzymujemy *sprzeczność*:  $m + 1$  jest liczbą pierwszą *większą* od (rzekomo) największej liczby pierwszej  $p$ . Zatem, musimy odrzucić przypuszczenie, iż liczb pierwszych jest skończenie wiele. W konsekwencji, liczb pierwszych *nie jest skończenie wiele*. Nie istnieje największa liczba pierwsza.

## 5.1 Równoliczność

Zbiory  $X$  oraz  $Y$  nazywamy *równolicznymi*, gdy istnieje bijekcja z  $X$  na  $Y$  (wtedy funkcja do niej odwrotna jest oczywiście bijekcją z  $Y$  na  $X$ ). Inaczej mówiąc, dwa zbiory są równoliczne, gdy każdemu elementowi jednego z nich możemy przyporządkować dokładnie jeden element drugiego z nich oraz wzięte pod uwagę zostają wszystkie elementy obu zbiorów.

Relacja równoliczności ograniczona do podzbiorów ustalonego uniwersum jest relacją równoważności. Tak więc, jeśli rozważamy jakieś ustalone uniwersum zbiorów  $U$ , to rodzina wszystkich klas abstrakcji relacji równoliczności na zbiorze  $\wp(U)$  jest dobrze określona. W takim przypadku każda jej klasa abstrakcji zbiera razem wszystkie podzbiory uniwersum, które nie różnią się liczbą elementów. Ten fakt cieszy: można w takim przypadku *zdefiniować* liczebność zbiorów.

Ponieważ jednak ogół *wszystkich* zbiorów sam nie jest zbiorem, więc nie możemy wykorzystać tej konstrukcji *globalnie*, dla całkiem dowolnych zbiorów. Nie oznacza to, że jesteśmy całkiem bezradni: teoria mnogości oferuje możliwości precyzyjnej charakterystyki liczebności (zwanej też *mocą*) zbiorów.

PRZYKŁADY.

1. Regulacje prawne w Rzeczpospolitej Polskiej wykluczają bigamię. A zatem zbiór wszystkich zamężnych (w sensie Konstytucji RP) obywaterek RP jest równoliczny ze zbiorem wszystkich żonatych (w sensie Konstytucji RP) obywateli RP.
2. Zbiór pusty nie jest równoliczny z żadnym zbiorem niepustym.
3. Zbiór wszystkich liczb parzystych jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych. Funkcja  $f(n) = 2n$  jest bijekcją ze zbioru  $\mathbb{N}$  na zbiór wszystkich liczb parzystych.
4. Zbiór  $\{1, 2, 3\}$  nie jest równoliczny ze zbiorem  $\wp(\{1, 2, 3\})$ . Za chwilę zobaczymy, że *żaden* zbiór nie jest równoliczny z rodziną swoich podzbiorów.

5. Każde dwa przedziały domknięte (długości dodatniej) w zbiorze liczb rzeczywistych są równoliczne. Niech  $a < b$  oraz  $c < d$ . Bijekcją między przedziałami  $[a, b]$  oraz  $[c, d]$  jest funkcja określona dla  $x \in [a, b]$  następująco:

$$f(x) = \frac{(d - c)x + bc - ad}{b - a}.$$

6. Przedział otwarty  $(0, 1)$  jest równoliczny ze zbiorem  $\mathbb{R}_+$ . Równoliczność tę ustala np. bijekcja określona dla  $x \in (0, 1)$  następująco:

$$f(x) = \frac{x}{1 - x}.$$

Relacja równoliczności w przypadku zbiorów skończonych nie nastęrcza trudności pojęciowych. Jednak fakt, że pewne zbiory są równoliczne ze swoimi podzbiarami właściwymi długo uważany był za paradoksalny: zwracali na to uwagę m.in. Proklos, Galileusz, Bolzano. Poradzimy sobie z tym paradoksem. Nie potrafimy sobie odmówić zacytowania wiersza Cypriana Kamila Norwida *Fatum*, jako że myśl w nim zawarta wiąże się poniekąd z postępowaniem matematyków, gdy napotkają trudności pojęciowe:

Jak dziki zwierz, przyszło *nieszczęście* do człowieka

I zatopiło weń fatalne oczy. . .

– Czeka – –

– Czy człowiek zboczy?

Lecz on odejrzał mu, jak gdy artysta

Mierzy swojego kształt modelu;

I spostrzegło, że on patrzy, co skorzysta

Na swym nieprzyjacielu? –

I zachwiało się całą postaci wagą

– – I nie ma go!

