MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

# WYKŁAD 2: RACHUNEK RELACJI

KOGNITYWISTYKA UAM, 2016–2017

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Przedmiotem badań matematycznych są zbiory wyposażone w pewne struktury. Badane uniwersa składają się z elementów powiązanych jakimiś zależnościami. Formalnym odpowiednikiem tego typu pojęć jak *zależność*, *związek*, *stosunek* jest pojęcie *relacji*. Relacje mają ustalone liczby swoich *argumentów*. Dla przykładu, relacja *mniejszości* lub relacja *podzielności* to zależności, zachodzące między dwoma elementami (dwiema liczbami). Relacja *leżenia między* to relacja łącząca trzy argumenty, zaś czteroargumentowa jest np. relacja zachodząca między punktami $a$, $b$, $c$ oraz $d$ na płaszczyźnie dokładnie wtedy, gdy odległość od $a$ do $b$ jest, powiedzmy, taka sama jak odległość od $c$ do $d$.

## 1 Dygresja filozoficzna

Jak słuchacze dowiedzą się z kursu filozofii, *ontologia* zajmuje się tym, jakie rodzaje bytów istnieją. Z kolei *epistemologia* stanowi refleksję filozoficzną nad poznaniem, o czym również będzie mowa na kursie filozofii.

Problemy filozoficzne są niezwykle zawiłe i w gruncie rzeczy z reguły nie mają ostatecznych rozwiązań: są wciąż na nowo dyskutowane i dostarczają coraz to nowych niespodzianek poznawczych.

Języki etniczne powstały o wiele wcześniej niż subtelne rozważania filozoficzne. Reprezentacje ontologiczne, które współcześnie wiążemy z językiem naturalnym są wynikiem zaawansowanej refleksji teoretycznej. Uważamy, że w języku naturalnym możemy odnosić się do wszystkiego: tego, co otacza nas w rzeczywistości fizycznej oraz tego, co należy do sfery abstraktów, z włączeniem samego języka.

Nie ma obecnie, o ile nam wiadomo, żadnej w miarę kompletnej i spójnej koncepcji ustalającej, jaka jest w szczegółach struktura odniesienia przedmiotowego języka. W każdym razie, odwołujemy się w reprezentacjach ontologicznych m.in. do:

1. *Rzeczy, przedmiotów, obiektów*.
2. *Przestrzeni, czasu, ruchu, zmiany, przyczynowości*.
3. *Cech, własności, zależności*.
4. *Stanów rzeczy, zdarzeń, procesów*.
5. *Sytuacji, faktów*.
6. *Różnego rodzaju możliwości*.
7. *Abstraktów wielu rodzajów*.

Stanowiska w ontologii oraz epistemologii mogą być skrajne lub umiarkowane. Dla przykładu, można uważać, że istnieje tylko to, co jest postrzegalne zmysłowo (zabawna skrajność). Można też uważać, że nic nie istnieje, wszystko jest ułudą (inna skrajność, także poświadczona w rozważaniach filozoficznych).

Szczęśliwie, w tym kursie nie musimy rozważać problemów filozoficznych. Przyjmiemy, że ontologię dla matematyki wyznacza teoria mnogości. Wiele uciechy dostarczą nam pytania natury epistemologicznej, dotyczące tego, *jak wyobrażamy sobie* obiekty matematyczne oraz jaki mamy do nich *dostęp poznawczy*.

# 2 Ekstensjonalne ujęcie relacji

Współcześnie powszechnie przyjęte jest traktowanie relacji na sposób *ekstensjonalny*, czyli jako pewnych zbiorów. Takie podejście jest oszczędne ontologicznie, w tym sensie, że rozważanymi bytami są jedynie zbiory i nie musimy postulować istnienia innego od zbiorów rodzaju bytów. W szczególności, *własności* również traktujemy ekstensjonalnie, jako pewne zbiory obiektów.

## 2.1 Podstawowe definicje

Z poprzedniego wykładu pamiętamy definicje pary uporządkowanej oraz produktu kartezjańskiego:

1. $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$
2. $X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ oraz } y \in Y\}$.

Mówimy, że $R$ jest *relacją* (dwuargumentową) między elementami zbiorów $X$ oraz $Y$, gdy $R \subseteq Y \times Y$, czyli gdy $R$ jest podzbiorem produktu kartezjańskiego zbiorów $X$ oraz $Y$. Dla relacji dwuargumentowych używamy zamiennie zapisu: $(x, y) \in R$ lub $xRy$ (mówimy wtedy, że relacja $R$ zachodzi między elementami $x$ oraz $y$).

Jeśli $R \subseteq X \times X$, to mówimy, że relacja $R$ jest określona w zbiorze $X$. Zbiór $X \times X$ jest *potęgą kartezjańską* zbioru $X$.

PRZYKŁADY.

1. Zbiór $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ to potęga kartezjańska zbioru $\mathbb{Z}$. Jego reprezentacją graficzną jest zbiór wszystkich *punktów kratowych* płaszczyzny (punktów o obu współrzędnych całkowitych).

2. Relacja mniejszości w zbiorze $\{1, 2, 3\}$ to zbiór par: $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.

3. Relacja podzielności (bez reszty) w zbiorze wszystkich dodatnich liczb naturalnych zdefiniowana jest następująco: $x|y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba naturalna $z$ taka, że $x \cdot z = y$. Jeśli $x|y$, to mówimy, że $x$ dzieli $y$ (lub: $y$ jest podzielna przez $x$).

4. Konstytucja Rzeczpospolitej Polskiej uznaje za *małżeństwo* stosownie zarejestrowany związek kobiety i mężczyzny, spełniających odpowiednie kryteria wieku. Jeśli $M$ to zbiór mężczyzn, zaś $K$ to zbiór kobiet, to:

   (a) Relacja *bycia mężem* (w sensie Konstytucji RP) jest podzbiorem zbioru $M \times K$.

   (b) Relacja *bycia żoną* (w sensie Konstytucji RP) jest podzbiorem zbioru $K \times M$.

   Jest to oczywiście niezwykle uproszczony sposób ujmowania związku małżeńskiego, o czym słuchacze przekonają się (radośnie lub boleśnie) w swoim Życiu Dorosłym. Z jednej strony, wiadomo, że w dwójkę łatwiej pokonywać problemy, które stwarza małżeństwo. Z drugiej strony, małżeństwo jest bytem czysto umownym, podobnie jak pieniądze czy też oceny z egzaminu.

