

Reprezentowalność w PA

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Funkcje rekurencyjne

Plan na dziś

Plan na dziś:

- reprezentowalność relacji i funkcji rekurencyjnych w PA;
- hierarchia arytmetyczna.

W tym oraz następnym wykładach odwoływać będziemy się do książki:

- Murawski, R. 2000³. *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Arytmetyka Peana

Na drugim wykładzie przypomnieliśmy, jak wygląda Arytmetyka Peana (PA), tj. podaliśmy:

- alfabet PA;
- aksjomaty logiczne;
- składnię PA;
- reguły wnioskowania;
- aksjomaty dla identyczności;
- aksjomaty pozalogiczne;
- relację \vdash (dowodliwości w PA).

Do końca tych wykładów będziemy zajmować się związkami między matematycznymi reprezentacjami pojęcia obliczalności a mocą wyrażeniową i dedukcyjną Arytmetyki Peana. Przytoczymy pewne ważne twierdzenia metalogiczne, które odmieniły oblicze Świata. Tego Świata.

Reprezentowalność funkcji rekurencyjnych w PA

Definicja liczebników.

- Term 0 jest liczebniakiem.
- Jeśli term α jest liczebniakiem, to term $S(\alpha)$ jest liczebniakiem.
- Liczebniakiemi są tylko termy opisane w powyższy sposób.

Oznaczmy: $\bar{n} = \underbrace{S(S(\dots S(0)\dots))}_{n \text{ razy}}$.

\bar{n} jest zatem liczebniakiem nazywającym liczbę n .

Uwaga notacyjna. Symbol S oznacza odtąd operację **następnika**, a symbol 0 stałą pozalogiczną **zero**.

Poprzednio było nieco inaczej, ale ważna jest obecna umowa.

Gdy Szawła nazwiemy Pawłem (lub nawet Gawłem), to przecież wiemy, o kogo chodzi.

Reprezentowalność

- Formuła φ języka PA o n zmiennych wolnych **słabo reprezentuje** w PA relację $R \subseteq \mathcal{N}^n$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych liczb naturalnych k_1, \dots, k_n zachodzi równoważność:
 $R(k_1, \dots, k_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $PA \vdash \varphi(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n)$.
- Relację $R \subseteq \mathcal{N}^n$ nazywamy **słabo reprezentowalną** w PA, jeśli istnieje formuła języka PA, która słabo reprezentuje R .

Uwaga. Formuła φ słabo reprezentuje R w PA wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą implikacje:

- Jeśli $R(k_1, \dots, k_n)$, to $\vdash \varphi(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n)$.
- Jeśli $\vdash \varphi(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n)$, to $R(k_1, \dots, k_n)$.

Reprezentowalność

- Formuła φ języka PA o n zmiennych wolnych **mocno reprezentuje** w PA relację $R \subseteq \mathcal{N}^n$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych liczb naturalnych k_1, \dots, k_n zachodzą implikacje:
 - Jeśli $R(k_1, \dots, k_n)$, to $PA \vdash \varphi(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n)$.
 - Jeśli $\neg R(k_1, \dots, k_n)$, to $PA \vdash \neg\varphi(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n)$.
- Relację $R \subseteq \mathcal{N}^n$ nazywamy **mocno reprezentowalną** w PA, jeśli istnieje formuła języka PA, która mocno reprezentuje R .

Uwaga. Każda relacja mocno reprezentowalna w PA jest też słabo reprezentowalna w PA, lecz nie na odwrót.

Reprezentowalność

Jeśli PA jest niesprzeczna oraz R jest mocno reprezentowana w PA przez formułę φ , to zachodzą następujące równoważności:

- $R(k_1, \dots, k_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $PA \vdash \varphi(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n)$.
- $\neg R(k_1, \dots, k_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $PA \vdash \neg\varphi(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n)$.

Na mocy powyższego twierdzenia, relacja R jest mocno reprezentowalna w PA wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła φ języka PA taka, że:

- R jest słabo reprezentowana przez φ ,
- $\neg R$ jest słabo reprezentowana przez $\neg\varphi$.

