

Funkcje rekurencyjne (5)

(JiNoI III)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

28 marca 2007

Plan na dziś:

- Fraktale — intuicyjna charakterystyka.
- Fraktale — przykłady.

Dlaczego mówimy o fraktalach na tym wykładzie? Powody są co najmniej trzy:

- obiekty fraktalne mogą być generowane przez stosownie określone **algorytmy**;
- fraktale są obiektami powstającymi jako **granice** pewnych iterowanych operacji;
- w algorytmach generujących fraktale istotna jest **rekursywność** reguł.

Fraktale

Fraktale to obiekty, które mają cechę **samopodobieństwa** oraz ułamkowy wymiar Hausdorffa-Besicovitcha. Pierwszą własność dość łatwo objaśnić na przykładach, o drugą proszę się na razie nie martwić.

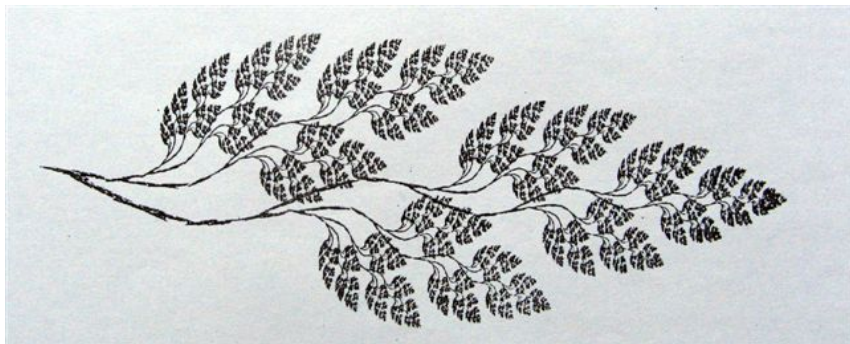
Obiekty fraktalne dostarczają przykładów **nieskończonej złożoności strukturalnej**. Im dokładniej przyglądamy się takim obiektom, tym więcej odnajdujemy szczegółów i na żadnym etapie nie widzimy **wszystkich** tych szczegółów. Nadto, na każdym z tych etapów napotykamy pewien stały wzorzec, przynależny wyjściowej całości.

Fraktale znane są od dość dawna: np. **krzywa Peana** (wypełniająca kwadrat), **dywan Sierpińskiego**, **zbiór Cantora**. Od kilkadziesiąt lat matematyka fraktali znajduje wiele zastosowań w przyrodoznawstwie. Nadto, gdy rozejrzysz się dokładnie dookoła, to okaże się, iż prawie wszystko jest fraktalem (dokładniej: aproksymacją fraktala). Ale nie bój się, ja czuwam i nie dam Ci zrobić krzywdy.

Paprotka



Jeszcze jedna paprotka



Twierdzenia o punkcie stałym

Przypomnijmy, że:

- **punktem stałym** funkcji $f : X \rightarrow X$ nazywamy taki element $x \in X$, dla którego $f(x) = x$.
- $f : X \rightarrow X$ jest odwzorowaniem **zwężającym**, gdy istnieje liczba $\lambda \in (0, 1)$ taka, że dla wszystkich $x, y \in X$ zachodzi nierówność $\delta(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot \delta(x, y)$, gdzie X jest przestrzenią metryczną zupełną z metryką δ .

Twierdzenie Banacha o punkcie stałym głosi, że dowolne przekształcenie zwężające przestrzeni metrycznej zupełnej w siebie ma dokładnie jeden punkt stały.

Tak więc, gdy położysz na ziemi np. w Poznaniu mapę tego miasta, to dokładnie jeden punkt na mapie będzie znajdował się „na swoim miejscu”. Twierdzenia o punktach stałych mają wiele ważnych zastosowań w analizie i topologii.

Twierdzenie Hutchinsona

W 1981 roku Hutchinson udowodnił następujące twierdzenie:

- THEOREM 1. Let $\mathcal{X} = (X, d)$ be a complete metric space and $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ be a finite set of contraction maps on X . Then there exists a unique closed bounded set K such that $K = \bigcup_{i=1}^N S_i K$. Furthermore, K is compact and is the closure of the set of fixed points $s_{i_1 \dots i_p}$ of finite compositions $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}$ of members of \mathcal{S} .

Korzystając z tego twierdzenia można określać fraktale właśnie jako punkty stałe pewnych odwzorowań.

Przekształcenia afiniczne

Algorytm generowania fraktali wykorzystuje układy iterowanych odwzorowań oraz twierdzenia o punkcie stałym.

Odwzorowania te to najczęściej zwężające transformacje afiniczne.

Transformacja afiniczna to złożenie przesunięć, obrotów oraz skalowania.

Równanie macierzowe takiej transformacji (na płaszczyźnie) to:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + c \\ dx + ey + f \end{bmatrix}$$

Współczynniki c i f reprezentują przesunięcie o pewien wektor, a a , b , d oraz e reprezentują obrót i skalowanie.

W transformacji afinicznej najpierw dokonujemy skalowania, potem obrotu i na końcu translacji.