Poradzimy sobie również z odpowiedzią na inne niepokojące pytanie: a może *wszystkie* zbiory, które nie są skończone są między sobą równoliczne? Odpowiedź jest negatywna. Fakt ten ma fundamentalne znaczenie dla matematyki.

Georg Cantor napisał: *Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit* (istota matematyki leży w jej wolności). Rozważanie zbiorów nieskończonych jako ukończonych całości (co pozwala m.in. dokonywać na takich zbiorach różnych operacji) jest jednym z przejawów owej wolności matematyki. Będziemy jeszcze wielokrotnie mieli podczas tego kursu okazję przekonać się, jak owa swoboda tworzenia abstrakcyjnych pojęć matematyki poświadcza kreatywność umysłu.

## 5.2 Zbiory nieskończone

Jest sporo możliwości zdefiniowania zbiorów nieskończonych (definicje takie podali np.: Gottlob Frege, Ernst Zermelo, John von Neumann, Alfred Tarski). Wybieramy propozycję podaną przez Richarda Dedekinda. Jest ona w gruncie rzeczy niezwykle pomysłowym rozwiązaniem wspomnianego wyżej faktu, uważanego za paradoksalny.

*Definicja Dedekinda.* Zbiór jest *nieskończony*, gdy jest równoliczny z jakimś swoim podzbiorem właściwym. W przeciwnym przypadku jest *skończony*.

PRZYKŁADY.

1. Zbiór pusty jest skończony w sensie tej definicji.
2. Zbiór  $\{1, 2, 3\}$  jest skończony w sensie tej definicji.
3. Zbiór  $\mathbb{N}$  jest nieskończony w sensie tej definicji, albowiem jest równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym: zbiorem wszystkich liczb parzystych.
4. Zbiór  $\mathbb{Z}$  wszystkich liczb całkowitych jest nieskończony w sensie tej definicji, albowiem jest równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym  $\mathbb{N}$ . Stosowną bijekcję  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  otrzymujemy np. definiując:  $f(n) = \frac{n}{2}$  dla  $n$  parzystych oraz  $f(n) = -\frac{n+1}{2}$  dla  $n$  nieparzystych.

## 5.3 Zbiory przeliczalne

Zbiory, które są równoliczne ze zbiorem  $\mathbb{N}$  wszystkich liczb naturalnych nazywamy *przeliczalnymi* (czasem: *przeliczalnie nieskończonymi*). Jeśli zbiór jest skończony lub przeliczalny, to mawia się, że jest *co najwyżej przeliczalny*.

PRZYKŁADY.

1. Zbiór wszystkich liczb parzystych jest przeliczalny. Funkcja  $f(n) = 2n$  jest bijekcją ze zbioru  $\mathbb{N}$  na zbiór wszystkich liczb parzystych.
2. Zbiór wszystkich liczb wymiernih jest przeliczalny. Jedną z bijekcji między zbiorami  $\mathbb{Q}$  oraz  $\mathbb{N}$  jest wyznaczona przez *funkcję pary Cantora*. Pamiętajmy ze szkoły, że liczbę wymierną rozumieć możemy jako parę liczb całkowitych: licznik oraz mianownik ułamka (przy zastrzeżeniu, że mianownik nie jest zerem). Najpierw podamy bijekcję między zbiorem wszystkich par liczb naturalnych (czyli reprezentacji nieujemnych liczb wymiernih) a zbiorem wszystkich liczb naturalnych:

$$f(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m.$$

Jako wdzięczne zadanie proponujemy słuchaczom przyjrzenie się kilku początkowym wartościom tej funkcji, sporządzając stosowny wykres. Ustawiliśmy zatem wszystkie nieujemne liczby wymierne w jeden ciąg nieskończony  $q_0, q_1, q_2, \dots$ . Zmieniając znak każdego wyrazu tego ciągu na przeciwny otrzymujemy ciąg wszystkich ujemnych liczb wymiernych. Wystarczy teraz z obu tych ciągów utworzyć jeden różnowartościowy ciąg, złożony na miejscach parzystych z wymiernych liczb nieujemnych, a na miejscach nieparzystych z wymiernych liczb ujemnych. Ponieważ wyrazy tego ciągu są numerowane wszystkimi liczbami naturalnymi i wyrazy te wyczerpują wszystkie liczby wymierne, więc uzyskaliśmy bijekcję między zbiorami  $\mathbb{N}$  oraz  $\mathbb{Q}$ .

