Wyobraźnia matematyczna

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

2017

Czy masz wyobraźnię matematyczną?

- Każdy z nas ma wyobraźnię matematyczną.
- Ważne: w jakim zakresie i w jaki sposób z niej korzystamy.
- Nagroda: satysfakcja poznawcza, ozdrowienie ze złudzeń.
- Wyobraźnia matematyczna a myślenie szybkie i wolne. Kilka klasycznych ilustracji:

- *Butelka z korkiem.*
- *Brakujący dolar.*
- *Wyścig profesorów.*
- *Sznurek dookoła Ziemi.*
- *Wędrówki niedźwiedzia.*

Czy masz wyobraźnię matematyczną?

Butelka z korkiem. Butelka z korkiem kosztuje $1,10$ zł. Butelka jest o złotówkę droższa od korka. Ile kosztuje butelka, a ile korek?
Niech cena korka w groszach wynosi x. Wtedy ceną butelki jest $x + 100$. Butelka wraz z korkiem kosztuje 110 groszy, a zatem: $(x + 100) + x = 110$, czyli $x = 5$. Korek kosztuje 5 groszy, a butelka (bez korka) 105 groszy.
Brakujący dolar. Do hotelu przybyło trzech gości i zdecydowali się wynająć wspólny pokój. Hotelarz zażądał 30 dolarów, a więc każdy z gości dał 10 i zajęli pokój. Nieco później hotelarz (można przypuszczać, że był protestantem) uznał, że zażądał zbyt wiele i ustalił cenę za pokój równą 25 dolarów. Wręczył 5 dolarów chłopcu hotelowemu z poleceniem, aby zwrócił tę kwotę gościom. Chłopiec (można przypuszczać, że nie był protestantem) zatrzymał dla siebie dwa dolary, a pozostałe trzy wręczył gościom, każdemu po dolarze. Policzmy teraz: każdy z gości zapłacił ostatecznie za pokój dziewięć dolarów, co daje razem 27 dolarów, a chłopiec zatrzymał dwa dolary, a więc w sumie mamy 29 dolarów. Gdzie zniknął brakujący dolar?

Wędrówki pieniędzy

Hotelarz ma:	Chłopiec ma:	Goście mają:	Etap:
0	0	30	Goście przychodzą do hotelu
30	0	0	Goście płacą za hotel
25	5	0	Hotelarz daje piątkę chłopcu
25	2	3	Chłopiec daje trójkę gościom.

Na końcu tej przygody hotelarz ma zatem 25 dolarów, chłopiec ma 2 dolary (czyli obaj łącznie mają 27 dolarów), a goście mają 3 dolary. Ponieważ $25 + 2 + 3 = 30$, więc wszystko się zgadza, nie ma żadnego „brakującego” dolara.

Stare i młode niedźwiedzie

- *Wyścig profesorów*. Gdy prof. U. kończy wyścig na 100m, to prof. W. ma jeszcze 10m do mety, a gdy prof. W. kończy, to prof. P. ma jeszcze 10m do mety (każdy biegnie ze swoją stałą prędkością). Jak daleko był U. przed P., gdy U. ukończył wyścig?
- *Sznurek dookoła Ziemi*. Obwód Ziemi to ok. 40000km. Opasujemy Ziemię ciasno sznurkiem, a potem dodajemy do sznurka 12m i tworzymy okrąg luźno opasujący Ziemię. Czy ten luz wystarczy, aby przepełzła pod sznurkiem mrówka? Aby przeczołgał się pod nim Kot Prezesa? Aby dumnie wyprostowany przeszedł pod nim sam Prezes?
- *Wędrówki niedźwiedzia*. Podróżnik maszerował kilometr na południe, potem kilometr na wschód, wreszcie kilometr na północ i wrócił do punktu wyjścia. Gdzie był ten punkt?

Wstajemy z kolan

- *Wyścig profesorów*. Prędkości: $v_W = \frac{9}{10} \cdot v_U$, $v_P = \frac{9}{10} \cdot v_W$, czyli $v_P = (\frac{9}{10})^2 \cdot v_U = \frac{81}{100} \cdot v_U$. Gdy U. triumfuje, P. ma jeszcze 19m do mety.
- *Sznurek dookoła Ziemi*. Niech r będzie promieniem kuli, a długością dodanego sznurka, x szukaną wysokością. Wtedy: $2 \cdot \pi \cdot (r + x) = 2 \cdot \pi \cdot r + a$, czyli $x = \frac{a}{2 \cdot \pi}$. Dla $a = 12$m nawet Prezes przejdzie w podskokach.
- *Wędrówki niedźwiedzia*. Biegun Północny to zwykle podawane rozwiązanie. Jest jednak nieskończenie wiele innych poprawnych rozwiązań. Wskazówki: pomyśl też o okolicach Bieguna Południowego i przypomnij sobie powieści podróżnicze Juliusza Verne'a.