Przekształcenia afiniczne

Równanie macierzowe transformacji afinicznej, w której:

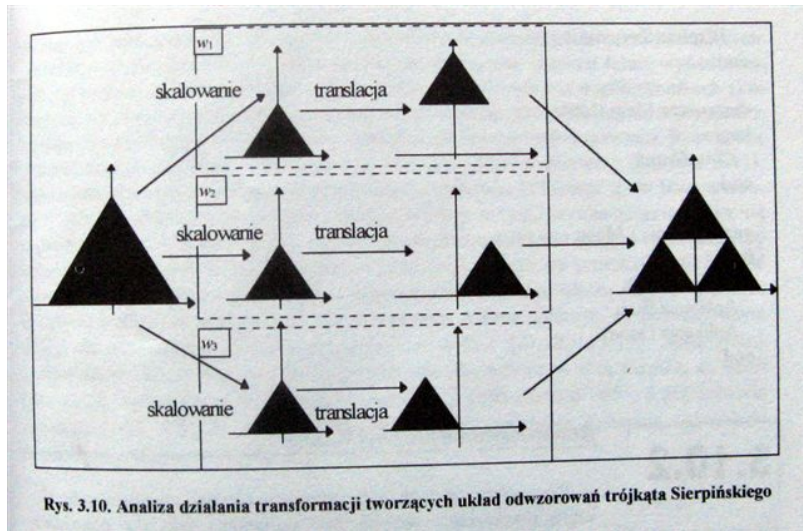
- współczynnik skalowania (względem poszczególnych osi) jest określony parą liczb δ_1, δ_2 ;
- obrót jest wyznaczony przez kąty φ_1, φ_2 osi nowego układu do osi starego układu, odpowiednio;
- przesunięcie jest dane wektorem o współrzędnych t_1, t_2 ;

ma zatem postać:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1) & -\sin(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \cos(\varphi_1)x - \delta_2 \sin(\varphi_2)y + t_1 \\ \delta_1 \sin(\varphi_1)x + \delta_2 \cos(\varphi_2)y + t_2 \end{bmatrix}$$

Przekształcenia afiniczne



Wymiar fraktalny

Wymiar topologiczny. Można w precyzyjny sposób zdefiniować **wymiar** tak, aby:

- **jednowymiarowe** były: linia prosta, okrąg, odcinek, itd.;
- **dwuwymiarowe** były: koło, kwadrat, płaszczyzna euklidesowa, itd.;
- **trójwymiarowe** były: kula, sześcian, torus, itd.;
- **zerowymiarowe** były: punkt, skończony zbiór punktów, itd.

Jednak pewnym obiektom nie przysługuje wymiar będący liczbą całkowitą. Właśnie **fraktale** charakteryzują się wymiarem, który może być (dowolną) liczbą rzeczywistą.

Idea wyznaczania owego **wymiaru fraktalnego** jest podobna do tejże dla wymiaru topologicznego; dla naszych celów nie jest potrzebne jej przedstawianie (zob. Dodatek 1).

Dość przystępnie o wymiarze fraktalnym napisano np. w:

- Piotr Pierański *Fraktale. Od geometrii do sztuki*. Ośrodek Wydawnictw Naukowych, Poznań, 1992.

O generowaniu fraktali

Jedną z możliwości prostego opisu (generowania) obiektów fraktalnych jest wykorzystanie:

- L-systemów (Aristid Lindenmayer, 1968);
- Grafiki żółwia (Seymour Papert, język Logo).

Przystępny wykład (z którego i my korzystamy) znaleźć można w:

- Tomasz Martyn *Fraktale i obiektowe algorytmy ich wizualizacji*, Wydawnictwo Nakom, Poznań, 1996.

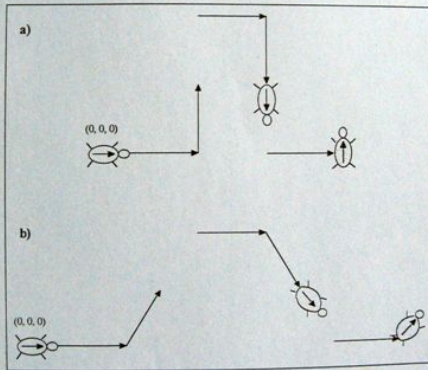
Polecam również np.:

- Peitgen, H.O., Jürgens, H., Saupe, D. *Granice chaosu. Fraktale*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996 (2), 1997 (1).

Grafika żółwia i generowanie fraktali

$$\begin{aligned}
 F(x, y, \alpha) &= (x + l \cos \alpha, y + l \sin \alpha, \alpha), \\
 f(x, y, \alpha) &= (x + l \cos \alpha, y + l \sin \alpha, \alpha), \\
 + (x, y, \alpha) &= (x, y, \alpha + \delta), \\
 - (x, y, \alpha) &= (x, y, \alpha - \delta),
 \end{aligned}$$

gdzie l oznacza długość kroku, a δ kąt obrotu. W L-systemie przyjmuje się za początkowy stan żółwia stan $(0, 0, 0)$.



Rys. 4.2. Interpretacja ciągu symboli $F + Ff - F - Ff + F+$
 a) dla kąta obrotu $\delta = 90^\circ$, b) dla kąta obrotu $\delta = 45^\circ$

Grafika żółwia i generowanie fraktali

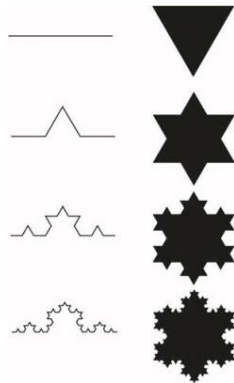
Interpretacja symboli:

- F oznacza krok żółwia z pozostawieniem śladu;
- f oznacza krok żółwia bez pozostawiania śladu;
- $+$ oznacza obrót żółwia przeciwnie do ruchu wskazówek zegara o ustalony kąt;
- $-$ oznacza obrót żółwia zgodnie z ruchem wskazówek zegara o ustalony kąt;
- współczynnik zmiany długości kroku określa, jak długość kroku żółwia na $n + 1$ etapie konstrukcji ma się do tejże długości na etapie n ;
- $X \rightarrow Y$ jest regułą przepisywania: ciąg symboli X zastąp ciągiem symboli Y .