3. Zbiór  $\mathbb{R}$  wszystkich liczb rzeczywistych nie jest ani skończony ani przeliczalny. Za chwilę poznamy jedną z metod, aby to udowodnić.

## 5.4 Twierdzenie Cantora

Korzystaliśmy już z faktu, że jeśli zbiór  $X$  ma  $n$  elementów, to rodzina  $\wp(X)$  wszystkich jego podzbiorów ma  $2^n$  elementów. Jak jednak wygląda sytuacja w przypadku rodziny wszystkich podzbiorów zbioru nieskończonego?

**Twierdzenie Cantora.** *Żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów.*

**Dowód.** Przeprowadzimy dowód nie wprost. Weźmy dowolny zbiór  $X$  i przypuśćmy, że  $X$  jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów  $\wp(X)$ . Oznacza to, iż istnieje bijekcja  $f$  ze zbioru  $X$  na zbiór  $\wp(X)$ . Określmy następujący element rodziny  $\wp(X)$ :

$$X_f = \{x \in X : x \notin f(x)\}.$$

Wtedy dla pewnego  $x_f \in X$  musiałyby być:  $f(x_f) = X_f$ . Stąd i z definicji zbioru  $X_f$  otrzymujemy, iż:  $x_f \in X_f$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x_f \notin X_f$ , a to jest *sprzeczność*. Musimy zatem odrzucić przypuszczenie o istnieniu funkcji  $f$ . W konsekwencji,  $X$  oraz  $\wp(X)$  nie są równoliczne.

Jednym z wniosków z tego twierdzenia jest to, że zbiór  $\mathbb{N}$  nie jest równoliczny ze swoim zbiorem potęgowym  $\wp(\mathbb{N})$ . Oznacza to, że nie można ponumerować w sposób wzajemnie jednoznaczny liczbami naturalnymi wszystkich zbiorów liczb naturalnych.

Innym wnioskiem jest oczywiście to, że jeśli utworzymy nieskończony ciąg zbiorów:

$$(\mathbb{N}, \wp(\mathbb{N}), \wp(\wp(\mathbb{N})), \wp(\wp(\wp(\mathbb{N}))), \dots),$$

to żadne dwa wyrazy tego ciągu nie będą równoliczne.

## 5.5 Zbiory nieprzeliczalne

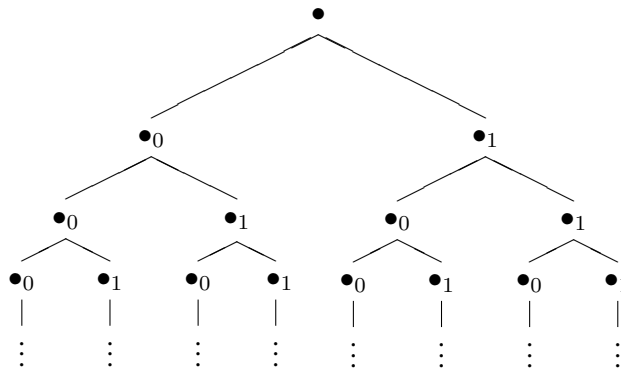
Zbiór jest *nieprzeliczalny*, jeśli jest nieskończony (w sensie definicji Dedekinda), ale nie jest przeliczalny.

Wykazywanie, że jakiś zbiór nieskończony  $X$  jest nieprzeliczalny wymaga pokazania, że żaden zbiór par uporządkowanych nie jest bijekcją z  $X$  na zbiór wszystkich liczb naturalnych. Wymagałoby to więc – w przypadku dowodów wprost – „przejrzenia” uniwersum wszystkich zbiorów (które samo nie jest zbiorem). Nieprzeliczalności zbiorów dowodzi się raczej metodą nie wprost, przypuszczając, że taka bijekcja istnieje i dochodząc do sprzeczności.

PRZYKŁADY.

1. Na mocy twierdzenia Cantora, zbiór  $\wp(\mathbb{N})$  jest nieprzeliczalny, ponieważ nie jest skończony.
2. Zbiór wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach będących liczbami naturalnymi jest nieprzeliczalny.
3. Zbiór wszystkich nieskończonych ciągów zero-jedynkowych (czyli o wyrazach będących 0 lub 1) jest nieprzeliczalny.
4. Zbiór  $\mathbb{R}$  wszystkich liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny. Za chwilę podamy stosowną argumentację.
5. Zbiór  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  jest nieprzeliczalny.
6. Dowolny przedział o długości dodatniej liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny.