Wprowadzamy pojęcie uporządkowanej $n$-tki obiektów ($n$-krotki). Para uporządkowana $(x_1, x_2)$ została już zdefiniowana. Trójkę uporządkowaną (o pierwszym elemencie $x_1$, drugim $x_2$ oraz trzecim $x_3$) definiujemy następująco:

$$(x_1, x_2, x_3) = ((x_1, x_2), x_3).$$

Ogólnie, $n$-tkę uporządkowaną definiujemy jako:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = ((x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}), x_n).$$

Produkt kartezjański zbiorów $X_1, X_2, \ldots, X_n$ definiujemy następująco:

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n =$$

$$= \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) : x_i \in X_i \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Produkt kartezjański $X \times X \times \ldots \times X$ ($n$ razy) oznaczamy $X^n$ i nazywamy $n$-tą potęgą kartezjańską zbioru $X$.

PRZYKŁADY.

1. Zbiór $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}$ oraz $y \in \mathbb{R}\}$ to potęga kartezjańska $\mathbb{R}^2$ zbioru $\mathbb{R}$.

2. Zbiór $\{0, 1\}^3$, czyli trzecia potęga kartezjańska zbioru $\{0, 1\}$ to zbiór wszystkich trójek uporządkowanych $(x, y, z)$, gdzie $x, y, z \in \{0, 1\}$. Masz jakieś wyobrażenia geometryczne związane z tym zbiorem?

3. W kulturze rosyjskiej używa się imienia, otczestwa (imienia ojca) oraz nazwiska, np.: Aleksandr Siergiejewicz Puszkin. Wszelkie możliwe takie trójelementowe układy należą zatem do produktu kartezjańskiego: zbiór imion razy zbiór otczestw razy zbiór nazwisk.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą dowolnymi zbiorami. Relacją $n$-argumentową między elementami tych zbiorów nazywamy dowolny podzbiór produktu kartezjańskiego $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.

Relacje *jednoargumentowe* to podzbiory uniwersum. Relacje *zeroargumentowe* to elementy uniwersum.

PRZYKŁADY.

1. „Być liczbą parzystą” to przykład relacji jednoargumentowej w zbiorze $\mathbb{N}$ wszystkich liczb naturalnych. Ta relacja to po prostu zbiór wszystkich liczb parzystych.

2. Trójargumentowa relacja $\{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}$ oraz $x < y < z\}$ zachodzi między liczbami rzeczywistymi $x$, $y$ oraz $z$, gdy $y$ leży między (w sensie relacji mniejszości) liczbami $x$ oraz $z$.

3. *Zdrada*. W potocznym rozumieniu, zdrada jest relacją trójargumentową: osoba $x$ zdradza osobę $y$ z osobą $z$.

Definiujemy kilka pojęć związanych z dowolną relacją $R \subseteq X \times Y$:

1. *R-następnik*. Dla $x \in X$ niech $R(x) = \{y \in Y : xRy\}$. Zbiór $R(x)$ to zbiór wszystkich $R$*-następników* elementu $x \in X$.

2. *R-poprzednik*. Dla $y \in Y$ niech $R^{-1}(y) = \{x \in X : xRy\}$. Zbiór $R^{-1}(y)$ to zbiór wszystkich $R$*-poprzedników* elementu $y \in Y$.

3. *Dziedzina*. $dom(R) = \{x \in X : xRy$ dla pewnego $y \in Y\}$. Zbiór $dom(R)$ nazywamy *dziedziną* relacji $R$ (inny termin: *dziedzina lewostronna*).

4. *Przeciwdziedzina*. $rng(R) = \{y \in Y : xRy$ dla pewnego $x \in X\}$. Zbiór $rng(R)$ nazywamy *przeciwdziedziną* relacji $R$ (inny termin: *dziedzina prawostronna*).

5. *Pole*. Sumę dziedziny i przeciwdziedziny relacji $R$ nazywamy *polem* relacji $R$ i oznaczamy przez $fld(R)$: $fld(R) = dom(R) \cup rng(R)$.

6. *Obraz zbioru względem relacji*. Niech $A \subseteq X$. *Obrazem* zbioru $A$ względem relacji $R$ jest zbiór:

   $R[A] = \{y \in Y : xRy$ dla pewnego $x \in A\}$.

7. *Przeciwobraz zbioru względem relacji*. Niech $B \subseteq Y$. *Przeciwobrazem* zbioru $B$ względem relacji $R$ jest zbiór:

   $R^{-1}[B] = \{x \in X : xRy$ dla pewnego $y \in B\}$.

Jeśli $R \subseteq X \times Y$ oraz $S \subseteq X \times Y$, to mówimy, że:

1. Relacja $R$ jest *podrelacją* relacji $S$, gdy $R \subseteq S$.

2. Relacje $R$ i $S$ są *rozłączne*, gdy $R \cap S = \emptyset$.

Relacja *pusta* to relacja, która nie zachodzi między żadnymi elementami (ustalonego zbioru). Relacja *pełna* na zbiorze $X$, to relacja, która zachodzi między każdymi dwoma (różnymi lub nie) elementami zbioru $X$. Tak więc, relacja pełna na $X$ to po prostu $X \times X$. Relacja pusta to oczywiście zbiór $\emptyset$.

Jeśli zbiór $X$ ma $n$ elementów, to zbiór $X \times X$ ma $n^2$ elementów. Rodzina wszystkich podzbiorów zbioru $X \times X$ ma zatem $2^{n^2}$ elementów. Na zbiorze $n$-elementowym istnieje zatem $2^{n^2}$ różnych relacji.

PRZYKŁADY.

1. Rozważmy relację podzielności w zbiorze wszystkich dodatnich liczb naturalnych. Poprzednikiem liczby $x$ względem tej relacji jest każdy dzielnik liczby $x$. Następnikiem liczby $x$ względem tej relacji jest każda wielokrotność liczby $x$.

2. Rozważmy relację $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 1\}$. Dziedziną tej relacji jest $\mathbb{R} - \{0\}$. Jej przeciwdziedziną również jest $\mathbb{R} - \{0\}$. W konsekwencji, jest to także jej pole.

3. Rozważmy relację *bycia mężem* (w sensie Konstytucji RP), rozumianą jako podzbiór produktu kartezjańskiego $M \times K$, gdzie $K$ to zbiór kobiet, a $M$ to zbiór mężczyzn. Jej dziedziną jest zbiór wszystkich żonatych, a jej przeciwdziedziną jest zbiór wszystkich zamężnych. Jej polem jest zbiór wszystkich osób pozostających w związku małżeńskim (w sensie Konstytucji RP).