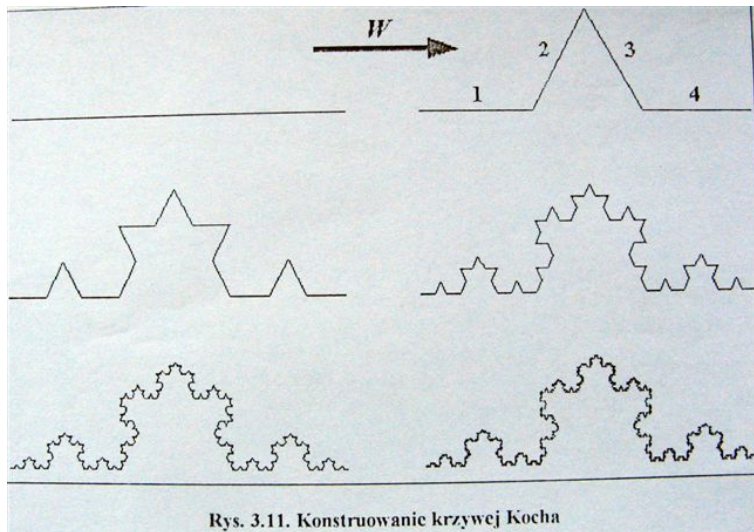
Współrzędne żółwia to układ: (x, y, α) , gdzie x jest odcięta, y rzędną, a α kątem nachylenia względem osi odciętych. Na początku konstrukcji współrzędne żółwia są równe $(0, 0, 0)$.

Samopodobieństwo

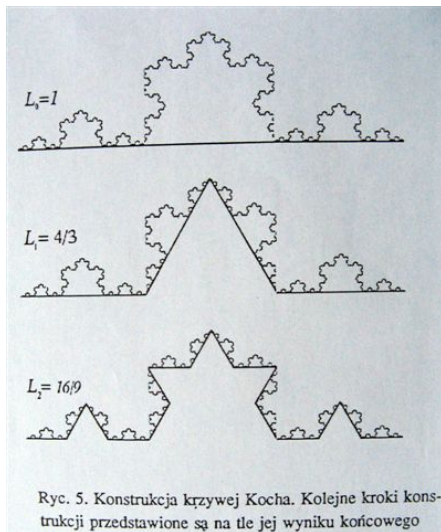
Cechę samopodobieństwa, definiującą fraktale, łatwo zaobserwować w procesie **konstruowania** obiektu fraktalnego. Spójrzmy, jak powstaje **płatunek śniegu Kocha**:



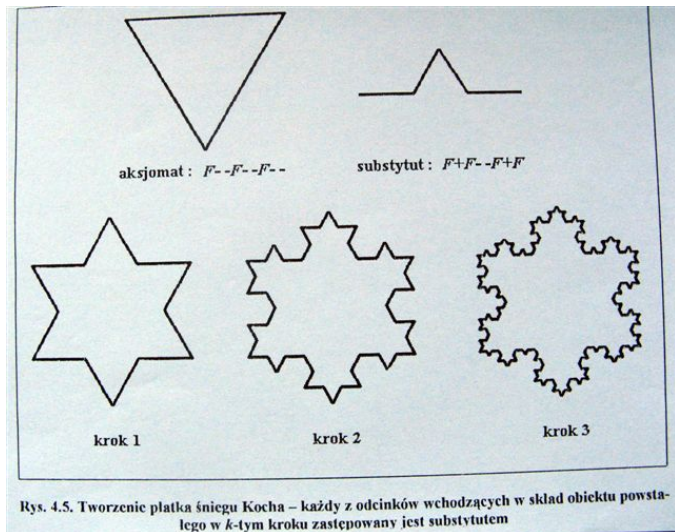
Krzywa Kocha



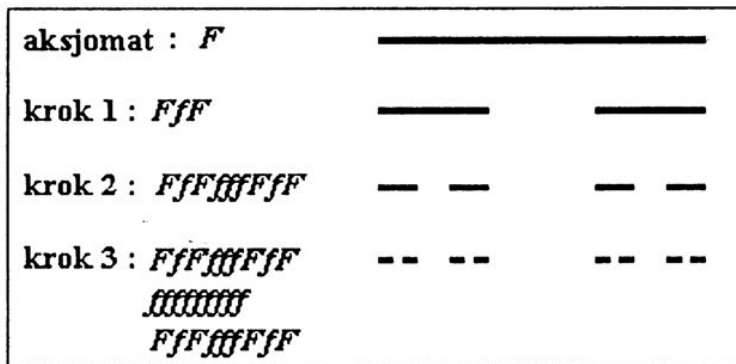
Krzywa Kocha



Płatek śniegu Kocha

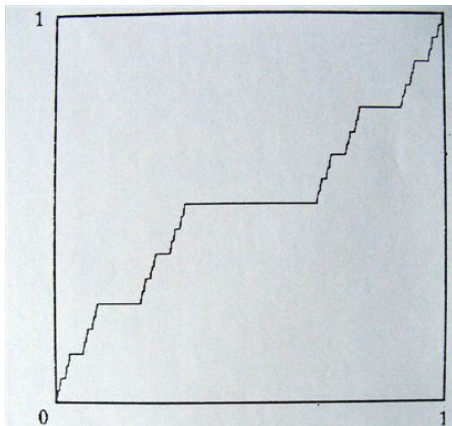


Zbiór Cantora



Rys. 4.4. Kolejne kroki powstawania zbioru Cantora

Diabelskie schody



Ryc. 4. Diabelskie schody. Gdyby chciał je pokonać stawiając stopę na każdym stopniu, nie starczyłoby wieczności

