Wstęp do Matematyki (dod. 1)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Aksjomaty teorii mnogości

O teoriach aksjomatycznych będziemy mówić w drugim semestrze. Tu podamy jedynie sformułowanie aksjomatów dla *teorii mnogości Zermelo-Fraenkla*.

- Używanym językiem jest język klasycznego rachunku predykatów z identycznością i jedną stałą pozalogiczną: dwuargumentowym predykatem $\in$.
- Przypominamy, że $\forall$ jest symbolem *kwantyfikatora ogólnego*, a $\exists$ symbolem kwantyfikatora szczegółowego.
- Spójniki prawdziwościowe klasycznego rachunku zdań zostały omówione na zajęciach z Logiki Matematycznej.

Aksjomatyka teorii mnogości ZF

Aksjomat ekstensjonalności:

$\forall x \forall y \, (\forall z \, (z \in x \equiv z \in y) \rightarrow x = y)$

Ten aksjomat stwierdza, że każdy zbiór jest jednoznacznie wyznaczony poprzez swoje elementy.

Aksjomat pary:

$\forall x \forall y \exists z \forall u \, (u \in z \equiv (u = x \vee u = y))$

To aksjomat gwarantujący istnienie pary nieuporządkowanej.

Aksjomat sumy:

$\forall x \exists y \forall z \, (z \in y \equiv \exists u \, (z \in u \wedge u \in x))$

Aksjomat ten gwarantuje istnienie sumy dowolnej rodziny zbiorów.

Aksjomat zbioru potęgowego:

$\forall x \exists y \forall z \, (z \in y \equiv \forall u (u \in z \rightarrow u \in x))$

Na mocy tego aksjomatu, dla dowolnego zbioru istnieje zbiór złożony dokładnie ze wszystkich jego podzbiorów.

Schemat wyróżniania:

$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \forall y \exists z \forall u \, (u \in z \equiv (u \in y \wedge \varphi(u, x_1, x_2, \ldots, x_n)))$
gdzie φ jest formułą języka teorii mnogości ZF taką, że z nie jest zmienną wolną w φ, zaś $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są zmiennymi wolnymi formuły φ innymi niż u.

Schemat wyróżniania pozwala z elementów danego wprzódy zbioru utworzyć jego podzbiór, złożony z tych elementów, które mają jakąś własność, wyrażalną w języku (pierwszego rzędu) teorii mnogości.

Mamy tu do czynienia nie z jednym aksjomatem, ale właśnie ze schematem nieskończenie wielu aksjomatów.

Aksjomat nieskończoności:

$\exists x \, (\exists y \, (y \in x \wedge \neg \exists z \, (z \in y)) \wedge \forall y \, (y \in x \rightarrow \forall z (\forall u \, (u \in z \equiv u = y) \rightarrow z \in x)))$

Ten aksjomat stwierdza istnienie (co najmniej jednego) zbioru nieskończonego. Uwaga: to jedyny aksjomat egzystencjalny w tej teorii mnogości.

Schemat zastępowania:

$\forall u(\forall x \forall y \forall z\,(x \in u \wedge \varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \rightarrow y = z) \rightarrow \exists w \forall v\,(v \in w \equiv \exists x\,(x \in u \wedge \varphi(x,v))))$

Schemat ten gwarantuje, intuicyjnie mówiąc, że obraz dowolnego zbioru względem jakiejkolwiek funkcji (opisywalnej formułą języka teorii mnogości) także jest zbiorem.

Tu również mamy do czynienia nie z jednym aksjomatem, ale ze schematem nieskończenie wielu aksjomatów.

Aksjomat ufundowania:

$\forall x(\exists u\,(u \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \forall z\,(z \in y \rightarrow \neg z \in x)))$

Aksjomat ufundowania wyklucza istnienie nieskończonych $\in$-zstępujących ciągów zbiorów, tj. takich ciągów $\langle x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots \rangle$, że:

$$x_2 \in x_1,\ x_3 \in x_2,\ x_4 \in x_3, \ldots$$

Gdy do tego systemu dołączyć **Aksjomat wyboru**:
$\forall x((\forall y\,(y \in x \rightarrow \exists z\,(z \in y)) \wedge \forall y \forall u\,((y \in x \wedge u \in x) \rightarrow y = u \vee \neg \exists v\,(v \in y \wedge v \in u))) \rightarrow \exists w(\forall y\,(y \in x \rightarrow \exists z\,((z \in y \wedge z \in w) \wedge \forall v\,((v \in y \wedge v \in w) \rightarrow v = z)))))$
To otrzymamy system teorii mnogości nazywany **ZFC**.

Uwaga. Do aksjomatyki teorii ZF należą także **aksjomaty dla identyczności**:

- $\forall x\,(x = x)$
- $\forall x \forall y\,(x = y \rightarrow y = x)$
- $\forall x \forall y \forall z\,((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$;
- $\forall x \forall y \forall z\,((x = y \wedge x \in z) \rightarrow y \in z)$;
- $\forall x \forall y \forall z\,((x = y \wedge z \in x) \rightarrow z \in y)$.

Uwaga. Używane tu (np. w schematach wyróżniania i zastępowania) terminy: nieskończony i przeliczalny należą do metajęzyka.