Logika Matematyczna (2–4)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

pogon@amu.edu.pl

Semantyka KRZ

Język Klasycznego Rachunku Zdań

W skład **alfabetu** języka KRZ wchodzą:

- **zmienne zdaniowe**: $p_1, p_2, p_3, \ldots$ (zbiór wszystkich tych zmiennych oznaczymy przez V_{KRZ})
- **spójniki (prawdziwościowe)**:
  - $\neg$ (negacja),
  - $\wedge$ (koniunkcja),
  - $\vee$ (alternatywa [nierozłączna]),
  - $\rightarrow$ (implikacja [materialna]),
  - $\equiv$ (równoważność [materialna]).
- **symbole pomocnicze**: (,) — nawias lewy oraz nawias prawy.

To jedna z wielu możliwości wyboru alfabetu. Inna podana została na poprzednim wykładzie (język $L_{\heartsuit}$).

Język KRZ

Zbiór F_{KRZ} wszystkich **formuł** języka KRZ definiowany jest indukcyjnie:

- (1) każda zmienna zdaniowa jest formułą
- (2) jeśli $\alpha \in F_{KRZ}$, to $\neg(\alpha)$ jest elementem F_{KRZ}
- (3) jeśli $\alpha \in F_{KRZ}$ oraz $\beta \in F_{KRZ}$, to: $(\alpha) \wedge (\beta) \in F_{KRZ}$, $(\alpha) \vee (\beta) \in F_{KRZ}$, $(\alpha) \rightarrow (\beta) \in F_{KRZ}$, $(\alpha) \equiv (\beta) \in F_{KRZ}$
- (4) każda formuła KRZ jest bądź zmienną zdaniową, bądź powstaje z formuł KRZ poprzez zastosowanie reguły (2) lub reguły (3).

Zwróćmy uwagę, że procedura rozstrzygania, czy dowolny (skończony) ciąg elementów alfabetu języka KRZ jest formułą KRZ jest efektywna: w skończonej liczbie kroków (biorących pod uwagę jedynie kształt symboli oraz ich kolejność) daje odpowiedź.

Język KRZ

Przyjmiemy pewne umowy notacyjne:

- opuszczamy nawiasy otaczające pojedyncze zmienne (np. zamiast $\neg(p_i)$ piszemy $\neg p_i$);
- zmienne zdaniowe zapisujemy zwykle: p, q, r, s, t;
- symbole α, β, γ oznaczają dowolne formuły języka KRZ;
- symbole X, Y, Z oznaczają dowolne zbiory formuł języka KRZ.

Na razie będziemy rygorystycznie przestrzegać używania nawiasów. Po nabraniu wprawy wprowadzimy pewne reguły ich opuszczania.

Uwaga. O języku KRZ mówimy teraz w pewnym metajęzyku. Podobnie, o semantyce języka KRZ będziemy mówić w metajęzyku.

Język KRZ

Zauważmy, że zbiór F_{KRZ} formuł jest uniwersum algebry, której funkcje wyznaczone są przez spójniki prawdziwościowe. Oznaczmy tę algebrę przez:

$$\mathfrak{F} = \langle F_{KRZ}, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \equiv \rangle$$

Spójniki można traktować jako operacje na wyrażeniach:

$\wedge : F_{KRZ} \times F_{KRZ} \rightarrow F_{KRZ}$	$\wedge(\alpha, \beta) = (\alpha) \wedge (\beta)$
$\vee : F_{KRZ} \times F_{KRZ} \rightarrow F_{KRZ}$	$\vee(\alpha, \beta) = (\alpha) \vee (\beta)$
$\rightarrow : F_{KRZ} \times F_{KRZ} \rightarrow F_{KRZ}$	$\rightarrow (\alpha, \beta) = (\alpha) \rightarrow (\beta)$
$\equiv : F_{KRZ} \times F_{KRZ} \rightarrow F_{KRZ}$	$\equiv (\alpha, \beta) = (\alpha) \equiv (\beta)$
$\neg : F_{KRZ} \rightarrow F_{KRZ}$	$\neg(\alpha) = \neg(\alpha)$

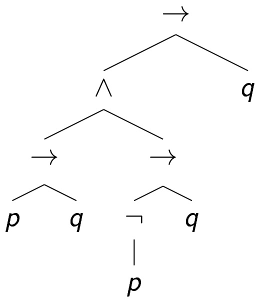
Algebrę $\mathfrak{F}$ nazywamy **algebrą języka KRZ**.