Zbiór Cantora

Zbiór Cantora jest częścią wspólną zbiorów otrzymywanych w kolejnych krokach konstrukcji; jest zatem generowany przez:

- Aksjomat: F
- Reguły:
 - $F \rightarrow FfF$
 - $f \rightarrow fff$

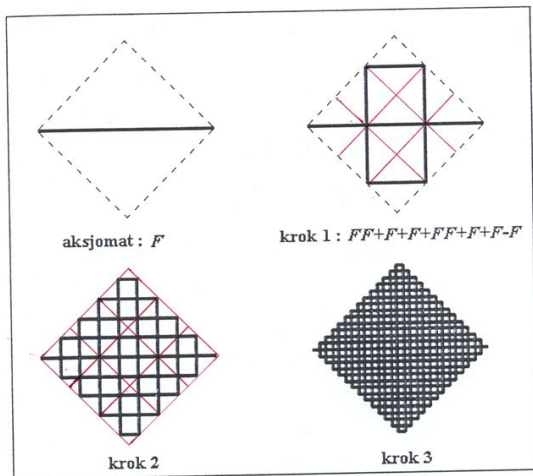
Współczynnik zmniejszania długości kroku wynosi $\frac{1}{3}$.

W rozwinięciu trójkowym elementy zbioru Cantora dane są przez wzór:

$$x = d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cdot 3^{-k}.$$

Zbiór Cantora ma nieprzeliczalnie wiele elementów. Nie zawiera jednak w sobie żadnego odcinka.

Krzywa Peana



Rys. 4.6. Konstrukcja krzywej Peana – każdy z odcinków obiektu zastępowany jest substytutem widocznym w kroku pierwszym

Krzywa Peana

Krzywa Peana jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych, a więc jest funkcją ciągłą.

Zbiór jej wartości wypełnia kwadrat (jednostkowy).

Nadto, każdy punkt wnętrza kwadratu jest wartością nieskończenie wielu argumentów tej funkcji, czyli jej wykres „przecina się” z sobą w każdym takim punkcie.

Krzywa Peana nie jest różniczkowalna w żadnym punkcie.

- Aksjomat: F

- Reguły:

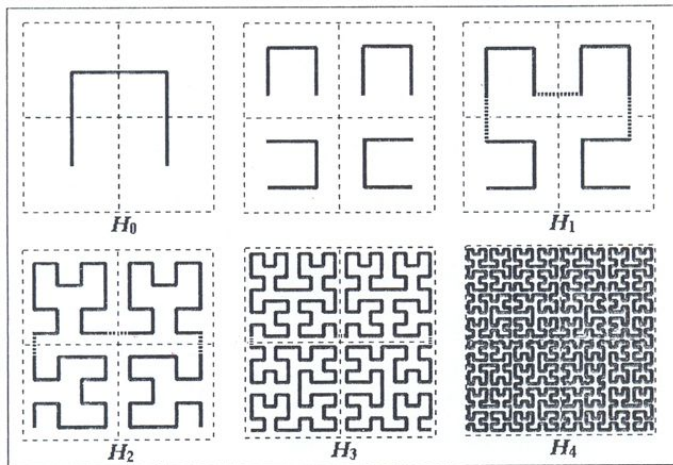
- $F \rightarrow FF + F + F + FF + F + F - F$

- $+ \rightarrow +$

- $- \rightarrow -$

Kąt obrotu jest równy 90° , a współczynnik zmniejszania długości kroku $\frac{1}{3}$.

Krzywa Hilberta

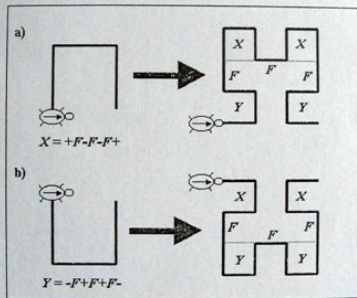


Rys. 4.7. Klasyczna konstrukcja krzywej Hilberta – grubą linią przerywaną zaznaczono miejsca połączeń

Krzywa Hilberta

Aksjomat : X Reguły : $X \rightarrow + Y F - X F X - F Y +$ $Y \rightarrow - X F + Y F Y + F X -$ $F \rightarrow F$ $+ \rightarrow +$ $- \rightarrow -$

gdzie $X = +F-F-F+$, $Y = -F+F+F-$, z kątem obrotu $\delta = 90^\circ$ i współczynnikiem zmniejszenia długości kroku równym $1/2$.



Rys. 4.8. L-systemowe reguły tworzenia krzywej Hilberta

Krzywa Hilberta

Krzywa Hilberta jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych, a więc jest funkcją ciągłą.

Zbiór jej wartości wypełnia kwadrat (jednostkowy).