Udowodnimy, dla przykładu, że zbiór wszystkich nieskończonych ciągów zero-jedynkowych (czyli o wyrazach będących 0 lub 1) jest nieprzeliczalny. Wygodnie będzie przy tym wyobrazić sobie następującą reprezentację geometryczną tego zbioru w postaci tzw. *pełnego drzewa dwójkowego*:



Wszystkie nieskończone ciągi zero-jedynkowe są reprezentowane przez *gałęzie* tego drzewa: nieskończone ścieżki, które rozpoczynają się pod (najwyżej położonym *korzeniem* tego drzewa). Dokładniej zbadamy ten obiekt nieco później, na wykładzie poświęconym relacjom porządkującym.

Dowód nieprzeliczalności zbioru wszystkich nieskończonych ciągów zero-jedynkowych polegać będzie na pokazaniu, że nie można ustawić w jeden ciąg nieskończony (numerowany liczbami naturalnymi) wszystkich gałęzi tego drzewa. Rozwiązanie wykorzystuje *metodę przekątniową* Cantora. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że można wszystkie gałęzie nieskończonego drzewa dwójkowego ponumerować liczbami naturalnymi. Niech to wyliczenie ma postać następującą (każda  $a_i^j$  jest zerem lub jedynką):

1.  $g_1 = a_1^1 a_1^2 a_1^3 \dots$

2.  $g_2 = a_2^1 a_2^2 a_2^3 \dots$

3.  $g_3 = a_3^1 a_3^2 a_3^3 \dots$

4. itd.

Rozważmy ciąg  $G = b_1 b_2 b_3 \dots$ , gdzie:

1. jeśli  $a_n^n = 0$ , to  $b_n = 1$

2. jeśli  $a_n^n = 1$ , to  $b_n = 0$ .

Wtedy ciąg  $G$  różni się od *każdego* z ciągów  $g_n$  (co najmniej na  $n$ -tym miejscu). Tak więc, jakkolwiek chcielibyśmy ponumerować wszystkie gałęzie pełnego drzewa dwójkowego liczbami naturalnymi, to zawsze pozostaną gałęzie, dla których numerów nie starczy.

Zauważmy, że nasze przypuszczenie dotyczyło *dowolnego* sposobu numerowania wszystkich gałęzi drzewa dwójkowego liczbami naturalnymi. Powyższy wynik oznacza zatem, że taka (wyczerpująca wszystkie gałęzie) numeracja jest niemożliwa. Tak więc wszystkich gałęzi tego drzewa nie można ustawić w ciąg uporządkowany tak, jak wszystkie liczby naturalne.

W podobny sposób dowodzi się, że zbiór wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach będących liczbami naturalnymi nie większymi od 9 jest nieprzeliczalny. Pamiętając teraz, że rozwinięcia dziesiętne liczb rzeczywistych można interpretować jako takie właśnie ciągi, otrzymujemy wniosek głoszący, że zbiór wszystkich liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny. Jak zakładaliśmy na początku tych wykładów, słuchacze rozumieją liczby rzeczywiste po części na sposób intuicyjny (co

na razie wystarcza). Precyzyjne konstrukcje liczb rzeczywistych podane zostaną w dalszych wykładach.

Zbiory, które są równoliczne ze zbiorem  $\mathbb{R}$  wszystkich liczb rzeczywistych nazywa się zbiorami *mocy kontinuum*. Można udowodnić, że zbiorami mocy kontinuum są m.in.:

1. Zbiór  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , zbiór  $\mathbb{R}^3$ , ogólnie: każdy zbiór  $\mathbb{R}^n$ , dla  $n \geq 1$ . Gdy Georg Cantor udowodnił, że zbiory  $\mathbb{R}$  oraz  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  są równoliczne (czyli oba są zbiorami mocy kontinuum), napisał o tym dowodzie w liście do Richarda Dedekinda: *Je le vois, mais je ne le crois pas* (widzę to, ale w to nie wierzę). Intuicje mogą podpowiadać, że punktów płaszczyzny jest *więcej* niż punktów na prostej, ale dowód przesądza sprawę. Matematycy akceptują poprawność dowodu równoliczności  $\mathbb{R}$  oraz  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Mamy tu do czynienia z sytuacją, gdy pewne – dotąd niejasne – przekonania intuicyjne zostają zastąpione precyzyjnym twierdzeniem, które kształtuje nowe intuicje matematyczne.

