MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

ZAGADNIENIA NA ZALICZENIE WYKŁADU 2018/2019

DOROTA LESZCZYŃSKA-JASION, JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM

Zagadnienia do Zapamiętania-Ze-Zrozumieniem (ZZZ) podawane były na końcu każdej prezentacji. Proponujemy słuchaczom zwrócenie szczególnej uwagi na następujące definicje, typy zadań oraz dowody twierdzeń:

1 Definicje

1. Operacje na zbiorach: suma, iloczyn, różnica, dopełnienie, różnica symetryczna, produkt kartezjański.

2. Własności relacji dwuargumentowych: zwrotność, przeciwzwrotność, symetria, asymetria, antysymetria, przechodniość, euklidesowość, spójność, serialność.

3. Relacja równoważności, klasa abstrakcji elementu x względem relacji R, zbiór ilorazowy X/R. Definicja i przykład.

4. Operacje na relacjach binarnych: konwers, złożenie. Definicja i przykład.

5. Funkcja ze zbioru X w zbiór Y, iniekcja ze zbioru X w zbiór Y, surjekcja ze zbioru X na zbiór Y, bijekcja ze zbioru X na zbiór Y, ciąg nieskończony.

6. Zbiory równoliczne, zbiór nieskończony w sensie Dedekinda, zbiór przeliczalny, zbiór nieprzeliczalny. Definicja i przykład.

7. Ciąg ograniczony. Definicja i przykład.

8. Wzór dwumianowy Newtona.

9. Prawdopodobieństwo zdarzeń w skończonej przestrzeni probabilistycznej, prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B.

10. Relacja częściowego porządku, relacja liniowego porządku, łańcuch, antyłańcuch, porządek dyskretny, porządek gęsty, izomorfizm zbiorów częściowo uporządkowanych.

11. Element najmniejszy, minimalny, największy, maksymalny w zbiorze częściowo uporządkowanym. Definicja i przykład.

12. Zbiór dobrze uporządkowany. Definicja i przykład.

13. Algebra. Podaj przykład algebry. Działanie przemienne, działanie łączne, element neutralny dla działania, element odwrotny (dla x względem $\circ$), homomorfizm struktur, izomorfizm struktur, kongruencja.

14. Aksjomat ciągłości.

15. Ciąg zbieżny do liczby g. Ciąg rozbieżny, ciąg rozbieżny do granicy niewłaściwej.

16. Ciąg spełniający warunek Cauchy'ego (ciąg Cauchy'ego).

17. Granica funkcji w punkcie: definicja Cauchy'ego, definicja Heinego.

18. Ciągłość funkcji w punkcie: definicja Cauchy'ego, definicja Heinego.

19. Ciągłość funkcji w zbiorze, jednostajna ciągłość funkcji w zbiorze.

20. Przestrzeń z metryką euklidesową, przestrzeń metryczna, metryka taksówkowa.

21. Iloraz różnicowy funkcji, pochodna funkcji w punkcie.

22. Opisz interpretację geometryczną / mechaniczną pochodnej funkcji.

23. Wzory na pochodne funkcji:

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(\frac{1}{x^n})' = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$	$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\text{tg } x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\text{ctg } x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(e^x)' = e^x$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot\ln a}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

24. Pochodna: sumy / różnicy / iloczynu / ilorazu / złożenia funkcji / funkcji odwrotnej.

25. Ekstremum lokalne funkcji.

2 Typy zadań

1. Pokaż, że podana zależność nie jest prawem rachunku zbiorów.
2. Wyznacz $\wp(\wp(X))$ dla podanego zbioru X.
3. Sporządź diagram, pokazujący między którymi elementami danego zbioru zachodzi podana relacja.
4. Sprawdź, czy podana relacja ma wybrane własności.
5. Oblicz granicę ciągu o podanym wyrazie ogólnym.
6. Znajdź rozwinięcie $(a+b)^7$.
7. Podaj tabelkę działania określonego na danym skończonym zbiorze.
8. Oblicz drugą pochodną podanej funkcji.

3 Dowody

1. Korzystając z definicji $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, udowodnij, że $(a, b) = (c, d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c$ oraz $b = d$.
2. Udowodnij przez indukcję matematyczną, że jeśli X jest zbiorem skończonym o n elementach, to zbiór potęgowy $\wp(X)$ ma 2^n elementów.
3. Udowodnij, że zbiór wszystkich liczb pierwszych nie jest skończony.
4. Udowodnij, że jeśli R jest relacją równoważności na zbiorze X, to dla dowolnych $x, y \in X$: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy $[x]_R = [y]_R$.
5. Udowodnij, że żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów.
6. Udowodnij Lemat Königa.
7. Udowodnij przez indukcję matematyczną nierówność Bernoulliego:

$$(1+d)^n \geqslant 1 + n \cdot d$$

8. Udowodnij, że $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ dla dowolnych funkcji f oraz g.