Język KRZ

Każdą formułę języka KRZ reprezentować można przez drzewo. Jedna z możliwych drzewowych reprezentacji budowy składniowej np. formuły

$$((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q$$

wygląda następująco:

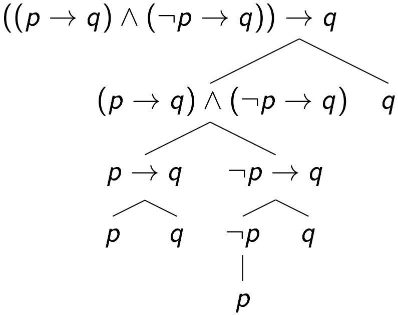


Język KRZ

Inna z możliwych drzewowych reprezentacji budowy składniowej formuły:

$$((p \rightarrow q) \land (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q$$

wygląda następująco:



Wartościowania

Niech dane będą dwa różne przedmioty: 0 oraz 1. Nieważne, czym one są, istotne jest aby były różne. Pierwszy z nich (tj. 0) możesz nazwać Fałszem (albo np. Ściemą), drugi (tj. 1) możesz nazwać Prawdą (albo np. Odlotem). Elementy zbioru $\{0,1\}$ nazwiemy wartościami logicznymi.

Wartościowaniem formuł w KRZ nazywamy każdą funkcję $h : F_{KRZ} \to \{0,1\}$ taką, że:

- $h(\neg(\alpha)) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\alpha) = 0$
- $h((\alpha) \wedge (\beta)) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\alpha) = 1$ i $h(\beta) = 1$
- $h((\alpha) \vee (\beta)) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\alpha) = 0$ i $h(\beta) = 0$
- $h((\alpha) \to (\beta)) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\alpha) = 1$ i $h(\beta) = 0$
- $h((\alpha) \equiv (\beta)) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(\alpha) = h(\beta)$.

Wartościowania

Uwaga. Inna możliwość (którą zaraz przedstawimy) wprowadzenia pojęcia wartościowania jest następująca:

- wartościowaniem zmiennych zdaniowych (wzz) nazywamy dowolną funkcję $h : V_{KRZ} \to \{0, 1\}$ (a więc dowolny nieskończony ciąg o wyrazach 0 i 1)
- wartość formuły przy danym wzz określamy indukcyjnie, korzystając z wybranych funkcji prawdziwościowych skojarzonych ze spójnikami prawdziwościowymi.

Dowolną funkcję, która każdemu skończonemu ciągowi wartości logicznych przyporządkowuje wartość logiczną nazywamy **funkcją prawdziwościową**.

Jednoargumentowe funkcje prawdziwościowe

arg	1	2	3	4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Pierwsza kolumna tabeli podaje wszystkie wartości argumentu, kolumny o numerach 1–4 podają wartość dla tego argumentu każdej z czterech jednoargumentowych funkcji prawdziwościowych. Funkcja o wartościach z kolumny 3 nazywana jest **Negacją**. Oznaczmy ją symbolem Ng. Zatem:

$$Ng(0) = 1, \qquad Ng(1) = 0.$$

Dwuargumentowe funkcje prawdziwościowe

a_1	a_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Pierwsze dwie kolumny podają wszystkie układy wartości argumentów, kolumny o numerach 1–16 podają wartość dla tego układu argumentów każdej z szesnastu dwuargumentowych funkcji prawdziwościowych.

