Metoda aksjomatyczna

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
http://logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
pogon@amu.edu.pl

MDTiAR 27x2015

Plan na dziś

- Dzisiaj wykorzystamy założenie, że studenci przeszli kursy: *Logika I* oraz *Logika II*.
- Przypomnimy, na czym polega aksjomatyczna metoda dowodzenia twierdzeń.
- Udowodnimy twierdzenie o dedukcji (KRZ).
- Udowodnimy twierdzenia o trafności oraz pełności metody aksjomatycznej (KRZ).

- Przypomnimy operacje na relacjach.
- Podamy aksjomatykę Tarskiego dla rachunku relacji.

Dla tęskniących za logiką pierwszego rzędu: chińskie przysłowie mówi, że *cierpliwy dostaje wszystko na czas*.

Dawno temu, w odległej galaktyce...

Metoda Aksjomatyczna w KRZ

Pionierzy

- Gottlob Frege: *Begriffsschrift* (1879)
- Alfred N. Whitehead, Bertrand Russell: *Principia Mathematica* (1910–1913)
- David Hilbert, Wilhelm Ackermann: *Grundzüge der Theoretischen Logik* (1928)
- David Hilbert, Paul Bernays: *Grundlagen der Mathematik* (1934, 1939)

- David Hilbert: *Grundlagen der Geometrie* (1899)
- Postulatyści Amerykańscy (Edward V.Huntington, Oswald Veblen)
- Polscy logicy (Stanisław Leśniewski, Adolf Lindenbaum, Jan Łukasiewicz, Alfred Tarski)

Konsekwencja aksjomatyczna

- W ustalonym języku wybieramy:
  - zestaw aksjomatów (przyjmowanych bez dowodu)
  - zestaw (pierwotnych) reguł wnioskowania.
- Oba te zbiory muszą być podane w sposób efektywny.

- Dowodem w systemie aksjomatycznym $\mathbb{A}$ jest dowolny skończony ciąg formuł $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ taki, że każda formuła ψ_i jest bądź aksjomatem, bądź wnioskiem reguły wnioskowania o przesłankach występujących wcześniej w tym ciągu.
- Wyprowadzeniem ze zbioru formuł S w systemie aksjomatycznym $\mathbb{A}$ jest dowolny skończony ciąg formuł $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ taki, że każda formuła ψ_i jest bądź aksjomatem, bądź elementem zbioru S, bądź wnioskiem reguły wnioskowania o przesłankach występujących wcześniej w tym ciągu.

Konsekwencja aksjomatyczna: komentarze

- Tezą systemu aksjomatycznego $\mathbb{A}$ jest każda formuła ψ, która jest ostatnim elementem jakiegoś dowodu. Piszemy wtedy: $\vdash_{\mathbb{A}} \psi$.
- Formuła ψ jest $\mathbb{A}$-konsekwencją zbioru formuł S, gdy ψ jest ostatnim elementem jakiegoś wyprowadzenia z S. Piszemy wtedy: $S \vdash_{\mathbb{A}} \psi$

- Za aksjomaty przyjmujemy formuły bądź schematy formuł. W pierwszym przypadku wśród reguł wnioskowania uwzględniamy regułę podstawiania RP: $\frac{\varphi}{\varphi[p_i/\psi]}$ (formuły ψ za zmienną p_i w formule φ).
- W razie potrzeby, korzysta się z reguły zastępowania definicyjnego.

- Aksjomaty charakteryzują znaczenie stałych logicznych.
- Wzbogacamy środki inferencyjne systemu poprzez pokazanie, że pewne reguły są w nim wyprowadzalne (wtórne).