4. Rozważmy relację podzielności w zbiorze wszystkich dodatnich liczb naturalnych oraz zbiór $\{2, 3, 5\}$. Jego obrazem względem tej relacji jest zbiór tych wszystkich dodatnich liczb naturalnych, które są podzielne przez co najmniej jedną z liczb: 2, 3, 5.

5. Rozważmy relację podzielności w zbiorze wszystkich dodatnich liczb naturalnych oraz zbiór $\{12, 13, 15\}$. Jego przeciwobrazem względem tej relacji jest zbiór tych wszystkich dodatnich liczb naturalnych, które dzielą bez reszty co najmniej jedną z liczb: 12, 13, 15, a więc zbiór:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 13, 15\}.$$

6. Relacja $<$ jest podrelacją relacji $\leqslant$ na zbiorze $\mathbb{N}$.

7. Relacje $<$ oraz $>$ na zbiorze $\mathbb{R}$ są rozłączne. Nie są rozłączne relacje $\leqslant$ oraz $\geqslant$ na tym zbiorze, ponieważ ich część wspólna to relacja identyczności.

8. Na zbiorze $\{1, 2, 3\}$ istnieje $2^{3^2}$, czyli $2^9$ relacji. Ponieważ $2^9 = 512$, więc na zbiorze $\{1, 2, 3\}$ istnieje $512$ relacji.

## 2.2 Sposoby reprezentacji

Relacje możemy reprezentować graficznie. Popularne sposoby reprezentacji to:

1. *Grafy*. Każdej relacji $R \subseteq X \times Y$ odpowiada *graf*: jego *wierzchołkami* są elementy zbiorów $X$ oraz $Y$, połączone *krawędzią* są te elementy $x$ oraz $y$, dla których zachodzi $xRy$. Mówimy przy tym o krawędziach *zorientowanych* (rysowanych np. w postaci strzałek), bowiem ważna jest kolejność argumentów relacji.

2. *Macierze*. Dla skończonych zbiorów $X$ oraz $Y$ wyliczamy elementy zbioru $X$ w wierszach, a elementy zbioru $Y$ w kolumnach. Jeśli relacja $R \subseteq X \times Y$

zachodzi dla pary $(x, y)$, to na przecięciu wiersza odpowiadającego $x$ oraz kolumny odpowiadającej $y$ umieszczamy 1, w przeciwnym przypadku na tym miejscu umieszczamy 0.

3. *Reprezentacje geometryczne*. Relacje $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reprezentujemy jako podzbiory płaszczyzny kartezjańskiej $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

PRZYKŁADY.

1. Narysujemy na tablicy graf relacji podzielności w zbiorze $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
2. Narysujemy na tablicy graf relacji inkluzji właściwej w zbiorze potęgowym zbioru $\{1, 2, 3\}$.
3. Narysujemy na tablicy graf relacji $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x^2\}$. Ponieważ jest to zbiór nieskończony, więc w istocie narysujemy jedynie jego fragment.

Narysujemy macierze reprezentujące relacje:
PRZYKŁADY.

1. Macierz dla relacji mniejszości w zbiorze $\{1, 2, 3\}$:

| $<$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 0 |

2. Macierz dla relacji inkluzji właściwej w rodzinie podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3\}$:

| $\subset$ | $\emptyset$ | $\{1\}$ | $\{2\}$ | $\{3\}$ | $\{1,2\}$ | $\{1,3\}$ | $\{2,3\}$ | $\{1,2,3\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\emptyset$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\{1\}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $\{2\}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $\{3\}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $\{1,2\}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $\{1,3\}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $\{2,3\}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $\{1,2,3\}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

3. Macierz relacji identyczności na zbiorze $\{1, 2, 3\}$:

| = | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 |

# 3 Własności relacji dwuargumentowych

Interesują nas sytuacje, w których z faktu zachodzenia danej relacji między ustalonymi obiektami możemy wywnioskować jej zachodzenie (bądź nie) między innymi obiektami.

## 3.1 Lista wybranych własności

Niech $R$ będzie relacją dwuargumentową na zbiorze $X$, czyli $R \subseteq X \times X$.

### 3.1.1 Zwrotność i przeciwzwrotność

Relacja $R$ jest *zwrotna*, gdy $xRx$ dla wszystkich $x \in X$.

Relacja $R$ jest *przeciwzwrotna*, gdy $xRx$ nie zachodzi dla żadnego $x \in X$.

PRZYKŁADY.

1. Relacja $\leqslant$ jest zwrotna w zbiorze $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych.
2. Relacja $<$ jest przeciwzwrotna w zbiorze $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych.
3. Istnieją relacje, które nie są ani zwrotne ani przeciwzwrotne, np: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$.

### 3.1.2 Symetria, asymetria, antysymetria

Relacja $R$ jest *symetryczna*, gdy dla wszystkich $x \in X$ oraz $y \in X$: jeśli $xRy$, to $yRx$.

Relacja $R$ jest *asymetryczna*, gdy dla wszystkich $x \in X$ oraz $y \in X$: jeśli $xRy$, to nie zachodzi $yRx$.

Relacja $R$ jest *antysymetryczna*, gdy dla wszystkich $x \in X$ oraz $y \in X$: jeśli $xRy$ oraz $yRx$, to $x = y$.

PRZYKŁADY.

1. Relacja rozłączności zbiorów jest symetryczna.
2. Relacja $<$ jest asymetryczna w zbiorze $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych.

3. Relacja $\leqslant$ jest antysymetryczna w zbiorze $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych.

4. Relacja inkluzji jest antysymetryczna w dowolnej rodzinie zbiorów.

5. Istnieją relacje, które nie są ani symetryczne ani asymetryczne, np.:
   $\{(1,1),(1,2),(2,1),(3,1)\}$.

### 3.1.3 Przechodniość, euklidesowość

Relacja $R$ jest *przechodnia*, gdy dla wszystkich $x \in X$, $y \in X$ oraz $z \in X$: jeśli $xRy$ oraz $yRz$, to $xRz$.

Relacja $R$ jest *euklidesowa*, gdy dla wszystkich $x \in X$, $y \in X$ oraz $z \in X$: jeśli $xRy$ oraz $xRz$, to $yRz$.
PRZYKŁADY.