Funkcje prawdziwościowe

Wprowadzamy oznaczenia dla niektórych z tych funkcji:

Funkcja o wartościach z kolumny	nazywana jest	i oznaczana
2	**Koniunkcją**	*Kn*
8	**Alternatywą**	*Al*
14	**Implikacją**	*Im*
10	**Równoważnością**	*Rw*

Uwaga. Nie pogub się: masz spójniki prawdziwościowe ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$) oraz funkcje prawdziwościowe (*Ng*, *Kn*, *Al*, *Im*, *Rw*). Te pierwsze to symbole językowe, te drugie to pewne elementy pozajęzykowe.

Funkcje prawdziwościowe

Zapamiętanie wartości wymienionych funkcji ułatwić powinna poniższa tabelka:

$Kn(x, y) = 1$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$x = 1$ oraz $y = 1$
$Al(x, y) = 0$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$x = 0$ oraz $y = 0$
$Im(x, y) = 0$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$x = 1$ oraz $y = 0$
$Rw(x, y) = 1$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$x = y$

Uwaga. Można rozważać dowolne n-argumentowe funkcje prawdziwościowe. Dla prezentacji semantyki KRZ nie jest to jednak potrzebne.

Wartość logiczna formuły

Jeśli w jest wzz, to niech w_i oznacza i-ty element ciągu w.
Funkcja $Val : (F_{KRZ} \times \{0,1\}^{\omega}) \longrightarrow \{0,1\}$ przyporządkowuje każdej parze (α, w) złożonej z formuły α oraz wzz w jednoznacznie wyznaczoną wartość logiczną, nazywaną **wartością formuły α przy wzz w**.
Definicja funkcji Val jest indukcyjna (tzw. **indukcja strukturalna** po budowie formuły α):

- $Val(p_i, w) = w_i$;
- $Val(\neg(\alpha), w) = Ng(Val(\alpha, w))$;
- $Val((\alpha) \wedge (\beta), w) = Kn(Val(\alpha, w), Val(\beta, w))$;
- $Val((\alpha) \vee (\beta), w) = Al(Val(\alpha, w), Val(\beta, w))$;
- $Val((\alpha) \rightarrow (\beta), w) = Im(Val(\alpha, w), Val(\beta, w))$;
- $Val((\alpha) \equiv (\beta), w) = Rw(Val(\alpha, w), Val(\beta, w))$.

Uproszczenia w podręcznikach

Mamy zatem wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między spójnikami prawdziwościowymi oraz funkcjami prawdziwościowymi. Często spotykamy w podręcznikach uproszczone tabelki, wiążące wartości logiczne bezpośrednio ze spójnikami (w pierwszej kolumnie wartość pierwszego argumentu, w pierwszym wierszu — wartość drugiego, na przecięciu wiersza i kolumny — wartość formuły dla danych argumentów):

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\equiv$	0	1
0	1	0
1	0	1

$\neg$	
0	1
1	0

Jeszcze o wartościowaniach

Powinno być jasne, że każda funkcja jednoargumentowa postaci $Val(\ , w) : F_{KRZ} \to \{0,1\}$ dla pewnego wzz w jest wartościowaniem formuł języka KRZ.

Niech funkcja $\pi : F_{KRZ} \times \{0,1\} \to F_{KRZ}$ będzie określona warunkiem: $\pi(\alpha, w) = \alpha$ dla dowolnej formuły α oraz wzz w.

Każde wartościowanie h formuł języka KRZ można jednoznacznie przedstawić w postaci:

$$h(\pi(\alpha, w)) = Val(\alpha, w).$$

Mamy zatem wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między obydwoma sposobami wprowadzania pojęcia wartościowania formuł języka KRZ. Możemy posługiwać się każdym z nich, co też będziemy czynić.