Aksjomatyka w stylu Hilberta-Bernaysa

Kurs *Logika I* wykorzystywał zapewne tego rodzaju aksjomatykę KRZ:

Reguły wnioskowania: MP $\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$, RP $\frac{\varphi}{\varphi[p_i/\psi]}$

Aksjomaty:

- $p_1 \to (p_2 \to p_1)$
- $(p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3))$

- $(p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1)$
- $\neg\neg p_1 \to p_1$
- $p_1 \to \neg\neg p_1$

Aksjomatyka w stylu Hilberta-Bernaysa

- $(p_1 \wedge p_2) \to p_1$
- $(p_1 \wedge p_2) \to p_2$
- $(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \to p_3) \to (p_1 \to (p_2 \wedge p_3)))$

- $p_1 \to (p_1 \vee p_2)$
- $p_2 \to (p_1 \vee p_2)$
- $(p_1 \to p_2) \to ((p_3 \to p_2) \to ((p_1 \vee p_3) \to p_2))$

- $(p_1 \equiv p_2) \to (p_1 \to p_2)$
- $(p_1 \equiv p_2) \to (p_2 \to p_1)$
- $(p_1 \to p_2) \to ((p_2 \to p_1) \to (p_1 \equiv p_2))$

Dwa polskie przykłady

Aksjomatyka Jana Łukasiewicza (implikacyjno-negacyjna)

- $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
- $(\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$
- $\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$

Reguła wnioskowania MP: $\frac{\varphi \quad \varphi\rightarrow\psi}{\psi}$

Aksjomatyka Adama Wiegnera (pierwotne: $\wedge$ oraz $\neg$)

- $p \rightarrow (p \wedge p)$
- $(p \wedge q) \rightarrow p$
- $(p \uparrow q) \rightarrow (q \uparrow p)$
- $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \uparrow r) \rightarrow (p \uparrow r))$

Reguły wnioskowania: MP, RP, zastępowanie definicyjne

Propozycja w Fitting 1990

Schematy aksjomatów:

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
3. $\bot \to \varphi$
4. $\varphi \to \top$
5. $\neg\neg\varphi \to \varphi$
6. $\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$
7. $\alpha \to \alpha_1$
8. $\alpha \to \alpha_2$
9. $(\beta_1 \to \varphi) \to ((\beta_2 \to \varphi) \to (\beta \to \varphi))$

Reguła wnioskowania: $\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$ (*modus ponens*, reguła odrywania, MP)

Prawo tożsamości: $p \to p$

1. $(p \to ((p \to p) \to p)) \to ((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$ Ax.2
2. $p \to ((p \to p) \to p)$ Ax.1
3. $(p \to (p \to p)) \to (p \to p)$ MP: 1,2
4. $p \to (p \to p)$ Ax. 1
5. $p \to p$ MP: 3,4

- W dowodzie korzystano tylko z dwóch pierwszych aksjomatów.
- Tak samo dowodzimy schematu prawa tożsamości: $\psi \to \psi$.
- Ten prosty dowód ukazuje dwie trudności metody aksjomatycznej:
  - Jak zacząć dowód aksjomatyczny?
  - W dowodzie występują formuły bardziej złożone od dowodzonej tezy.

Jeszcze jeden przykład: $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$

- Za β-formułę w schemacie aksjomatów 9 weźmy formułę: $\neg\varphi \to \varphi$.
- Wtedy β_1 jest formułą $\neg\neg\varphi$, a β_2 formułą φ. Otrzymujemy więc:
- $(\neg\neg\varphi \to \varphi) \to ((\varphi \to \varphi) \to ((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi))$.

- $\neg\neg\varphi \to \varphi$ podpada pod schemat aksjomatów 5.
- $\varphi \to \varphi$ jest tezą (jak już pokazaliśmy), czyli dołączyć można w tym miejscu kroki dowodu $\varphi \to \varphi$.
- Dwukrotne zastosowanie reguły odrywania daje $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$.

Ćwiczenie. Zapisz powyższą argumentację w postaci formalnego dowodu. Czy pamiętasz, że $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ to *consequentia mirabilis* (prawo Claviusa)?

Twierdzenie o dedukcji wprost (KRZ)

- Oznaczenia: niech $\vdash_{ph}$ będzie relacją konsekwencji wyznaczoną przez podany wyżej zestaw aksjomatów i regułę odrywania.
- **Twierdzenie o dedukcji**.
  $S \cup \{\varphi\} \vdash_{ph} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S \vdash_{ph} (\varphi \to \psi)$.

Uwagi.