Jako wyzwanie intelektualne dla słuchaczy proponujemy zastanowienie się, jak można byłoby udowodnić, że zbiory  $\mathbb{R}$  oraz  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  są równoliczne. Wskazówka: rozważ rozwinięcia dziesiętne liczb rzeczywistych.

2. Każdy przedział domknięty  $[a, b]$  o długości dodatniej w zbiorze  $\mathbb{R}$ .
3. Każdy przedział otwarty  $(a, b)$  o długości dodatniej w zbiorze  $\mathbb{R}$ .
4. Każdy produkt kartezyjski  $[0, 1]^n$  domkniętego przedziału o długości 1, dla dowolnej  $n \geq 1$  (czyli każda *jednostkowa kostka  $n$ -wymiarowa*).

Ponieważ twory geometryczne (na prostej, płaszczyźnie oraz w przestrzeni) reprezentujemy z wykorzystaniem zbioru liczb rzeczywistych oraz jego podzbiorów, otrzymujemy również twierdzenia dotyczące przeliczalności lub nieprzeliczalności tworów geometrycznych, rozumianych jako zbiory punktów.

W celu ustalania równoliczności zbiorów punktów odpowiadających twórcom geometrycznym wykorzystywać można także fakt, że pewne przekształcenia geometryczne są bijekcjami (np. izometrie lub podobieństwa). W ten sposób można pokazać m.in., że:

1. Każde dwa odcinki są równoliczne.
2. Każde dwa okręgi są równoliczne.
3. Każde dwa koła domknięte są równoliczne.
4. Każde dwa koła otwarte są równoliczne.



## 6 Funkcje znane ze szkoły

Wyliczmy, bez wdawania się w szczegóły, niektóre funkcje, które znane są słuchaczom ze szkoły. Będziemy z nich wielokrotnie korzystać w dalszych wykładach.

1. Podstawowe działania arytmetyczne: dodawanie, mnożenie, odejmowanie, dzielenie.
2. Dalsze operacje: potęgowanie, pierwiastkowanie, funkcja wykładnicza, funkcja logarytmiczna.
3. Funkcje wielomianowe jednej zmiennej. W szczególności: funkcja liniowa oraz funkcja kwadratowa.
4. Funkcje wymierne. Funkcja homograficzna.
5. Funkcje trygonometryczne: sinus, cosinus, tangens, cotangens.

Zachęcamy słuchaczy do przypomnienia sobie definicji wymienionych rodzajów funkcji. Jesteśmy przekonani, że może dostarczyć to wielu pozytywnych emocji, wynikających z uświadomienia sobie, że aż tyle potrafiliśmy zapamiętać z edukacji szkolnej.

## 7 Zachęta do refleksji

1. Czy każda funkcja ma jakiś opis językowy?
2. Czy można sporządzić wykres dowolnej funkcji?
3. Co to znaczy, że jedna funkcja rośnie szybciej od drugiej?
4. Ze szkoły znasz funkcję *silnia*, zdefiniowaną dla liczb naturalnych. Czy istnieje podobna do niej funkcja dla liczb rzeczywistych?
5. Przypuśćmy, że Wszechświat jest skończony. Jaki jest wtedy sens mówienia o zbiorach nieskończonych?

## 8 Podsumowanie

To, co należy zapamiętać z niniejszego wykładu:

1. Definicja funkcji, argument i wartość funkcji, jej dziedzina i przeciwdziedzina, obrazy i przeciwobrazy zbiorów względem funkcji.

2. Iniekcje, surjekcje, bijekcje.
3. Złożenie funkcji, funkcja odwrotna, obcięcie funkcji, funkcja charakterystyczna zbioru.
4. Wykres funkcji (zmiennej rzeczywistej).
5. Równoliczność zbiorów.
6. Zbiory nieskończone (w sensie Dedekinda).
7. Twierdzenie Cantora.
8. Zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne.
9. Zbiory mocy kontinuum.

## 9 Wybrane pozycje bibliograficzne

- Guzicki, W., Zakrzewski, P. 2005. *Wykłady ze wstępu do matematyki. Wprowadzenie do teorii mnogości*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Ławrow, A.I., Maksimowa, L.L. 2004. *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Marek, W., Onyszkiewicz, J. 2004. *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.