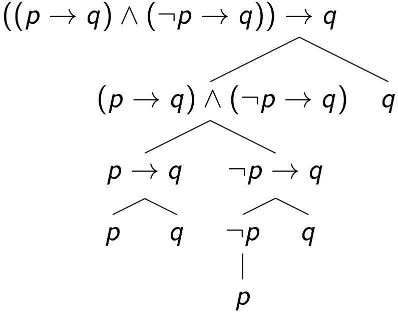
Jeszcze o wartościowaniach

Wartość formuły przy danym wzz zależy tylko od skończonej liczby elementów tego wzz (bo każda formuła zawiera jedynie skończoną liczbę zmiennych). Ustalanie wartości formuły przy danym wzz jest procedurą **obliczalną**: dla dowolnej formuły oraz wzz można w skończonej liczbie prostych, mechanicznych kroków (jawnie opisanych w podanych wyżej tabelkach) ustalić wartość tej formuły przy tym wzz. Przy tym, jeśli formuła α zawiera n zmiennych zdaniowych, to przy ustalaniu jej wartości wystarczy brać pod uwagę najwyżej 2^n wzz.

Przypomnij sobie drzewową reprezentację budowy składniowej formuł: każde wzz umieszcza 0 oraz 1 na liściach drzewa, a funkcje prawdziwościowe pozwalają w sposób jednoznaczny wyznaczyć wartość każdego węzła na podstawie wartości jego bezpośrednich potomków. I tak aż do przypisania wartości korzeniowi drzewa.

Demokratyczne Upoważnienie Poprzez Aplauz

Przypomnijmy jedną z możliwych drzewowych reprezentacji budowy składniowej formuły $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q$



Jakkolwiek rozmieścimy 0 oraz 1 na liściach drzewa, to wartość korzenia będzie równa 1, gdy wartości poszczególnych węzłów obliczać będziemy korzystając z tablic dla funkcji prawdziwościowych. Formuły o tej własności nazwiemy tautologiami KRZ.

Pojęcie tautologii KRZ

Tautologią KRZ nazywamy każdą formułę języka KRZ, która przy każdym wartościowaniu przyjmuje wartość 1.

Tak więc, formuła α **jest** tautologią KRZ, gdy dla każdego wartościowania h, mamy: $h(\alpha) = 1$.
Formuła α **nie jest** tautologią KRZ, gdy istnieje wartościowanie h takie, że $h(\alpha) = 0$.

Uwaga. Badamy nie konkretne formuły, lecz raczej schematy formuł. Dla przykładu, $(\alpha) \vee (\neg(\alpha))$ jest schematem tautologii KRZ dla dowolnej formuły α, zaś np. $(\alpha) \rightarrow ((\alpha) \wedge (\beta))$ nie jest schematem tautologii KRZ — bo np. szczególny przypadek tego schematu: $p_1 \rightarrow (p_1 \wedge p_2)$ nie przy każdym wartościowaniu przyjmuje wartość 1. W dalszym ciągu będziemy używać terminu „tautologia KRZ" zarówno dla poszczególnych formuł języka KRZ, jak i dla schematów formuł.

Pojęcie tautologii KRZ

Tautologiami KRZ są zatem dokładnie te formuły α, dla których $Val(\alpha, w) = 1$ dla każdego wzz w.
Formuła α nie jest tautologią KRZ, gdy istnieje co najmniej jedno wzz w takie, że $Val(\alpha, w) = 0$.

Rozważmy matrycę logiczną $\mathfrak{B}_2 = \langle \{0, 1\}, Ng, Kn, Al, Im, Rw, \{1\} \rangle$ z uniwersum złożonym z wartości logicznych i z jednoelementowym zbiorem $\{1\}$ wartości wyróżnionych. Przypomnijmy, że $\mathfrak{F} = \langle F_{KRZ}, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \equiv \rangle$ jest algebrą formuł języka KRZ.

Tautologiami KRZ są dokładnie te formuły α, które przy każdym homomorfizmie $h : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{B}_2$ przyjmują wartość wyróżnioną w matrycy $\mathfrak{B}_2$, tj. dla których zachodzi $h(\alpha) = 1$.