- Implikacja odwrotna wynika z monotoniczności $\vdash_{ph}$ (Fitting pisze: jest trywialna).
- W dowodzie implikacji prostej wykorzystamy pierwsze dwa aksjomaty systemu (oraz regułę odrywania).
- Twierdzenie o dedukcji udowodnili (niezależnie od siebie) Herbrand i Tarski.

Dowód twierdzenia o dedukcji

- Załóżmy, że $S \cup \{\varphi\} \vdash_{ph} \psi$.
- Niech $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ będzie wyprowadzeniem ψ z $S \cup \{\varphi\}$.
- Wtedy χ_n jest identyczna z ψ.
- Każdy element ciągu $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n)$ jest bądź aksjomatem, bądź elementem S, bądź wnioskiem reguły odrywania o przesłankach będących wcześniejszymi elementami tego ciągu.

- Tworzymy ciąg formuł $(*)$: $(\varphi \to \chi_1, \varphi \to \chi_2, \ldots, \varphi \to \chi_n)$.
- Ostatnim jego elementem jest zatem $\varphi \to \psi$.
- Ciąg ten nie musi być wyprowadzeniem, ale:
- Rozszerzymy ten ciąg do ciągu, który będzie wyprowadzeniem $\varphi \to \psi$ z S, co zakończy dowód twierdzenia o dedukcji.

Dowód twierdzenia o dedukcji

- χ_i jest aksjomatem lub elementem S. Wtedy przed formułą $\varphi \to \chi_i$ wstawiamy do ciągu $(*)$ formuły: χ_i oraz $\chi_i \to (\varphi \to \chi_i)$.
- χ_i jest formułą φ. Wtedy przed formułą $\varphi \to \chi_i$ wstawiamy do ciągu $(*)$ formuły tworzące dowód formuły $\varphi \to \varphi$.

- χ_i jest wnioskiem reguły odrywania o przesłankach będących wcześniejszymi elementami tego ciągu, czyli istnieją χ_j, χ_k takie, że $j, k < i$ oraz χ_k jest formułą $\chi_j \to \chi_i$ (czyli $\varphi \to \chi_k$ jest formułą $\varphi \to (\chi_j \to \chi_i)$).
- Wtedy przed formułą $\varphi \to \chi_i$ wstawiamy do ciągu $(*)$ formuły: $(\varphi \to (\chi_j \to \chi_i)) \to ((\varphi \to \chi_j) \to (\varphi \to \chi_i))$ (aksjomat) oraz $(\varphi \to \chi_j) \to (\varphi \to \chi_i)$.
- Wtedy $\varphi \to \chi_i$ jest wnioskiem reguły odrywania o przesłankach występujących wcześniej w tak rozszerzonym ciągu.

Korzyści z twierdzeń o dedukcji

- Zauważmy, że dowód twierdzenia o dedukcji był konstruktywny: podano przepis, jak wyprowadzenie ψ z $\{\varphi\}$ przekształcić na dowód $\varphi \rightarrow \psi$.
- Korzystanie z twierdzenia o dedukcji bardzo ułatwia dowodzenie w systemach aksjomatycznych.

Ćwiczenia. Wykorzystując twierdzenie o dedukcji, pokaż, że:

- $\vdash_{ph} (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ — prawo komutacji
- $\vdash_{ph} (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi)$ — prawo importacji
- $\vdash_{ph} (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ — sylogizm hipotetyczny

Studenci poznali wcześniej następujące twierdzenia o dedukcji w KRZ ($\models_{krz}$ to relacja wynikania logicznego w KRZ, $\vdash_{krz}$ to konsekwencja aksjomatyczna w KRZ, której używano):

- *Semantyczne twierdzenie o dedukcji wprost*: $S \cup \{\varphi\} \models_{krz} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S \models_{krz} (\varphi \rightarrow \psi)$.
- *Syntaktyczne twierdzenie o dedukcji wprost*: $S \cup \{\varphi\} \vdash_{krz} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S \vdash_{krz} (\varphi \rightarrow \psi)$.
- *Semantyczne twierdzenie o dedukcji nie wprost*: $S \cup \{\neg\varphi\} \models_{krz} \bot$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S \models_{krz} \varphi$.
- *Syntaktyczne twierdzenie o dedukcji nie wprost*: $S \vdash_{krz} \neg\varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S \cup \{\varphi\} \vdash_{krz} \bot$.