Odkrycie i uzasadnienie

- Proto-intuicje (intuicje przededukacyjne), związane z naszym uposażeniem poznawczym: np. *subitacja*, odróżnienie *wewnątrz – na zewnątrz*.
- Intuicje wykształcone przez przemoc symboliczną szkoły: np. *oś liczbowa*.
- Zaawansowane intuicje profesjonalnych matematyków.

- Umiejętności algorytmiczne.
- Dowodzenie (kontekst uzasadnienia) jest potwierdzaniem intuicji (kontekst odkrycia). Publikowany wynik matematyczny nie ukazuje kontekstu odkrycia (styl Gaussa a nie styl Eulera).

Czekając na Leśniczego

- Czarownica złapała Jasioła i Mgłosię. Każde z nich ma w odosobnieniu rzucić monetą i podać wynik rzutu drugiego. Jeśli oboje pomylą się, zostaną pożarci. Jeśli co najmniej jedno odgadnie wynik drugiego, przeżyją dany dzień. Jasiołowi udało się szepnąć Mgłosi, co powinni mówić, aby odwlekać pożarcie. Jaką strategię zaproponował?

- *Konkurs piękności*. Każda z grupy osób ma wybrać w sekrecie liczbę od 0 do 20. Wygrają te osoby, których liczba jest najbliższa dwóch trzecich średniej arytmetycznej wszystkich podanych liczb. Kto wygra?
- *Dzielenie łupów*. Piraci A, B, C dzielą łup 100 sztuk złota. Proponują podział w porządku swojej rangi ($A > B > C$). Jeśli propozycja nie zostaje przyjęta większością głosów, jej autor ląduje za burtą (i proponuje następny rangą, głos ważniejszego decyduje). Jak podzielą się łupem (ceniąc własne życie bardziej od złota)?

Głodna czarownica, przekora, przekupstwo

Mgłosia ma podać swój wynik (jako wynik Jasioła), a Jasioł wynik odwrotny do swojego (jako wynik Mgłosi):

Wynik M:	Wynik J:	M mówi:	J mówi:	Trafia:
O	O	O	R	M
R	R	R	O	M
R	O	R	R	J
O	R	O	O	J

- *Konkurs piękności*. Jeśli wszyscy wybiorą tę samą liczbę, to wszyscy wygrywają. A co pokazały eksperymenty?
- *Dzielenie łupów*. *A* powinien pozyskać głos *C*. Ciekawie robi się, gdy piratów jest więcej: zob. Stewart, I. 1999. A puzzle for pirates. *Scientific American*, May 1999, 98–99.

Łyżwiarki i parasole

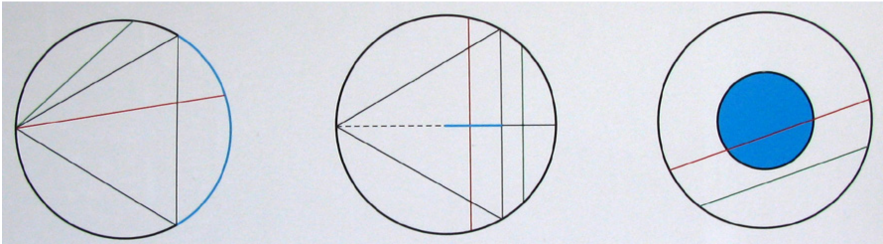
- *Mucha i kropla miodu*. Mucha na zewnątrz powierzchni bocznej szklanki, kropla miodu wewnątrz tej powierzchni. Podaj najkrótszą drogę dreptania muchy do kropli.
- *Obłe otoczaki*. Nazwijmy *średniczką* figury mającej środek symetrii dowolny odcinek łączący jej brzegi, przechodzący przez ów środek symetrii. Czy figura o wszystkich średniczkach równych jest kołem?
- *Ósemki na płaszczyźnie*. Pamiętasz, że rozłącznych *okręgów* na płaszczyźnie jest tyle samo, co liczb rzeczywistych. Ile rozłącznych *ósemek* ∞ narysować można na płaszczyźnie?
- *Paradoks Bertranda*. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana cięciwa okręgu jest dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg?