1. Relacja inkluzji jest przechodnia.

2. Relacja bycia elementem nie jest przechodnia.

3. Relacja równoległości prostych na płaszczyźnie jest euklidesowa.

4. Relacja prostopadłości prostych na płaszczyźnie nie jest przechodnia i nie jest euklidesowa.

5. Relacje $<$ oraz $\leqslant$ w zbiorze $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych są przechodnie.

### 3.1.4 Spójność

Relacja $R$ jest *spójna*, gdy dla wszystkich $x \in X$ oraz $y \in X$: $x = y$ lub $xRy$ lub $yRx$. Wyrazić ten warunek można również tak: relacja $R$ jest *spójna*, gdy dla wszystkich $x \in X$ oraz $y \in X$: jeśli $x \neq y$, to $xRy$ lub $yRx$.
PRZYKŁADY.

1. Relacja $<$ jest spójna w zbiorze $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych.

2. Relacja inkluzji (w całkiem dowolnej rodzinie zbiorów) nie jest spójna.

### 3.1.5 Serialność

Relacja $R$ jest *serialna*, gdy dla każdego $x \in X$ istnieje $y \in X$ taki, że $xRy$.
PRZYKŁADY.

1. Relacja $<$ w zbiorze $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych jest serialna.
2. Relacja podzielności ($x|y$, gdy $x$ dzieli $y$) w zbiorze wszystkich dodatnich liczb naturalnych jest serialna.
3. Relacja „bycia potomkiem” (w zbiorze wszystkich ludzi) nie jest serialna.

### 3.1.6 Własności relacji a ich reprezentacje

Czy z reprezentacji własności w postaci grafów lub macierzy odczytać można własności relacji? Innymi słowy: jakie regularności w owych reprezentacjach odpowiadają poszczególnym własnościom relacji? Jest wiele takich regularności, ograniczymy się do wyliczenia kilku z nich.
PRZYKŁADY.

1. Graf relacji zwrotnej zawiera pętlę przy każdym wierzchołku.
2. Graf relacji przeciwzwrotnej nie zawiera żadnej pętli.
3. W grafie relacji symetrycznej: jeśli dwa wierzchołki są połączone zorientowaną krawędzią, to w obie strony. Tak więc, grafy relacji symetrycznych można uprościć, pomijając orientację krawędzi (i rysując jedynie krawędzie *niezorientowane*).
4. W grafie relacji asymetrycznej jeśli dwa wierzchołki są połączone zorientowaną krawędzią, to tylko w jedną stronę.
5. Macierz relacji zwrotnej ma na głównej przekątnej jedynki.
6. Macierz relacji symetrycznej jest symetryczna względem głównej przekątnej.
7. Zachęcamy słuchaczy do zastanowienia się, jakim regularnościom w reprezentacjach relacji odpowiadają pozostałe wymienione własności relacji.

UWAGA. Własności relacji są (w ekstensjonalnym ujęciu) *zbiorami* relacji. Pamiętajmy, że np. przechodniość to własność relacji, a nie relacja.

### 3.2 Zestawy własności

Relacjom mogą przysługiwać całe zestawy własności. Tak więc, relacje, które odpowiadają nieodróżnialności obiektów pod ustalonymi względami mają kilka wspólnych własności. Podobnie, relacje ustalające uszeregowania obiektów lub ustalania hierarchicznej struktury w zbiorze obiektów także mają wspólne własności. Relacjom porządkującym poświęcony jest w całości jeden z dalszych wykładów.
PRZYKŁADY.

1. Relacje, które są zwrotne i symetryczne, nazywamy relacjami *podobieństwa* (lub *tolerancji*). Podobieństwo polegać może na posiadaniu przez obiekty co najmniej jednej cechy wspólnej (z jakiegoś ustalonego inwentarza cech).

2. Relacje, które są przeciwzwrotne i symetryczne, nazywamy relacjami *opozycji*. Opozycja może polegać na różnieniu się obiektów co najmniej jedną cechą (z jakiegoś ustalonego inwentarza cech).

3. Jeśli niepusta relacja $R$ jest przechodnia, asymetryczna oraz serialna, to jej pole musi być zbiorem *nieskończonym*. Zachęcamy słuchaczy do refleksji nad tym stwierdzeniem.

## 4 Relacje równoważności

Relacje równoważności odpowiadają nieodróżnialności obiektów pod ustalonymi względami.

Niech $R$ będzie relacją dwuargumentową na zbiorze $X$, czyli $R \subseteq X \times X$. Mówimy, że $R$ jest *relacją równoważności* na zbiorze $X$, jeśli $R$ jest relacją zwrotną, symetryczną oraz przechodnią w $X$.

Jeśli $R$ jest relacją równoważności na $X$, to oznaczamy:

1. $[x]_R = R(x) = \{y \in X : xRy\}$. Zbiór $[x]_R$ nazywamy *klasą abstrakcji* (*klasą równoważności*) elementu $x \in X$ względem relacji $R$.

2. $X/R = \{[x]_R : x \in X\}$. Rodzinę $X/R$ nazywamy rodziną *klas abstrakcji* relacji $R$. Używa się również terminu *zbiór ilorazowy zbioru* $X$ *względem relacji* $R$ na oznaczenie zbioru $X/R$.

Zachodzą następujące fakty dla dowolnej relacji równoważności $R$ na zbiorze $X$:

1. Każda klasa abstrakcji relacji $R$ jest zbiorem niepustym. To wynika za zwrotności $R$.

2. Każdy element zbioru $X$ należy do jakiejś klasy abstrakcji relacji $R$ (czyli suma rodziny wszystkich klas abstrakcji relacji $R$ jest równa zbiorowi $X$). To wynika za zwrotności $R$ oraz z faktu, że każda klasa abstrakcji jest podzbiorem zbioru $X$.

3. $xRy$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[x]_R = [y]_R$.

   (a) Załóżmy bowiem, że $xRy$. Aby udowodnić, że wtedy $[x]_R = [y]_R$, zauważmy, że wystarczy (ze względu na to, iż $R$ jest symetryczna) pokazać, że $[x]_R \subseteq [y]_R$. Niech $z \in [x]_R$. Wtedy $zRx$. Ponieważ z założenia $xRy$, a więc, na mocy przechodniości relacji $R$, $zRy$, czyli $z \in [y]_R$.

   (b) Załóżmy teraz, że $[x]_R = [y]_R$. Mamy $xRx$ (zwrotność), czyli $x \in [x]_R$. Ponieważ $[x]_R = [y]_R$, więc $x \in [y]_R$, a to oznacza, że $xRy$.