Reprezentowalność

- Formuła φ języka PA o $n + 1$ zmiennych wolnych reprezentuje w PA funkcję $f : \mathcal{N}^n \rightarrow \mathcal{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych liczb naturalnych k_1, \dots, k_n :

$$\text{PA} \vdash \forall y (\varphi(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n) \equiv (y = \overline{f(k_1, \dots, k_n)})).$$
 - Funkcję $f : \mathcal{N}^n \rightarrow \mathcal{N}$ nazywamy reprezentowalną w PA wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła φ języka PA o $n + 1$ zmiennych wolnych taka, że φ reprezentuje f w PA.
-
- Relacja identyczności jest mocno reprezentowana w PA przez formułę $x_1 = x_2$.
 - Funkcja dodawania jest reprezentowana w PA przez formułę $x_1 + x_2 = x_3$.
 - Funkcja mnożenia jest reprezentowana w PA przez formułę $x_1 \cdot x_2 = x_3$.
 - Relacja mniejszości jest mocno reprezentowana w PA przez formułę $x_1 < x_2$.

Twierdzenie o reprezentowalności

Dowolna relacja $R \subseteq \mathcal{N}^n$ jest mocno reprezentowalna w PA wtedy i tylko wtedy, gdy jej funkcja charakterystyczna jest reprezentowalna w PA.

Dla dowolnej formuły φ języka PA i dowolnej liczby naturalnej n :
 $PA \vdash \varphi(0) \wedge \varphi(\bar{1}) \wedge \dots \wedge \varphi(\overline{n-1}) \wedge x < \bar{n} \rightarrow \varphi(x)$.

Dla dowolnej formuły φ języka PA i dowolnej liczby naturalnej n , jeżeli dla każdego $i < n$, $PA \vdash \neg\varphi(\bar{i})$ oraz $PA \vdash \varphi(\bar{n})$, to:
 $PA \vdash (\varphi(x) \wedge \forall y (y < x \rightarrow \neg\varphi(y))) \equiv (x = \bar{n})$.

Twierdzenie o reprezentowalności.

- Każda funkcja rekurencyjna jest reprezentowalna w PA.
- Każda relacja rekurencyjna jest mocno reprezentowalna w PA.

Hierarchia arytmetyczna

Z poprzedniego wykładu wiemy, że operacje kwantyfikatorów ograniczonych prowadzą od relacji rekurencyjnych do relacji rekurencyjnych.

Kwantyfikatory nieograniczone już nie mają tej własności — istotnie zwiększają stopień skomplikowania pojęć.

Można dokonać logicznej klasyfikacji pojęć uwzględniającej liczbę kwantyfikatorów nieograniczonych potrzebnych w ich definicjach.

Klasyfikacja ta przyjmuje postać hierarchii, której każde piętro ma nieskończenie wiele stopni.

Szczególnie istotne są dwa pierwsze piętra, nazywane:

- hierarchią arytmetyczną;
- hierarchią analityczną.

Hierarchia arytmetyczna

Definicja Hierarchii Arytmetycznej.

- $\Sigma_0^0 = \Pi_0^0 =$ zbiór relacji rekurencyjnych;
- Relacja $R \subseteq \mathcal{N}^k$ jest klasy Σ_{n+1}^0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje relacja $Q \subseteq \mathcal{N}^{k+1}$ klasy Π_n^0 taka, że $R(a_1, \dots, a_k) \equiv \exists x Q(a_1, \dots, a_k, x)$.
- Relacja $R \subseteq \mathcal{N}^k$ jest klasy Π_{n+1}^0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje relacja $Q \subseteq \mathcal{N}^{k+1}$ klasy Σ_n^0 taka, że $R(a_1, \dots, a_k) \equiv \forall x Q(a_1, \dots, a_k, x)$.

- Relacje klasy Σ_1^0 to dokładnie relacje rekurencyjnie przeliczalne.
- Relacja R jest rekurencyjna wtedy i tylko wtedy, gdy R oraz $\neg R$ są rekurencyjnie przeliczalne.