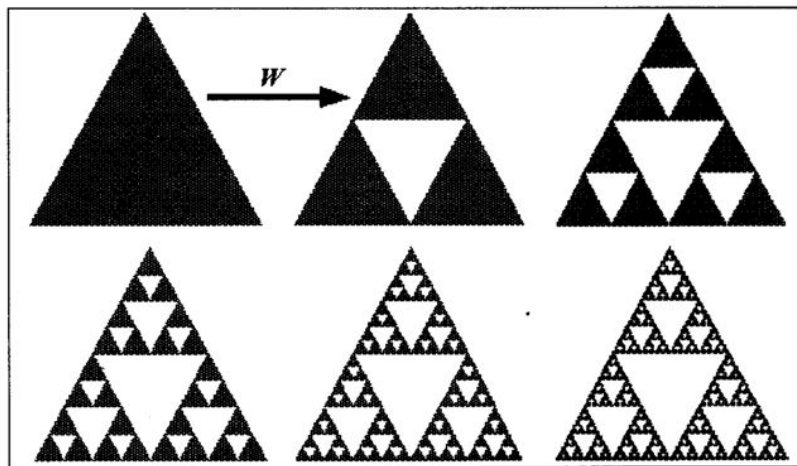
Nadto, każdy punkt kwadratu jest wartością dokładnie jednego argumentu tej funkcji, czyli jej wykres „nie przecina się” z sobą w żadnym punkcie.

Krzywa Hilberta nie jest różniczkowalna w żadnym punkcie.

- Aksjomat: X
- Reguły:
 - $X \rightarrow +YF - XFX - FY +$
 - $X \rightarrow -XF + YFY + FX -$
 - $F \rightarrow F$
 - $+ \rightarrow +$
 - $- \rightarrow -$

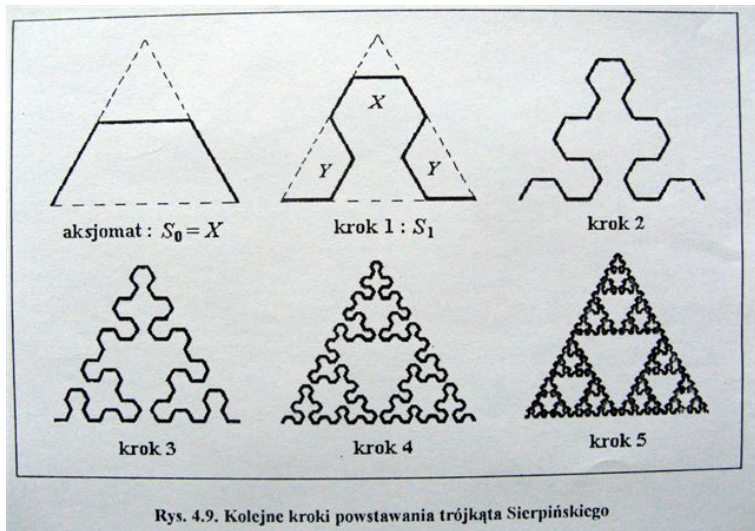
$X = +F - F - F+$, $Y = -F + F + F-$. Kąt obrotu jest równy 90° , a współczynnik zmniejszania długości kroku $\frac{1}{2}$.

Trójkąt Sierpińskiego



Rys. 3.9. Efekt kolejnych kroków iteracji układu odwzorowań trójkąta Sierpińskiego

Trójkąt Sierpińskiego



Trójkąt Sierpińskiego

Trójkąt Sierpińskiego jest granicą (iloczynem mnogościowym) zbiorów otrzymanych w poszczególnych krokach. Ma nieprzeliczalnie wiele elementów. Nie zawiera żadnego koła o niezerowym promieniu.

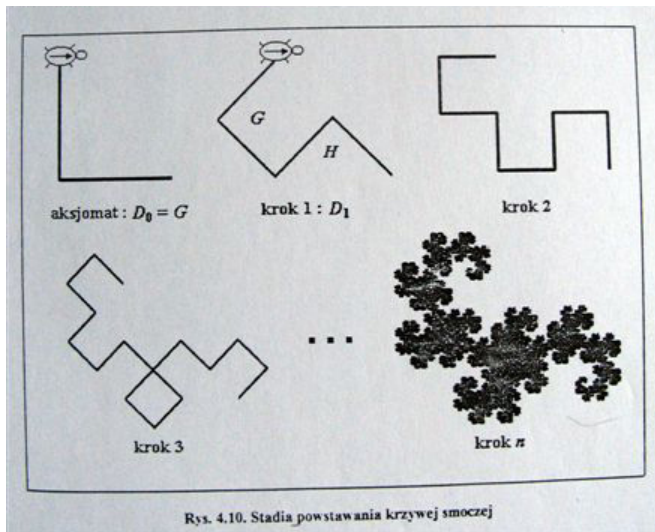
- Aksjomat: X
- Reguły:
 - $X \rightarrow +Y - X - Y+$
 - $Y \rightarrow -X + Y + X-$
 - $+ \rightarrow +$
 - $- \rightarrow -$

$X = +F - F - F+$, $Y = -F + F + F-$.

Kąt obrotu jest równy 60° , a współczynnik zmniejszania długości kroku $\frac{1}{2}$.

Ćwiczenie. Weź kwadrat zamiast trójkąta. Podaj odpowiednie aksjomaty i reguły („wyrzucamy” środkowy kwadrat z dziewięciu). Otrzymasz **dywan Sierpińskiego**. W trzech wymiarach (wychodzimy od sześcianu) otrzymasz **gąbkę Sierpińskiego**.