Niekonwencjonalni cykliści

- *Mucha i kropla miodu*. Rozwijamy powierzchnię boczną walca i korzystamy z twierdzenia Herona.
- *Obłe otoczaki*. Niekoniecznie: zob. *wielokąty Reuleaux*. Konstrukcja *trójkąta Reuleaux*: z wierzchołków trójkąta równobocznego zakreśl łuki o promieniu równym długości boku trójkąta.

- *Ósemki na płaszczyźnie*. Każdej ósemce przyporządkujmy parę punktów o obu współrzędnych wymiernych, po jednym takim punkcie wewnątrz każdej z pętli tej ósemki. Wtedy żadne dwie ósemki nie mogą mieć wspólnej takiej pary punktów. Par liczb wymiernych jest przeliczalnie wiele (tyle samo, co liczb naturalnych).
- *Paradoks Bertranda*. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ lub $\frac{1}{4}$, w zależności od wybranej miary (czyli ustalenia przestrzeni probabilistycznej).

Paradoks Bertranda



1. $\frac{1}{3}$: wykorzystujemy długość łuku.
2. $\frac{1}{2}$: wykorzystujemy długość odcinka.
3. $\frac{1}{4}$: wykorzystujemy pole.

Rysunek z: Ciesielski, K., Pogoda, Z. 2013. *Królowa bez nobla. Rozmowy o matematyce*. Demart, Warszawa, 229.

Rodzaje nieskończoności

Pytania:

- Nieskończenie duże?
- Nieskończenie małe?
- Nieskończenie złożone?

Odpowiedzi:

- Teoria mnogości
- Analiza niestandardowa
- Struktury niearchimedesowe
- Złożoność obliczeniowa

Klasyczne zagadki dotyczące nieskończoności

- Nieskończone łapówki
- Aporie Zenona
- Supertasks
- Hotel Hilberta
- Gra Smullyana

- Spirale
- Róg Gabriela
- Wypełnianie przestrzeni
- Krzywe patologiczne
- Zbiór Cantora

Te oraz bardziej złożone przykłady omówimy na dalszych wykładach.

Nauczyciel zapowiada uczniom w poniedziałek: *Któregoś dnia w tym tygodniu będzie egzamin. Będzie niespodziewany, w tym sensie, że w dniu poprzedzającym nie będziecie wiedzieli, że następnego dnia jest egzamin.* Uczniowie rozumują wtedy tak: w piątek nie może być egzaminu, bo wtedy w czwartek wiedzielibyśmy, że egzamin będzie w piątek. A więc piątek odpada. Skoro tak, to i w czwartek nie może być egzaminu, bo w przeciwnym razie wiedzielibyśmy o tym już w środę. I tak dalej, ostatecznie uczniowie konkludują, że żadnego dnia w tym tygodniu egzaminu być nie może. Wtedy nauczyciel ogłasza, że właśnie dziś przeprowadza egzamin. Oczywiście, egzamin ten *jest* niespodziewany.

W istocie, profesor powiedział dwie rzeczy:

1. Któregoś dnia w tym tygodniu będziesz zdawał egzamin.
2. Rankiem w dniu egzaminu nie będziesz wiedział, że jest to właśnie dzień egzaminu.

Sądzę, że ważne jest, aby te dwa stwierdzenia oddzielić od siebie. *Mogło* być tak, że profesor miał rację w pierwszym stwierdzeniu, a nie miał jej w drugim. W piątek rano nie mógłbym bez popadania w sprzeczność wierzyć, że profesor miał rację w obu stwierdzeniach, ale mógłbym bez sprzeczności wierzyć w jego pierwsze stwierdzenie. Jeśli tak jednak uczynię, to nie ma on racji w swoim drugim stwierdzeniu (ponieważ wierzę, że *będę* poddany egzaminowi tego dnia). Z drugiej strony, jeśli wątpię w pierwsze stwierdzenie profesora, to nie wiem, czy będę miał egzamin tego dnia czy nie, a to znaczy, że obietnica profesora z drugiego stwierdzenia zostaje spełniona (zakładając, że dotrzymuje on słowa i przeprowadza egzamin). Zaskakującą (nieoczekiwaną) rzeczą jest więc to, że drugie stwierdzenie profesora jest prawdziwe lub fałszywe w zależności – odpowiednio – od tego, czy wierzę, czy też nie w jego pierwsze stwierdzenie. Jedyny zatem sposób, aby profesor miał (całkowicie) rację, to ten, gdy wątpię o jego racji; moje wątpliwości względem niego sprawiają, że ma on rację, podczas gdy moje pełne do niego zaufanie sprawia, że racji on nie ma! Nie wiem, czy ten dość szczególny punkt widzenia był kiedykolwiek dotąd brany pod uwagę.

Smullyan: *Na zawsze nierozstrzygnięte*, 2007.