Hierarchia arytmetyczna

- Jeżeli relacja R jest klasy Σ_n^0 (odpowiednio, Π_n^0) zaś f_1, \dots, f_k są funkcjami rekurencyjnymi, to relacja P określona wzorem:

$$P(\vec{a}) \equiv R(f_1(\vec{a}), \dots, f_k(\vec{a}))$$

jest również klasy Σ_n^0 (odpowiednio, Π_n^0).

- Każda klasa hierarchii arytmetycznej jest zamknięta ze względu na koniunkcję i alternatywę.

Tu (i dalej) \vec{a} oznacza ciąg argumentów o takiej długości, ile argumentów ma rozważana relacja lub funkcja.

Dla dowolnego zbioru X relacji przez zbiór **uzupełnień** relacji z X rozumiemy zbiór $\mathcal{C}X$ zdefiniowany następująco: $R \in \mathcal{C}X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall \vec{a} (R(\vec{a}) \equiv \neg P(\vec{a}))$ dla pewnej relacji $P \in X$.

Hierarchia arytmetyczna

- Klasa Σ_n^0 jest identyczna z klasą uzupełnień relacji z klasy Π_n^0 i *vice versa*.
- Operacja kwantyfikatora ogólnego nie wyprowadza poza klasę Π_n^0 (dla $n > 0$).
- Operacja kwantyfikatora egzystencjalnego nie wyprowadza poza klasę Σ_n^0 (dla $n > 0$).

Prawdziwe są następujące inkluzje:

- $\Pi_n^0 \subseteq \Sigma_{n+1}^0$,
- $\Sigma_n^0 \subseteq \Pi_{n+1}^0$,
- $\Pi_n^0 \subseteq \Pi_{n+1}^0$,
- $\Sigma_n^0 \subseteq \Sigma_{n+1}^0$.

Hierarchia arytmetyczna

- Dla każdej klasy \sum_n^0 (odpowiednio, \prod_n^0) ($n > 0$) istnieje w \sum_n^0 (odpowiednio, \prod_n^0) relacja uniwersalna dla wszystkich relacji tej klasy.
 - Dla każdego $n > 0$: $\prod_n^0 \neq \sum_n^0$.
 - Dla każdego n : $\sum_n^0 \neq \sum_{n+1}^0$ oraz $\prod_n^0 \neq \prod_{n+1}^0$.
-
- Dla $n > 0$ relacja uniwersalna dla klasy \sum_n^0 należy do \sum_n^0 , ale nie należy ani do \prod_n^0 ani do \sum_{n-1}^0 .
 - Dla $n > 0$ relacja uniwersalna dla klasy \prod_n^0 należy do \prod_n^0 , ale nie należy ani do \sum_n^0 ani do \prod_{n-1}^0 .
 - Jeżeli relacja uniwersalna dla relacji klasy X sama należy do X , to $\mathcal{C}X \neq X$.

Hierarchia arytmetyczna

Przykład. Pojęcie **granicy ciągu** jest pojęciem klasy Π_3^0 (i nie jest pojęciem ani klasy Σ_3^0 ani Σ_2^0 ani Π_2^0):

$$a = \lim a_n \equiv \forall k \exists m \forall n (n > m \rightarrow |a_n - a| < \frac{1}{k+1}).$$

Przykład. Jak zobaczymy wkrótce, zbiór twierdzeń Arytmetyki Peana jest klasy Σ_1^0 , czyli jest rekurencyjnie przeliczalny (ale **nie** jest rekurencyjny!).

Przykład. Pojęcie **prawdy** nie może zostać scharakteryzowane na żadnym piętrze hierarchii arytmetycznej. Można udowodnić, że definicja tego pojęcia znajduje się na pierwszym piętrze **hierarchii analitycznej**.

Koniec

Na dziś wystarczy.

Na następnym wykładzie zobaczymy, jak w języku Arytmetyki Peana można mówić o samej Arytmetyce Peana.

Będzie to wstępem do prezentacji zapowiedzianych twierdzeń metalogicznych.