- Powyżej udowodniliśmy drugie z nich dla $\vdash_{krz} = \vdash_{ph}$.
- W przypadku KRP potrzebne jest dodatkowe założenie (że φ jest zdaniem) w syntaktycznych twierdzeniach o dedukcji.

Trafność

Twierdzenie o trafności. Jeśli $S \vdash_{ph} \varphi$, to $S \models_{krz} \varphi$.

- Każdy aksjomat jest tautologią KRZ. Ćwiczenie: sprawdź.
- Jeśli φ oraz $\varphi \to \psi$ są tautologiami KRZ, to ψ jest tautologią KRZ. Ćwiczenie: sprawdź. A może pamiętasz *semantyczne twierdzenie o odrywaniu* w KRZ?

- Tak więc, każdy wiersz (w szczególności: ostatni wiersz) dowolnego dowodu jest tautologią w KRZ.
- A zatem, jeśli φ jest tezą rozważanego sytemu, to jest tautologią KRZ.
- Fitting pisze (Fitting 1990, 74): *This argument extends easily to derivations as well; we do not give details*, co przetłumaczymy tak: *Przez indukcję po długości wyprowadzenia φ z S łatwo pokazać, że każdy jego krok wynika logicznie z S.*

Pełność

Twierdzenie o pełności. Jeśli $S \models_{krz} \varphi$, to $S \vdash_{ph} \varphi$.

- W dowodzie wykorzystamy: pewną zdaniową własność niesprzeczności oraz Twierdzenie o Istnieniu Modelu.

- Niech φ będzie dowolną formułą. Zbiór S nazwiemy *Hilbertowsko φ-sprzecznym*, gdy $S \vdash_{ph} \varphi$. Zbiory, które nie są Hilbertowsko φ-sprzeczne nazywamy *Hilbertowsko φ-niesprzecznymi*.
- **Lemat**. Dla dowolnej formuły φ, rodzina wszystkich zbiorów Hilbertowsko φ-niesprzecznych jest zdaniową własnością niesprzeczności.

Dowód. Niech S będzie zbiorem Hilbertowsko φ-niesprzecznym. Oznacza to, że nie zachodzi $S \vdash_{ph} \varphi$. Trzeba pokazać, że S spełnia wszystkie warunki nakładane na elementy zdaniowej własności niesprzeczności.

Dowód lematu

Proponujemy dowód nie wprost (dla każdego warunku).

- Gdyby $\bot \in S$, to mielibyśmy $S \vdash_{ph} \bot$. Aksjomatem jest $\bot \to \varphi$, a zatem mielibyśmy $S \vdash_{ph} \varphi$, w sprzeczności z założeniem o Hilbertowskiej φ-niesprzeczności S. Tak więc, $\bot \notin S$.
- Gdyby $\neg\top \in S$, to mielibyśmy $S \vdash_{ph} \neg\top$. Pod schemat aksjomatu 4 podpada $\neg\top \to \top$, a zatem $S \vdash_{ph} \top$. Pod schemat aksjomatu 6 podpada $\top \to (\neg\top \to \varphi)$, a zatem $S \vdash_{ph} \varphi$, w sprzeczności z założeniem o Hilbertowskiej φ-niesprzeczności S. Tak więc, $\neg\top \notin S$.
- Przypuśćmy, że $S \cup \{\psi\}$ jest Hilbertowsko φ-sprzeczny, czyli $S \cup \{\psi\} \vdash_{ph} \varphi$. Pokażemy, że wtedy $S \cup \{\neg\neg\psi\}$ jest Hilbertowsko φ-sprzeczny. Aksjomat 5 daje: $\neg\neg\psi \to \psi$, a twierdzenie o dedukcji i poczynione przypuszczenie dają: $S \vdash_{ph} (\psi \to \varphi)$. Na mocy prawa sylogizmu hipotetycznego: $S \vdash_{ph} (\neg\neg\psi \to \varphi)$. Na mocy twierdzenia o dedukcji: $S \cup \{\neg\neg\psi\} \vdash_{ph} \varphi$, czyli $S \cup \{\neg\neg\psi\}$ jest Hilbertowsko φ-sprzeczny.