4. Każde dwie różne klasy abstrakcji relacji $R$ są rozłączne. Z tego, co udowodniono przed chwilą wynika, że jeśli $[x]_R \neq [y]_R$, to nie zachodzi $xRy$. Musimy pokazać, że $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Przypuśćmy, że $z \in [x]_R \cap [y]_R$. Wtedy $xRz$ oraz $zRy$, a zatem (przechodniość $R$), także $xRy$, wbrew założeniu. Musimy więc odrzucić poczynione przypuszczenie. Ostatecznie: $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$.

Pewne relacje równoważności odgrywają fundamentalną rolę w wielu rozważaniach matematycznych. Wiele obiektów matematycznych definiujemy właśnie *przez abstrakcję* jako klasy abstrakcji stosownych relacji równoważności.
PRZYKŁADY.

1. *Relacja identyczności.* Relacja identyczności (na zbiorze $X$) to zbiór $\{(x, x) : x \in X\}$. Nazywa się ją też czasem *przekątną* zbioru $X$. Używa się dla niej oznaczeń: $=$, $id_X$, $\triangle_X$.

2. Relacja identyczności na zbiorze $X$ jest zawarta w każdej relacji równoważności na tym zbiorze. Każda relacja równoważności na zbiorze $X$ jest zawarta w relacji pełnej $X \times X$, która jest oczywiście relacją równoważności.

3. Relacja przystawania trójkątów jest relacją równoważności.

4. Relacja równoległości prostych na płaszczyźnie jest relacją równoważności. Każda jej klasa abstrakcji wyznacza zatem pewien *kierunek* na płaszczyźnie.

5. *Kongruencje*. Jak zobaczymy nieco później, szczególnie ważne są takie relacje równoważności, które – w ściśle określonym sensie – są *zgodne* z działaniami na obiektach matematycznych.

## 4.1 Równoważności a podziały

Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między relacjami równoważności, określonymi na danym zbiorze a podziałami tego zbioru.

*Podziałem* zbioru $X$ nazywamy każdą rodzinę jego niepustych podzbiorów $\mathcal{X}$ taką, że:

1. Dowolne dwa różne elementy rodziny $\mathcal{X}$ są zbiorami rozłącznymi.

2. Suma wszystkich zbiorów należących do rodziny $\mathcal{X}$ jest równa zbiorowi $X$.

PRZYKŁADY.

1. Rodzina $\{\mathbb{Q}, \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$ jest podziałem zbioru $\mathbb{R}$. Jej elementy to oczywiście: zbiór wszystkich liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ oraz zbiór wszystkich liczb niewymiernych $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

2. Rodzina $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$ jest podziałem zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Zachodzi następujący związek między relacjami równoważności na danym zbiorze a podziałami tego zbioru:

1. Niech $R$ będzie relacją równoważności na zbiorze $X$. Wtedy rodzina wszystkich jej klas abstrakcji jest podziałem zbioru $X$. Pokazaliśmy to już poprzednio.

2. Jeśli $\mathcal{X}$ jest podziałem zbioru $X$, to relacja $R_{\mathcal{X}} \subseteq X \times X$ określona następująco: $xR_{\mathcal{X}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $A \in \mathcal{X}$ taki, że $x \in A$ oraz $y \in A$ jest relacją równoważności na zbiorze $X$. Zwrotność relacji $R_{\mathcal{X}}$ wynika z tego, że wszystkie elementy podziału $\mathcal{X}$ zbioru $X$ są niepuste. Relacja $R_{\mathcal{X}}$ jest oczywiście symetryczna. Przechodniość relacji $R_{\mathcal{X}}$ wynika z faktu, że elementy podziału $\mathcal{X}$ zbioru $X$ są rozłączne.

PRZYKŁADY.

1. Rozważmy relację $\equiv_2$ określoną dla liczb całkowitych w sposób następujący: $x \equiv_2 y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x$ oraz $y$ mają takie same reszty z dzielenia przez 2. Relacja ta wyznacza podział zbioru $\mathbb{Z}$ na dokładnie dwie klasy: wszystkich całkowitych liczb parzystych oraz wszystkich całkowitych liczb nieparzystych.

2. Rozważmy teraz relację $\equiv_n$ określoną dla liczb całkowitych w sposób następujący: $x \equiv_n y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x$ oraz $y$ mają takie same reszty z dzielenia przez $n$. Czy potrafisz wskazać rodzinę wszystkich klas abstrakcji tej relacji?

3. Rozważmy relację $R$ określoną następująco dla dowolnych liczb rzeczywistych z przedziału domkniętego $[0,1]$: $xRy$ wtedy i tylko wtedy, gdy różnica $x - y$ jest liczbą wymierną. Tak określona relacja $R$ jest relacją równoważności (czy potrafisz to udowodnić?). Tak więc, wyznacza ona pewien podział zbioru $[0,1]$. Każdy zbiór, który powstaje poprzez wybranie dokładnie jednej liczby z każdej klasy abstrakcji relacji $R$ i zebranie razem tych wszystkich liczb nazywamy *zbiorem Vitalego*. Później przekonamy się, jak *dziwaczne* są zbiory Vitalego.

Jeśli $\mathcal{X}$ oraz $\mathcal{Y}$ są podziałami zbioru $X$, to ich *skrzyżowaniem* nazywamy rodzinę $\mathcal{Z}$ taką, że:

1. Dla dowolnych $A \in \mathcal{X}$ oraz $B \in \mathcal{Y}$ mamy: $A \cap B \in \mathcal{Z}$.

2. Dla dowolnego $C \in \mathcal{Z}$ istnieją $A \in \mathcal{X}$ oraz $B \in \mathcal{Y}$ takie, że $C = A \cap B$.

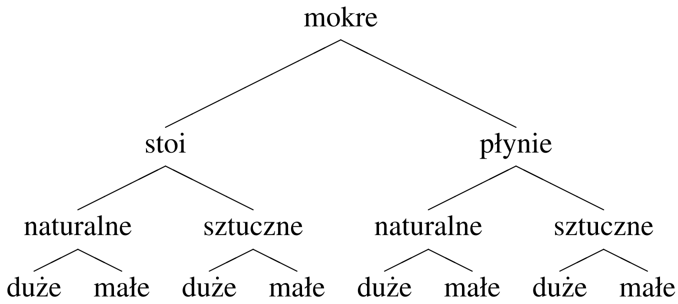
Jeśli skrzyżowanie dwóch podziałów $\mathcal{X}$ oraz $\mathcal{Y}$ zbioru $X$ jest podziałem zbioru $X$, to mówimy, że podziały $\mathcal{X}$ oraz $\mathcal{Y}$ są *niezależne*.