Pojęcie tautologii KRZ

Zauważmy, że tautologie KRZ są dokładnie tymi formułami języka KRZ, które przyjmują wartość wyróżnioną przy każdym wartościowaniu jedynie przez wzgląd na swoją budowę składniową oraz wprzódy ustalone znaczenie stałych logicznych języka KRZ (tj. spójników prawdziwościowych).
Gdy dokonujemy „przekładu", tj. podstawiamy konkretne zdania za zmienne zdaniowe, wynik takiego podstawienia w tautologii jest zawsze zdaniem prawdziwym, niezależnie od **treści** podstawianych zdań.

Formuły, które przy każdym wartościowaniu przyjmują wartość 0 nazywamy **kontrtautologiami** KRZ.
Formuła α **nie jest** zatem kontrtautologią KRZ, gdy przy co najmniej jednym wartościowaniu h mamy: $h(\alpha) = 1$.

Wszystkie formuły języka KRZ podzielić można na trzy klasy:

- tautologie KRZ
- kontrtautologie KRZ
- pozostałe formuły (nie będące ani tautologiami, ani kontrtautologiami).

Wynikanie logiczne w KRZ

Wynikanie logiczne to relacja między zbiorami formuł. Powiemy, że zbiór Y **wynika logicznie** (w KRZ) ze zbioru X, gdy przy każdym wartościowaniu, przy którym wszystkie formuły zbioru X mają wartość 1, również wszystkie formuły zbioru Y mają wartość 1.
Zbiór Y **nie** wynika logicznie ze zbioru X, gdy istnieje co najmniej jedno wartościowanie, przy którym wszystkie formuły z X mają wartość 1, a pewna formuła ze zbioru Y ma wartość 0.

Gdy Y wynika logicznie z X, to piszemy $X \models_{krz} Y$, a gdy Y jest zbiorem jednoelementowym $\{\alpha\}$, to piszemy $X \models_{krz} \alpha$ (mówimy wtedy krótko, że formuła α wynika logicznie ze zbioru X).

Tautologie KRZ to dokładnie te formuły, które wynikają logicznie ze zbioru pustego $\emptyset$.

Wynikanie logiczne w KRZ

Gdy Y nie wynika logicznie z X w KRZ, to piszemy $X \nvDash_{krz} Y$. Oto niektóre własności relacji $\models_{krz}$:

- $\models_{krz}$ jest zwrotna: $X \models_{krz} X$ dla każdego X
- $\models_{krz}$ jest przechodnia: jeśli $X \models_{krz} Y$ oraz $Y \models_{krz} Z$, to $X \models_{krz} Z$, dla wszystkich X, Y, Z
- $\models_{krz}$ jest monotoniczna względem pierwszego argumentu: jeśli $X \models_{krz} Y$ oraz $X \subseteq Z$, to $Z \models_{krz} Y$
- $\models$ jest antymonotoniczna względem drugiego argumentu: jeśli $X \models_{krz} Y$ oraz $Z \subseteq Y$, to $X \models_{krz} Z$
- $\emptyset \models_{krz} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tautologią KRZ.

Semantyczna niesprzeczność w KRZ

Mówimy, że zbiór X formuł języka KRZ jest:

- semantycznie niesprzeczny, gdy istnieje wartościowanie h takie, że $h(\alpha) = 1$ dla wszystkich $\alpha \in X$;
- semantycznie sprzeczny, gdy X nie jest semantycznie niesprzeczny.

Z powyższej definicji wynika, że X jest semantycznie sprzeczny, gdy dla każdego wartościowania h istnieje $\alpha \in X$ taka, że $h(\alpha) = 0$.

Aby pokazać, że X jest semantycznie niesprzeczny wystarczy znaleźć jedno wartościowanie h takie, że dla wszystkich $\alpha \in X$ mamy: $h(\alpha) = 1$.
Aby pokazać, że X jest semantycznie sprzeczny trzeba pokazać, że dla żadnego wartościowania h **nie zachodzi** $h(\alpha) = 1$ dla wszystkich $\alpha \in X$.

Dygresja: wnioskowania w językach etnicznych

Wnioskowania przeprowadzamy w językach etnicznych. **Wnioskowaniem** (np. w języku polskim) nazywamy dowolny układ złożony ze zbioru zdań (przesłanek) oraz zdania (wniosku).