Dowód lematu

- Przypuśćmy, że $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ jest Hilbertowsko φ-sprzeczny, czyli: $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \vdash_{ph} \varphi$. Pokażemy, że wtedy $S \cup \{\alpha\}$ jest Hilbertowsko φ-sprzeczny, czyli że: $S \cup \{\alpha\} \vdash_{ph} \varphi$.
- Skoro $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \vdash_{ph} \varphi$, to (twierdzenie o dedukcji!): $S \cup \{\alpha_1\} \vdash_{ph} (\alpha_2 \rightarrow \varphi)$ oraz $S \vdash_{ph} (\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow \varphi))$.
- Na mocy prawa importacji (zob. ćwiczenie) oraz MP: $(\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\alpha_1 \wedge \alpha_2) \rightarrow \varphi)$ mamy $S \vdash_{ph} ((\alpha_1 \wedge \alpha_2) \rightarrow \varphi)$
- Na mocy aksjomatów $\alpha \rightarrow \alpha_1$ oraz $\alpha \rightarrow \alpha_2$, prawa mnożenia następników $(\alpha \rightarrow \alpha_1) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha_2) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha_1 \wedge \alpha_2)))$ oraz MP mamy $S \vdash_{ph} (\alpha \rightarrow (\alpha_1 \wedge \alpha_2))$
- Na mocy prawa sylogizmu hipotetycznego: $S \vdash_{ph} (\alpha \rightarrow \varphi)$.
- Twierdzenie o dedukcji daje: $S \cup \{\alpha\} \vdash_{ph} \varphi$.

Dowód lematu

- Przypuśćmy, że $S \cup \{\beta_1\}$ oraz $S \cup \{\beta_2\}$ są Hilbertowsko φ-sprzeczne. Oznacza to, że: $S \cup \{\beta_1\} \vdash_{ph} \varphi$ oraz $S \cup \{\beta_2\} \vdash_{ph} \varphi$. Pokażemy, że wtedy $S \cup \{\beta\}$ jest Hilbertowsko φ-sprzeczny.
- Skoro $S \cup \{\beta_1\} \vdash_{ph} \varphi$, to (twierdzenie o dedukcji!) $S \vdash_{ph} (\beta_1 \to \varphi)$.
- Skoro $S \cup \{\beta_2\} \vdash_{ph} \varphi$, to (twierdzenie o dedukcji!) $S \vdash_{ph} (\beta_2 \to \varphi)$.
- Przypomnijmy schemat aksjomatów 9:
  $(\beta_1 \to \varphi) \to ((\beta_2 \to \varphi) \to (\beta \to \varphi))$
- Dwukrotne zastosowanie reguły odrywania daje: $S \vdash_{ph} (\beta \to \varphi)$.
- Na mocy twierdzenia o dedukcji: $S \cup \{\beta\} \vdash_{ph} \varphi$, czyli $S \cup \{\beta\}$ jest Hilbertowsko φ-sprzeczny.

Dowód twierdzenia o pełności

- Załóżmy, że $S \models_{krz} \varphi$ i przypuśćmy (dla dowodu nie wprost), że nie zachodzi $S \vdash_{ph} \varphi$.
- Oznacza to, że S jest Hilbertowsko φ-niesprzeczny.
- Wynika z tego, że także $S \cup \{\neg\varphi\}$ jest Hilbertowsko φ-niesprzeczny. Gdyby bowiem tak nie było, to mielibyśmy $S \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{ph} \varphi$, a zatem także (twierdzenie o dedukcji!) $S \vdash_{ph} (\neg\varphi \rightarrow \varphi)$. Ponieważ (jak wcześniej pokazano) tezą jest $(\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$, to wynikałoby z tego, że $S \vdash_{ph} \varphi$, co przeczy Hilbertowskiej φ-niesprzeczności S.