Rozważmy trzy podziały następujących ośmiu mokrych (wypełnionych wodą) obiektów:

| | płynie | stoi | naturalne | sztuczne | duże | małe |
|---|---|---|---|---|---|---|
| rzeka | TAK | | TAK | | TAK | |
| strumień | TAK | | TAK | | | TAK |
| kanał | TAK | | | TAK | TAK | |
| rów | TAK | | | TAK | | TAK |
| morze | | TAK | TAK | | TAK | |
| bajoro | | TAK | TAK | | | TAK |
| staw | | TAK | | TAK | TAK | |
| basen | | TAK | | TAK | | TAK |

Staw rozumiemy tutaj jako *staw hodowlany*.

Te trzy podziały reprezentować można też poprzez *drzewo*:




Każde dwa z rozważanych podziałów są niezależne. Skrzyżowanie wszystkich trzech rozważanych podziałów daje w wyniku podział, który pozwala odróżnić każde dwa z branych pod uwagę rodzajów obiektów. O podziałach oraz ich skrzyżowaniach mowa też będzie podczas kursu *Wprowadzenia do logiki*.

# 5 Operacje na relacjach

Na relacjach możemy wykonywać pewne operacje, otrzymując w wyniku nowe relacje.

## 5.1 Operacje boolowskie

Ponieważ – w ujęciu ekstensjonalnym – relacje traktujemy jako zbiory, więc stosować można do nich znane już operacje na zbiorach:

1. *Suma relacji $R$ oraz $S$*:

   $R \cup S = \{(x, y) \in X \times Y : xRy \text{ lub } xSy\}$

2. *Iloczyn (część wspólna) relacji $R$ oraz $S$*:

   $R \cap S = \{(x, y) \in X \times Y : xRy \text{ oraz } xSy\}$

3. *Różnica relacji $R$ oraz $S$*:

   $R - S = \{(x, y) \in X \times Y : xRy \text{ oraz nie zachodzi } xSy\}$

4. *Różnica symetryczna relacji $R$ oraz $S$*:

   $R \div S = (R - S) \cup (S - R) = (R \cup S) - (R \cap S)$

5. *Dopełnienie relacji $R$*: $R'$ (inne oznaczenie: $-R$):

   $R' = \{(x, y) \in X \times Y : \text{ oraz nie zachodzi } xRy\} = (X \times Y) - R$

Operacje boolowskie wykonywać można też oczywiście w przypadku, gdy $X = Y$, a więc dla relacji określonych na ustalonym zbiorze $X$.
PRZYKŁADY.

1. Suma relacji $<$ oraz relacji $=$ to relacja $\leqslant$ (powiedzmy, w zbiorze $\mathbb{R}$).
2. Iloczyn relacji $\leqslant$ oraz $\geqslant$ to relacja identyczności $=$ (powiedzmy, w zbiorze $\mathbb{R}$).
3. Różnica relacji $\leqslant$ oraz $=$ to relacja $<$ (powiedzmy, w zbiorze $\mathbb{R}$).
4. Różnica symetryczna relacji $\leqslant$ oraz $\geqslant$ w zbiorze $\mathbb{R}$ to suma relacji $<$ oraz $>$, a więc (prawo trychotomii!) dopełnienie relacji identyczności.
5. Dopełnienie relacji $<$ w zbiorze $\mathbb{R}$ to relacja $\geqslant$ w zbiorze $\mathbb{R}$.

## 5.2 Konwers i złożenie

Istnieją też operacje specyficzne dla relacji. Dwie szczególnie ważne takie operacje to konwers oraz złożenie relacji.

Niech $R$ będzie relacją dwuargumentową między elementami zbiorów $X$ oraz $Y$, czyli $R \subseteq X \times Y$.

*Relacją odwrotną* do relacji $R$ (inaczej: *konwersem* relacji $R$) nazywamy relację $R^{-1} \subseteq Y \times X$ zdefiniowaną następująco: $yR^{-1}x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $xRy$. Inne czasem używane oznaczenie dla konwersu relacji $R$ to $\breve{R}$.
PRZYKŁADY.

1. Konwersem relacji $<$ w zbiorze $\mathbb{N}$ jest relacja $>$ w zbiorze $\mathbb{N}$.
2. Konwersem relacji $\leqslant$ w zbiorze $\mathbb{R}$ jest relacja $\geqslant$ w zbiorze $\mathbb{R}$.
3. Nie należy mylić dopełnienia relacji z jej konwersem! Zauważmy, że np.:
   (a) Dopełnieniem relacji $<$ w zbiorze $\mathbb{R}$ jest relacja $\geqslant$ w zbiorze $\mathbb{R}$
   (b) Konwersem relacji $<$ w zbiorze $\mathbb{R}$ jest relacja $>$ w zbiorze $\mathbb{R}$.
4. Konwersem relacji *bycia mężem* (w sensie Konstytucji RP) jest relacja *bycia żoną* (w sensie Konstytucji RP).

Niech $R$ będzie relacją dwuargumentową między elementami zbiorów $X$ oraz $Y$, czyli $R \subseteq X \times Y$, zaś $S$ relacją dwuargumentową między elementami zbiorów $Y$ oraz $Z$, czyli $S \subseteq Y \times Z$.

*Złożeniem* relacji $R$ oraz $S$ nazywamy relację $R \circ S \subseteq X \times Z$ zdefiniowaną następująco: $xR \circ Sz$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $y \in Y$ taki, że $xRy$ oraz $ySz$.
PRZYKŁADY.

1. Rozważmy relacje $<$ oraz $>$ w zbiorze $\mathbb{Z}$ wszystkich liczb całkowitych. Kiedy zachodzi $x < \circ > y$? Z definicji złożenia relacji jest tak wtedy, gdy istnieje $z \in \mathbb{Z}$ taka, że $x < z$ oraz $z > y$. Ponieważ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Z}$ taka $z$ istnieje (np. $z = |x| + |y| + 1$), więc złożenie $< \circ >$ jest relacją pełną w $\mathbb{Z}$, czyli $< \circ > = \mathbb{Z}^2$.