Między przesłankami oraz wnioskiem mogą zachodzić różne zależności: syntaktyczne, semantyczne oraz pragmatyczne. W zastosowaniach Elementarza Logicznego bada się tzw. wnioskowania dedukcyjne, tj. takie, w których budowa składniowa użytych w nich zdań przesądza o tym, że jeśli przesłanki są prawdziwe, to także wniosek jest prawdziwy.

We wnioskowaniach dedukcyjnych związek między przesłankami oraz wnioskiem oparty jest na wynikaniu logicznym. Za chwilę podamy precyzyjną definicję wnioskowań dedukcyjnych.

Pojęcie reguły niezawodnej

Regułą (regułą wnioskowania) nazywamy dowolną relację $R \subseteq 2^{F_{KRZ}} \times F_{KRZ}$, której poprzedniki są skończonymi zbiorami formuł.

Każdy układ postaci $(X, \alpha) \in R$ nazywamy sekwentem reguły R.

Poprzedniki relacji R nazywamy przesłankami reguły R, a następniki wnioskami reguły R.

Reguła R jest **niezawodna**, gdy dla każdego $(X, \alpha) \in R$ zachodzi: $X \models_{krz} \alpha$, czyli gdy α wynika logicznie z X w KRZ.
W przeciwnym przypadku R jest **zawodna**.

Pojęcie reguły niezawodnej

Z powyższej definicji widać, że reguła R jest:

- niezawodna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego jej sekwentu $(X, \alpha) \in R$ oraz każdego wartościowania, przy którym wszystkie elementy X (tj. przesłanki) mają wartość 1, także α (tj. wniosek) ma wartość 1;
- zawodna, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją: co najmniej jeden sekwent $(X, \alpha) \in R$ oraz co najmniej jedno wartościowanie przy którym wszystkie elementy X mają wartość 1, a α ma wartość 0.

Uwaga. Reguły wnioskowania interesujące z logicznego punktu widzenia opisywane są zwięźle przez podanie kształtu wszystkich sekwentów składających się na regułę, np. tak, jak w poniższych przykładach:

Przykłady reguł niezawodnych

Oto schematyczne zapisy kilku ważnych niezawodnych reguł wnioskowania (zapis poniższy wskazuje kształt wszystkich sekwentów poszczególnych reguł):

(r1)	$(\{\alpha \to \beta, \alpha\}, \beta)$	(r5)	$(\{\alpha \vee \beta, \neg\alpha\}, \beta)$
(r2)	$(\{\alpha \to \beta, \neg\beta\}, \neg\alpha)$	(r6)	$(\{\alpha \to \beta, \beta \to \alpha\}, \alpha \equiv \beta)$
(r3)	$(\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\}, \alpha \to \gamma)$	(r7)	$(\{\alpha \to (\beta \to \gamma)\}, (\alpha \wedge \beta) \to \gamma)$
(r4)	$(\{\alpha, \neg\alpha\}, \beta)$	(r8)	$(\{(\alpha \wedge \beta) \to \gamma\}, \alpha \to (\beta \to \gamma))$

Regułę wnioskowania o przesłankach $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ oraz wniosku β zapisujemy często w postaci: $\frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\beta}$, albo w postaci:

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \hline \beta \end{array}$$

Reguły zachowujące tautologiczność

Reguła R zachowuje własność bycia tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy: dla każdego $(X, \alpha) \in R$, jeśli wszystkie elementy zbioru X są tautologiami, to także α jest tautologią.

Twierdzenie 2.1. Każda reguła niezawodna zachowuje własność bycia tautologią.

Dowód. Niech R będzie niezawodna i przypuśćmy, że nie zachowuje ona własności bycia tautologią. Istnieje zatem sekwent $(X, \alpha) \in R$ taki, że X jest zbiorem tautologii, a α nie jest tautologią. Istnieje więc wartościowanie h takie, że $h(\alpha) = 0$. Oczywiście $h(\beta) = 1$ dla każdej formuły β z X. Zatem $X \not\models \alpha$, a to jest sprzeczne z niezawodnością R. Zachodzi więc teza twierdzenia.