- Na mocy udowodnionego przed chwilą lematu oraz Twierdzenia o Istnieniu Modelu $S \cup \{\neg\varphi\}$ jest spełnialny.
- W konsekwencji, nie zachodzi $S \models_{krz} \varphi$, co kończy dowód twierdzenia o pełności.

Z cyklu: jak Polacy tworzyli logikę współczesną

Aksjomatyka Rachunku Relacji

Operacje na relacjach

- Znane z kursu *Logika I*: operacje mnogościowe na relacjach.
- *Złożeniem* relacji $R \subseteq X \times Y$ i $S \subseteq Y \times Z$ nazywamy relację $R \circ S \subseteq X \times Z$ zdefiniowaną wzorem: $xR \circ Sz$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $y \in Y$ taki, że xRy i ySz.
- *Przechodnim domknięciem relacji* R nazywamy relację R^{tr} zdefiniowaną indukcyjnie:
  - $R^1 = R$
  - $R^{n+1} = R^n \circ R$
  - $R^{tr} = \bigcup\limits_n R^n$.

- *Względna suma*: $x\ R \dagger S\ y$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego z zachodzi: xRz lub zSy.
- Oswoimy się z tymi operacjami na konwersatorium.

Operacje na relacjach a własności relacji

Niech $R \subseteq X \times X$. Przez id_X rozumiemy relację identyczności w X.

- R jest zwrotna wtedy i tylko wtedy, gdy $id_X \subseteq R$
- R jest przeciwzwrotna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap id_X = \emptyset$
- R jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R = R^{-1}$
- R jest asymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap R^{-1} = \emptyset$
- R jest antysymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap R^{-1} \subseteq id_X$
- R jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ R \subseteq R$
- R jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $R = R^{tr}$
- R jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cup R^{-1} \cup id_X = X \times X$.

- Ćwiczenie: które własności są zachowywane przez operacje na relacjach? Jakie struktury tworzą: wszystkie porządki (częściowe, liniowe), wszystkie równoważności, itd. na danym zbiorze?

Aksjomaty Tarskiego

Matematyczny rachunek relacji zapoczątkowany został w pracach Peirce'a oraz Schrödera. Aksjomatyczne ujęcie tego rachunku podał Tarski. Aksjomatyka Tarskiego zapisana jest w języku używającym (oprócz funktorów prawdziwościowych, predykatu identyczności $\doteq$ i zmiennych dla relacji) następujących symboli operacji podanych w kontekście ich użycia wraz z (zamierzoną) interpretacją w uniwersum U:

Symbol	Interpretacja	Symbol	Interpretacja
$R + S$	$R \cup S$	$\mathbf{0}$	$\emptyset$
$R \cdot S$	$R \cap S$	$\mathbf{1}$	$U \times U$
$R ; S$	$R \circ S$	$\mathbf{0}'$	$di_U = (U \times U) - id_U$
$R \ddagger S$	$R \dagger S$	$\mathbf{1}'$	id_U
$R^{\curlyvee}$	R^{-1}	$\overline{R}$	$(U \times U) - R$
$R \doteq S$	$R = S$		

- (1) $(R \doteq S \wedge R \doteq T) \rightarrow S \doteq T$
- (2) $R \doteq S \rightarrow (R + T \doteq S + T \wedge R \cdot T \doteq S \cdot T)$
- (3) $R + S \doteq S + R \wedge R \cdot S \doteq S \cdot R$
- (4) $(R + S) \cdot T \doteq (R \cdot T) + (S \cdot T) \wedge (R \cdot S) + T \doteq (R + T) \cdot (S + T)$
- (5) $R + \mathbf{0} \doteq R \wedge R \cdot \mathbf{1} \doteq R$
- (6) $R + \overline{R} \doteq \mathbf{1} \wedge R \cdot \overline{R} \doteq \mathbf{0}$
- (7) $\neg(\mathbf{1} \doteq \mathbf{0})$
- (8) $(R^{\curlyvee})^{\curlyvee} \doteq R$
- (9) $(R; S)^{\curlyvee} \doteq (S)^{\curlyvee}; (R)^{\curlyvee}$
- (10) $R; (S; T) \doteq (R; S); T$
- (11) $R; \mathbf{1}' \doteq R$
- (12) $R; \mathbf{1} \doteq \mathbf{1} \vee \mathbf{1}; \overline{R} \doteq \mathbf{1}$
- (13) $(R; S) \cdot (T)^{\curlyvee} \doteq \mathbf{0} \rightarrow (S; T) \cdot (R)^{\curlyvee} \doteq \mathbf{0}$
- (14) $\mathbf{0}' \doteq \overline{\mathbf{1}'}$
- (15) $R \ddagger S \doteq \overline{(\overline{R}); (\overline{S})}$.