2. Złożeniem relacji $<$ z relacją $<$ w zbiorze $\mathbb{Q}$ wszystkich liczb wymiernych jest relacja $<$. Mamy zatem: $< \circ <=<$.

3. Rozważmy relacje: *być żoną* (w sensie Konstytucji RP) oraz *być ojcem* (biologicznym). Co jest złożeniem tych relacji? Jeżeli osoba $x$ miałaby być w tym złożeniu relacji z osobą $y$, to musiałaby istnieć osoba $z$ taka, że:

   (a) $x$ jest żoną $z$ oraz

   (b) $z$ jest biologicznym ojcem $y$.

   Tak więc, omawiane złożenie to relacja: *być biologiczną matką lub macochą.*

## 5.3 Inne operacje

*Przechodnim domknięciem relacji* $R \subseteq X \times X$ nazywamy relację $R^{tr}$ zdefiniowaną indukcyjnie:

1. $R^1 = R$

2. $R^{n+1} = R^n \circ R$

3. $R^{tr} = \bigcup_n R^n$.

Tak więc, $xR^{tr}y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba naturalna $n \in \mathbb{N}$ oraz istnieją elementy $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$ takie, że $x_0 = x$, $x_n = y$ oraz $x_iRx_{i+1}$ dla wszystkich $0 \leqslant i < n$.

1. Relacja $R^{tr}$ jest przechodnia, dla dowolnej relacji $R$.

2. Przechodnie domknięcie relacji podobieństwa jest relacją równoważności.

Jeśli $R$ jest relacją przechodnią, to jej graf może być dość skomplikowany. W takich przypadkach stosuje się czasami pewne konwencje upraszczające, np. rysuje się graf dla relacji $R - R^2$ i dodaje uwagę, że pominięto krawędzie, istniejące na mocy przechodniości relacji $R$.

Jest jeszcze całe mnóstwo dalszych operacji na relacjach, czujemy jednak, że ich omawianie w tym momencie byłoby przesadą. Jako ciekawostkę, jedynie dla zainteresowanych, dodajmy tylko dwa przykłady.

*Złożeniem symetrycznym* relacji $R$ i $S$ nazywamy relację:

$$R \odot S = (R \circ S) \cup (S \circ R).$$

*Domknięciem sumy* relacji $R$ i $S$ nazywamy relację

$$R \oplus S = (R \cup S)^{tr}.$$

Można także definiować różnorakie operacje na relacjach $n$-argumentowych dla $n > 2$. Dociekliwi słuchacze mogą próbować zastanowić się nad tym samodzielnie.

# 6 Wybrane prawa rachunku relacji

Zachodzą następujące fakty dotyczące operacji na relacjach (najprostsze z tych praw można udowodnić na konwersatorium, pozostałe można traktować jako ozdobnik tekstu):

1. Operacja złożenia relacji jest łączna, tj.: $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$.
2. Operacja złożenia nie jest przemienna, tj. nie dla wszystkich relacji $R_1$ i $R_2$ zachodzi: $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.
3. $R \circ id_X = id_X \circ R = R$,.
4. $R \circ \emptyset = \emptyset \circ R = \emptyset$.
5. $(R^{-1})^{-1} = R$, $(R^{-1})' = (R')^{-1}$.
6. Jeśli $R \subseteq S$, to:
   (a) $R^{-1} \subseteq S^{-1}$, $R^{tr} \subseteq S^{tr}$.
   (b) $T \circ R \subseteq T \circ S$ oraz $R \circ T \subseteq S \circ T$.
7. $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.

8. $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.
9. $(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$.
10. $(R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T)$,
11. $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.
12. $(\bigcup_{i \in I} R_i) \circ Q = \bigcup_{i \in I} (R_i \circ Q)$.
13. $Q \circ (\bigcup_{i \in I} R_i) = \bigcup_{i \in I} (Q \circ R_i)$.
14. $Q \circ (\bigcap_{i \in I} R_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} (Q \circ R_i)$.
15. $(\bigcap_{i \in I} R_i) \circ Q \subseteq \bigcap_{i \in I} (R_i \circ Q)$.
16. $(\bigcup_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcup_{i \in I} R_i^{-1}$.
17. $(\bigcap_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcap_{i \in I} R_i^{-1}$.

PRZYKŁAD. Udowodnimy, dla przykładu, że: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Następujące warunki są równoważne, dla dowolnych relacji $R$ oraz $S$ oraz dowolnych $x$ i $y$:

- $x(R \circ S)^{-1}y$
- $y(R \circ S)x$
- istnieje $z$ taki, że $yRz$ oraz $zSx$
- istnieje $z$ taki, że $zSx$ oraz $yRz$
- istnieje $z$ taki, że $xS^{-1}z$ oraz $zS^{-1}y)$
- $x(S^{-1} \circ R^{-1})y$.

Otrzymujemy stąd zatem: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

$\square$

Słuchacze mogą próbować dowieść niektórych z tych praw. Ważne jest nie zapamiętywanie poszczególnych praw (nie prowadzimy kursu botaniki), lecz raczej *odwaga (i rozwaga) dedukcyjna*: postawa przejawiająca się w tym, że staramy się poprawnie *rozumować*, czyli efektywnie korzystać z mocy naszych umysłów. Zachęcamy zatem słuchaczy, aby w swojej Matematycznej Przygodzie Edukacyjnej byli tak dzielni, jak nieustraszony i pomysłowy Indiana Jones.

## 7 Wyrażanie własności relacji poprzez operacje na nich

W terminach operacji na relacjach wyrazić można własności relacji:

1. $R$ jest zwrotna wtedy i tylko wtedy, gdy $id_X \subseteq R$
2. $R$ jest przeciwzwrotna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap id_X = \emptyset$
3. $R$ jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R = R^{-1}$
4. $R$ jest asymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap R^{-1} = \emptyset$
5. $R$ jest antysymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap R^{-1} \subseteq id_X$
6. $R$ jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ R \subseteq R$
7. $R$ jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $R = R^{tr}$
8. $R$ jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cup R^{-1} \cup id_X = X \times X$.

Uważamy, że niektóre z powyższych zależności mogą być udowodnione na konwersatorium.

## 8 Zachowywanie własności przez operacje

Naturalne jest pytanie, które własności relacji zostają zachowane, gdy wykonujemy na rozważanych relacjach pewne operacje.
PRZYKŁADY.