Krzywa smocza



Krzywa smocza

- Aksjomat: X
- Reguły:
 - $X \rightarrow -X ++Y$
 - $Y \rightarrow X --Y+$
 - $+ \rightarrow +$
 - $- \rightarrow -$

$$X = --F ++F, Y = F --F ++.$$

Kąt obrotu jest równy 45° , a współczynnik zmniejszania długości kroku $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Krzywa smocza wypełnia figurę, której brzeg ma niecałkowity wymiar Hausdorffa-Besicovitcha.

Ćwiczenie. Wychoduj swojego smoka.

Struktury rozgałęzione

W symbolice L-systemów reprezentować można także struktury rozgałęzione.

Niech symbol „[” oznacza początek rozgałęzienia, a „]” jego koniec. Interpretacja tych symboli w grafice żółwia polega na zapamiętaniu bieżącego stanu żółwia w przypadku wystąpienia symbolu „[” oraz przywróceniu ostatnio zapamiętanego stanu w przypadku wystąpienia symbolu „]”.

Dla przykładu: $FF[+F]F[-F]F$ oznacza strukturę składającą się z odcinka o długości czterech kroków żółwia, z dwoma rozgałęzieniami: w lewo (w połowie odcinka), w prawo (w $\frac{3}{4}$ odcinka).

Ćwiczenie. Narysuj np. pięć etapów wzrostu roślinki wyznaczonej przez:

Aksjomat: F Reguły: $F \rightarrow F[+F]F[-F]F$

$+ \rightarrow +$

$- \rightarrow -$

Kąt obrotu niech będzie równy 45° , a współczynnik zmniejszania długości kroku $\frac{1}{2}$.

To były tylko bardzo elementarne informacje o fraktalach. Do omówienia ich dalszych, ważnych własności potrzebne jest przygotowanie matematyczne wykraczające poza programy studiów w Instytucie Językoznawstwa UAM.

To, co najważniejsze do zapamiętania o fraktalach (na potrzeby tego kursu):

- są to obiekty, które powstają jako elementy graniczne pewnych iterowanych operacji;
- lokalna struktura fraktala jest (na każdym poziomie) odzwierciedleniem jego struktury globalnej;
- fraktale są obiektami o nieskończonej złożoności (czasem mówi się: subtelności) strukturalnej.

Uwaga. Mówimy o *powstawaniu* lub *konstrukcji* fraktali jako obiektów **matematycznych**. Nie oznacza to oczywiście, że Natura stosuje takie same (jak my) metody konstrukcji.

Wymiary — uproszczone definicje

O wymiarze **topologicznym**.

Liczba $N(\varepsilon)$ kwadratów o boku ε potrzebnych do pokrycia **odcinka** jest proporcjonalna do ε i wynosi $N(\varepsilon) = L\varepsilon^{-1}$, gdzie L jest współczynnikiem proporcjonalności. Dla $\varepsilon \rightarrow 0$ wartość L jest zatem długością mierzonego odcinka:

$$L = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon)\varepsilon.$$

Liczba $N(\varepsilon)$ kwadratów o boku ε potrzebnych do pokrycia **kwadratów** jest proporcjonalna do ε^2 . Pole S kwadratu jest równe sumie pól pokrywających go kwadratów o boku $\varepsilon \rightarrow 0$, czyli:

$$S = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon)\varepsilon^2.$$

Zauważmy, że dla kwadratu mamy:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon)\varepsilon = \infty.$$

Wymiar topologiczny (dla figur ograniczonych) charakteryzujemy jako wykładnik potęgi przy ε , dla którego rozważane granice są skończone.

Wymiary — uproszczone definicje

O wymiarze **pojemnościowym** (na płaszczyźnie).

Pewne figury nie mają całkowitego wymiaru topologicznego w powyższym rozumieniu.

Proponuje się przypisać im taki wymiar d , dla którego zachodzi

$$N(\varepsilon)\varepsilon^d = 1.$$

Ponieważ wtedy $N(\varepsilon) = \varepsilon^{-d}$, więc:

$$d = -\lg_{\varepsilon} N(\varepsilon) = -\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} = \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}.$$

Wymiarem pojemnościowym obiektu geometrycznego X nazywa się liczbę:

$$\dim(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}.$$

Mamy wtedy np.:

- dla zbioru Cantora:

$$\dim(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,6309297535715 \dots$$

- dla trójkąta Sierpińskiego:

$$\dim(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 3^n}{\ln 2^n} = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1,584962500721 \dots$$

Wymiary — uproszczone definicje

O wymiarze **fraktalnym** (wymiarze **Hausdorffa-Besicovitcha**).

W ogólności, w pokryciach figur używa się kul o dowolnych promieniach.

Niech B_X oznacza rodzinę wszystkich pokryć obiektu X dowolnymi kulami, a B_X^ε rodzinę wszystkich pokryć X kulami o średnicy nie większej niż ε .