Twierdzenie Schrödera-Tarskiego

Twierdzenie Schrödera-Tarskiego. Na bazie aksjomatów (1)–(15) każde zdanie (języka rachunku relacji) jest inferencyjnie równoważne zdaniu o postaci $R \doteq \mathbf{1}$.

- Zakładamy przy tym aksjomatykę KRZ.
- Reguły: *modus ponens* oraz reguły dla predykatu identyczności $\doteq$.

- Niech $\Re(U)$ oznacza rodzinę wszystkich relacji dwuargumentowych na zbiorze U, czyli $\Re(U) = \{R : R \subseteq U \times U\}$. Wtedy układ $(\Re(U), \cup, \cap, \circ, \dagger, =, ^{-1}, -, U \times U, \emptyset, id_U, di_U)$ spełnia wszystkie aksjomaty (1)–(15), przy interpretacji podanej w powyższej tabeli.
- Teraz rozważymy problem ogólniejszy:

Światy relacji

Algebrą relacyjną nazywamy każdy układ o postaci $(A, +, ^{-}, ;, ^{\vee}, \mathbf{1}')$, gdzie A jest zbiorem, $\mathbf{1}'$ elementem A, a operacje $+, ^{-}, ;, ^{\vee}$ spełniają warunki:

- (R1) $x + y = y + x$ — przemienność $+$
- (R2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ — łączność $+$
- (R3) $\overline{\overline{x} + \overline{y}} + \overline{\overline{x} + y} = x$ — aksjomat Huntingtona
- (R4) $x;(y;z) = (x;y);z$ — łączność ;
- (R5) $(x + y);z = (x;z) + (y;z)$ — dystrybutywność ; względem $+$
- (R6) $x;\mathbf{1}' = x$ — $\mathbf{1}'$ jest elementem identycznościowym względem ;
- (R7) $(x^{\vee})^{\vee} = x$ — idempotencja $^{\vee}$
- (R8) $(x + y)^{\vee} = x^{\vee} + y^{\vee}$ — dystrybutywność $^{\vee}$ względem $+$
- (R9) $(x;y)^{\vee} = y^{\vee};x^{\vee}$ — inwolucyjna dystrybutywność $^{\vee}$
- (R10) $(x^{\vee};\overline{x;y}) + \overline{y} = \overline{y}$ — aksjomat Tarskiego-De Morgana.

Wielkie pytanie

- Jeśli $(A, +, ^{-}, ;, ^{\smile}, \mathbf{1}')$ jest algebrą relacyjną, to definiujemy:
  - $x \cdot y = \overline{\overline{x} + \overline{y}}$, $\quad x - y = \overline{\overline{x} - y}$,
  - $\mathbf{0} = \overline{\mathbf{1}' + \overline{\mathbf{1}'}}$, $\quad \mathbf{1} = \mathbf{1}' + \overline{\mathbf{1}'}$.
  - Wtedy $(A, +, \cdot, ^{-}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ jest *algebrą Boole'a*.
- Algebra relacyjna jest *reprezentowalna*, gdy jest izomorficzna z podalgebrą algebry $\Re(U)$ wszystkich relacji dwuargumentowych na jakimś zbiorze U.

- Czy każdy model aksjomatów (1)–(15) jest algebrą reprezentowalną?
- Odpowiedź: NIE (**Lyndon**). Istnieją modele aksjomatów (1)–(15), które nie mogą być homomorficznie włożone w żadną algebrę $\Re(U)$.
- **Tarski.** Równościowa teoria reprezentowalnych algebr relacyjnych jest nierozstrzygalna.