Ćwiczenie. Udowodnij, że reguły (r1)-(r8) są niezawodne.

Dygresja: wnioskowania dedukcyjne

Spójniki logiczne w danym języku etnicznym (tu: polskim) to wyrażenia: *i*, *lub*, *jeśli...*, *to...*, *nieprawda, że*, itp.

Zdaniem prostym (języka etnicznego) nazywamy każde zdanie A takie, że:

- żadna część A nie jest zdaniem
- A jest zdaniem w sensie logicznym, tj. może być prawdziwe lub fałszywe.

Zdania złożone to zdania, które nie są proste. Bierzemy pod uwagę tylko złożenia zdań z użyciem spójników logicznych.

Schematem zdania A nazywamy formułę języka KRZ otrzymaną z A poprzez zastąpienie zdań prostych zmiennymi zdaniowymi, a wyrażeń reprezentujących spójniki logiczne spójnikami prawdziwościowymi.

Dygresja: wnioskowania dedukcyjne

Schematem wnioskowania złożonego ze zbioru przesłanek $\mathcal{A}$ oraz wniosku A nazywamy układ (X, α), gdzie:

- X jest zbiorem schematów zdań z $\mathcal{A}$
- α jest schematem A.

Wnioskowanie $(\mathcal{A}, A)$ nazywamy **dedukcyjnym**, jeśli jego schemat jest sekwentem reguły niezawodnej.

Wnioskowanie jest zatem dedukcyjne, gdy schemat jego wniosku wynika logicznie ze zbioru schematów jego przesłanek.

Uwaga. Pamiętaj: wnioskowania przeprowadzamy w językach etnicznych, schematy wnioskowań i reguły to konstrukcje z języka KRZ.

Dygresja: teksty semantycznie niesprzeczne

Mówimy, że zbiór $\mathcal{A}$ zdań języka etnicznego jest semantycznie niesprzeczny, gdy zbiór schematów wszystkich zdań $\mathcal{A}$ jest semantycznie niesprzecznym zbiorem formuł języka KRZ.

Mówimy, że zbiór $\mathcal{A}$ zdań języka etnicznego jest semantycznie sprzeczny, gdy zbiór schematów wszystkich zdań $\mathcal{A}$ jest semantycznie sprzecznym zbiorem formuł języka KRZ.

Mówimy, że zdanie A języka etnicznego jest prawdą logiczną, gdy schemat A jest tautologią KRZ.

Mówimy, że zdanie A języka etnicznego jest fałszem logicznym, gdy schemat A jest kontrtautologią KRZ.

Twierdzenia o dedukcji

2.2. Twierdzenie o dedukcji wprost (wersja semantyczna).
Dla dowolnych $X \subseteq F_{KRZ}$, $\alpha \in F_{KRZ}$, $\beta \in F_{KRZ}$ zachodzą następujące implikacje:

- Jeśli $X \cup \{\alpha\} \models_{krz} \beta$, to $X \models_{krz} \alpha \rightarrow \beta$.
- Jeśli $X \models_{krz} \alpha \rightarrow \beta$, to $X \cup \{\alpha\} \models_{krz} \beta$.

Na mocy powyższego twierdzenia (oraz praw eksportacji i importacji) reguła $\frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\beta}$ jest niezawodna wtedy i tylko wtedy, gdy implikacja $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$ jest tautologią KRZ.

Prawo importacji: $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$
Prawo eksportacji: $((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$
Ćwiczenie: pokaż, że te prawa są tautologiami KRZ.

Twierdzenia o dedukcji

2.3. Twierdzenie o dedukcji nie wprost (wersja semantyczna). Dla dowolnych $X \subseteq F_{KRZ}$, $\alpha \in F_{KRZ}$, $\beta \in F_{KRZ}$ zachodzą następujące równoważności:

- $X \cup \{\alpha\} \models_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{krz} \neg\alpha$.
- $X \cup \{\neg\alpha\} \models_{krz} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{krz} \alpha$.