Dalej, niech:

$$\alpha_X(d, \varepsilon) = \inf \left\{ m : b \in B_X^\varepsilon \wedge m = \sum_{a \in b} (\Delta a)^d \right\}$$

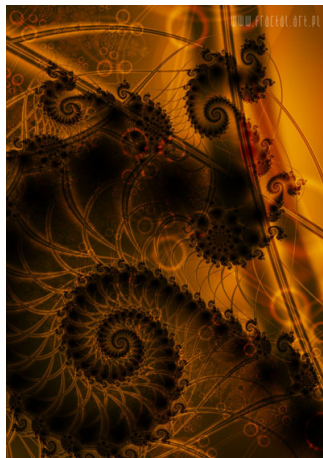
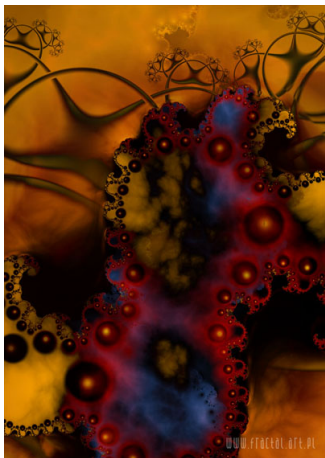
gdzie $\Delta(a)$ jest średnicą kuli a .

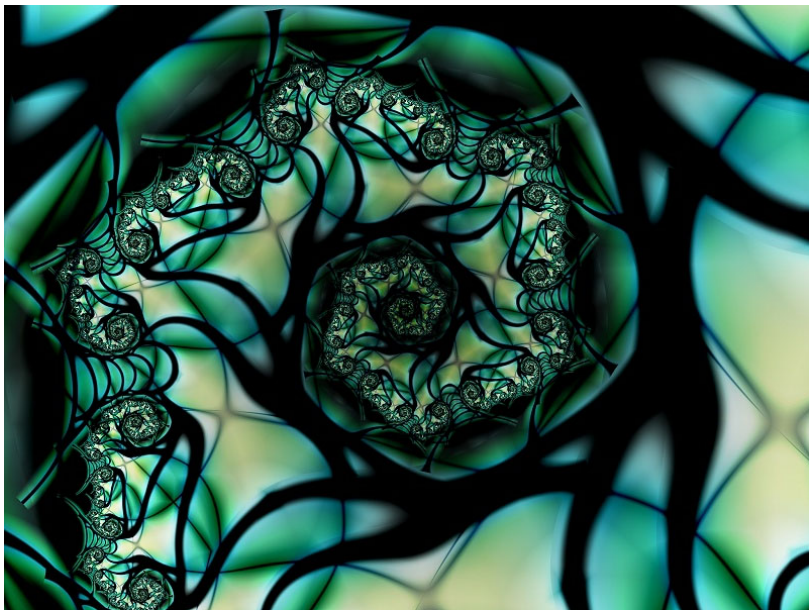
Zauważmy, że jeśli zbiór X pokrywamy kulami o jednakowej średnicy ($= \varepsilon$), to $\alpha_X(d, \varepsilon) = N(\varepsilon)\varepsilon^d$, gdzie $N(\varepsilon)$ jest liczbą użytych kul.

Wymiarem Hausdorffa-Besicovitcha $Dim(X)$ zbioru X nazywamy taką liczbę d_0 , dla której granica $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(d_0, \varepsilon)$ ma skończoną wartość dodatnią.

W ogólności mamy: $Dim(X) \leq dim(X)$.