1. Jeśli relacje $R$ i $S$ są zwrotne, to relacje: $R \cup S$, $R \cap S$, $R \circ S$, $R^{-1}$, $R^{tr}$ też są zwrotne.
2. Jeśli relacje $R$ i $S$ są przeciwzwrotne, to relacje: $R \cup S$, $R \cap S$, $R^{-1}$ też są przeciwzwrotne.
3. Złożenie $R \circ S$ relacji przeciwzwrotnych jest przeciwzwrotne wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap S^{-1} = \emptyset$.
4. Jeśli relacje $R$ i $S$ są symetryczne, to symetryczne są też relacje: $R \cup S,\ R \cap S,\ R^{-1},\ R \circ R^{-1},\ R^{tr}$.
5. Jeśli relacje $R$ i $S$ są symetryczne, to $R \circ S$ jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ S = S \circ R$.

6. Jeśli $R$ jest asymetryczna, to $R^{-1}$ też.

7. Jeśli $R$ jest asymetryczna, to $R \cap S$ jest asymetryczna, dla dowolnej $S$.

8. Jeśli $R$ i $S$ są przechodnie, to $R \cap S$, $R^{-1}$ i $R^{tr}$ też.

9. Jeśli $R$ i $S$ są antysymetryczne, to $R \cap S$ i $R^{-1}$ też.

10. Jeśli $R$ i $S$ są antysymetryczne, to: $R \cup S$ jest antysymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap S^{-1} \subseteq id_X$.

11. Jeśli $R$ i $S$ są asymetryczne, to: $R \cup S$ jest asymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap S^{-1} = \emptyset$.

12. Jeśli $R$ jest symetryczna i przechodnia, to $R$ jest zwrotna, czyli $R = R^{-1}$ oraz $R \circ R \subseteq R$ implikują $id_X \subseteq R$.

13. $R \subseteq R \oplus S$ oraz $S \subseteq R \oplus S$.

14. Jeśli $R, S, T$ są przechodnie, to $(R \oplus S) \oplus T = R \oplus (S \oplus T)$.

15. Jeśli $R, S, T$ są przechodnie, to: jeśli $R \subseteq T$ i $S \subseteq T$, to $(R \oplus S) \subseteq T$.

Udowodnimy, dla przykładu, że: złożenie $R_1 \circ R_2$ równoważności $R_1$ i $R_2$ jest równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Najpierw pokazujemy, że jeśli $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością, to $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Jeśli $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością, to zachodzą następujące równości:

$$R_1 \circ R_2 = (R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1} = R_2 \circ R_1.$$

Niech $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$. Pokażemy, że $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością.

Po pierwsze, mamy:

$$(R_1 \circ R_2)^{-1} = (R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1} = R_1 \circ R_2,$$

tj. $R_1 \circ R_2$ jest symetryczna.

Po drugie, mamy:

$$(R_1 \circ R_2) \circ (R_1 \circ R_2) = R_1 \circ (R_2 \circ R_1) \circ R_2 = R_1 \circ (R_1 \circ R_2) \circ R_2 = (R_1 \circ R_1) \circ (R_2 \circ R_2) \subseteq R_1 \circ R_2,$$

tj. $R_1 \circ R_2$ jest przechodnia.

Zwrotność $R_1 \circ R_2$ jest oczywista, ponieważ $R_1$ oraz $R_2$ są zwrotne z założenia.

□

# 9 Wesoła dygresja: aksjomatyczne ujęcie rachunku relacji

Możliwe (i historycznie poświadczone) jest inne podejście do rachunku relacji niż to naszkicowane powyżej.

Matematyczny rachunek relacji zapoczątkowany został w pracach Charlesa Saundersa Peirce'a oraz Ernsta Schrödera. Aksjomatyczne ujęcie tego rachunku podał Alfred Tarski. Aksjomatyka Tarskiego zapisana jest w języku używającym (oprócz funktorów prawdziwościowych, predykatu identyczności i zmiennych dla relacji także symboli dla operacji na relacjach. Zachodzi ważne twierdzenie Schrödera-Tarskiego mówiące, że każde zdanie tego języka jest równoważne pewnemu zdaniu o postaci identyczności. Interpretacjami aksjomatów są tzw. *algebry relacyjne*. Roger Lyndon udowodnił, że istnieją takie algebry relacyjne, które nie są *reprezentowalne*: oznacza to, mówiąc w uproszczeniu, że możliwe są takie interpretacje rachunku relacji, w których relacje nie są podzbiorami produktów kartezjańskich. Tarski udowodnił, że równościowa teoria reprezentowalnych algebr relacyjnych jest nierozstrzygalna.

Słuchacze ewentualnie zainteresowani tym ujęciem zechcą zajrzeć np. do prezentacji:

http://logic.amu.edu.pl/images/a/a0/Mdt03.pdf

# 10 Zachęta do refleksji

1. Jakiego typu relacją jest związek przyczynowo skutkowy?
2. Jak wyrazić *siłę* (stopień) zachodzenia relacji?
3. Jakiego typu relacją jest *analogia*?
4. Jak wiadomo, *do zdrady trzeba trojga*. Jakie własności mają relacje trójargumentowe (czteroargumentowe, itd.)?
5. Czy relacje mogą mieć zmienną liczbę argumentów?
6. Czy relacje mogą mieć nieograniczoną liczbę argumentów?

# 11 Podsumowanie

To, co należy zapamiętać z niniejszego wykładu:

1. Relacja dwuargumentowa: zbiór par uporządkowanych.

2. Relacja $n$-argumentowa: zbiór $n$-tek uporządkowanych.

3. Dziedzina i przeciwdziedzina relacji (dwuargumentowej).

4. Obrazy i przeciwobrazy zbiorów względem relacji.

5. Własności relacji dwuargumentowych: zwrotność, przeciwzwrotność, symetria, asymetria, antysymetria, przechodniość, euklidesowość, spójność.

6. Relacje równoważności: klasy abstrakcji, związek między relacjami równoważności a podziałami zbiorów.

7. Operacje na relacjach: operacje boolowskie, konwers, złożenie, przechodnie domknięcie.

8. Reprezentacje: grafy, macierze, reprezentacje geometryczne.

## 12 Wybrane pozycje bibliograficzne

Guzicki, W., Zakrzewski, P. 2005. *Wstęp do matematyki. Zbiór zadań.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Ławrow, A.I., Maksimowa, L.L. 2004. *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Marek, W., Onyszkiewicz, J. 2004. *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Szrejder, J.A. 1975. *Równość, podobieństwo, porządek*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.