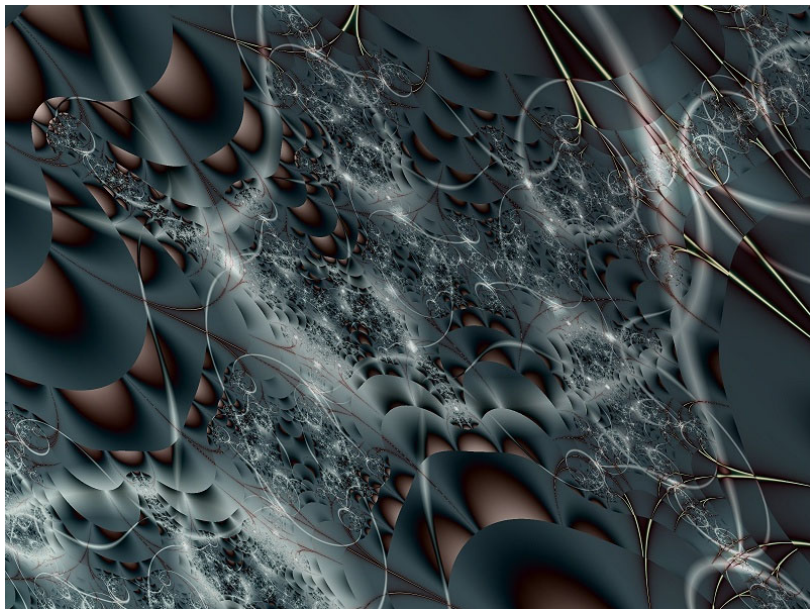


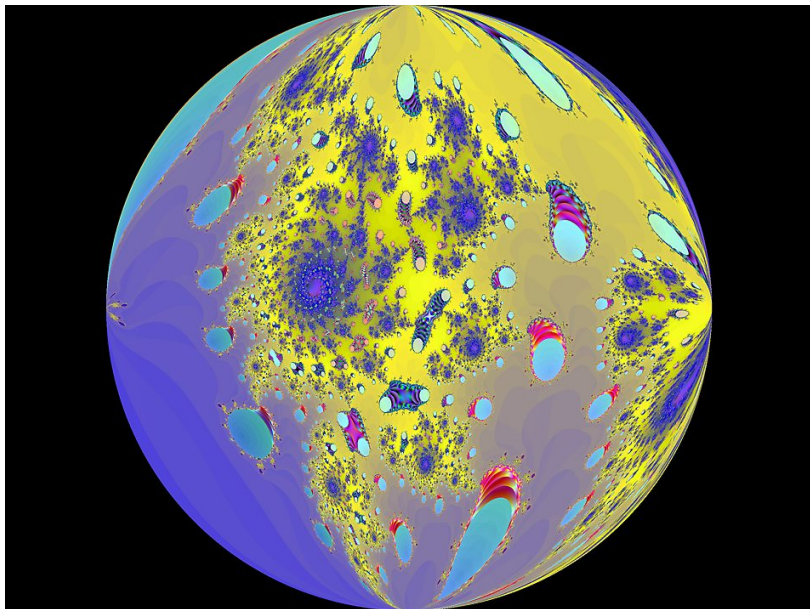






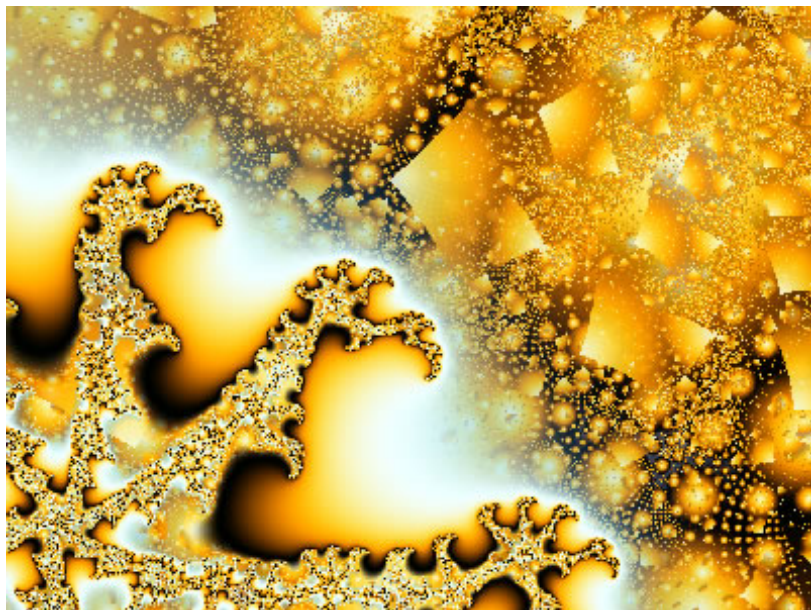
www.fractovia.org

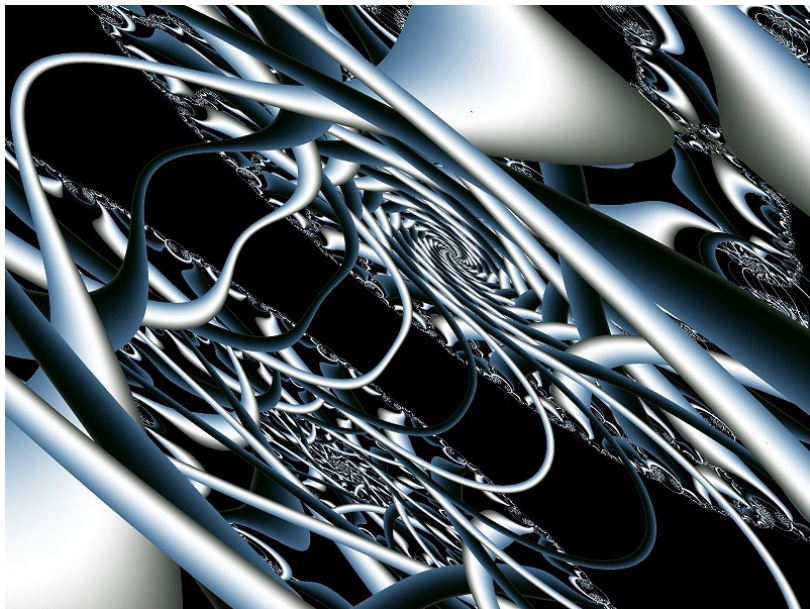




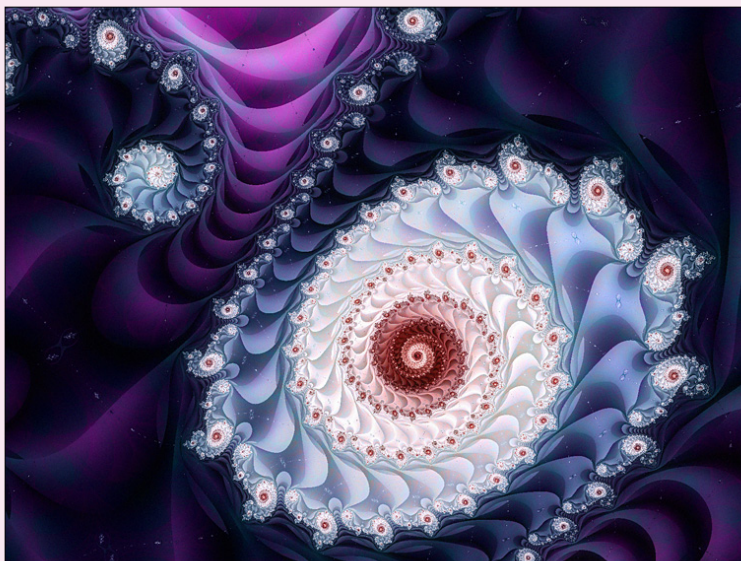












fractalia.org