Z twierdzenia o dedukcji nie wprost korzystamy przeprowadzając dowody nie wprost (dowody apagogiczne).

Dowody obu semantycznych twierdzeń o dedukcji przedstawiono w Dodatku 1.

Ćwiczenie. Wykorzystaj twierdzenie o dedukcji wprost dla uzyskania z reguł (r1)-(r8) odpowiednich tautologii KRZ.

Semantyczna równoważność formuł

- Formuły α i β nazywamy (semantycznie) *równoważnymi* (co oznaczamy przez $\alpha \sim \beta$), jeśli dla dowolnego wzz *w* wartość α jest równa wartości β.
- Formułę α nazywamy *spełnialną*, jeśli dla pewnego wzz formuła ta przyjmuje wartość 1.
- Formułę α nazywamy *odrzucalną*, jeśli dla pewnego wzz formuła ta przyjmuje wartość 0.
- Przypominamy, że α jest tautologią KRZ, gdy dla każdego wzz formuła ta przyjmuje wartość 1.
- Przypominamy, że α jest kontrtautologią KRZ, gdy dla każdego wzz formuła ta przyjmuje wartość 0.

Ćwiczenia. 1. Pokaż, że $\alpha \sim \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \equiv \beta$ jest tautologią KRZ. 2. Pokaż, że dowolne dwie tautologie KRZ są semantycznie równoważne.

Notacja

- Literałami nazywamy zmienne zdaniowe oraz negacje zmiennych zdaniowych. Jeśli literał L ma postać p_n, to literałem sprzężonym z L jest $\neg p_n$. Jeśli literał L ma postać $\neg p_n$, to literałem sprzężonym z L jest p_n.
- Wieloczłonową koniunkcję formuł $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ zapisywać będziemy bez użycia nawiasów: $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$.
- Podobnie, wieloczłonową alternatywę formuł $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ zapisywać będziemy bez użycia nawiasów: $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \ldots \vee \alpha_n$.

Ćwiczenie: Dlaczego takie uproszczenie zapisu nie prowadzi do niejednoznaczności semantycznej?

Postacie normalne formuł

- *Koniunkcją elementarną* nazwiemy dowolną koniunkcję literałów.
- *Alternatywą elementarną* nazwiemy dowolną alternatywę literałów.
- *Alternatywną postacią normalną* (*apn*) nazwiemy dowolną alternatywę koniunkcji elementarnych.
- *Koniunkcyjną postacią normalną* (*kpn*) nazwiemy dowolną koniunkcję alternatyw elementarnych.
- Apn (odpowiednio: kpn) α nazywamy *istotną* i oznaczamy *iafn* (odpowiednio: *ikpn*), jeśli każda zmienna zdaniowa formuły α występuje w każdej elementarnej koniunkcji (odpowiednio: alternatywie) dokładnie raz, zaprzeczona bądź niezaprzeczona.
- Każdą apn (odpowiednio: kpn, iapn, ikpn) semantycznie równoważną danej formule α nazywamy *apn* (odpowiednio: *kpn, iapn, ikpn*) *formuły* α.

Dlaczego postacie normalne są ważne

Dla każdej formuły α języka KRZ istnieje formuła β taka, że $\alpha \sim \beta$ i β jest kpn. Dla dowodu wystarczy zauważyć, że tautologiami KRZ są:

- $(\alpha \equiv \beta) \equiv ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha))$
- $(\alpha \rightarrow \beta) \equiv ((\neg \alpha) \vee \beta)$
- $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg \alpha \vee \neg \beta)$
- $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg \alpha \wedge \neg \beta)$
- $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$
- $(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$
- $(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$

Podobnie, dla każdej formuły α języka KRZ istnieje formuła β taka, że $\alpha \sim \beta$ i β jest apn.

Dlaczego koniunkcyjne postacie normalne są ważne

Po pierwsze: jeśli α jest tautologią KRZ oraz $\alpha \sim \beta$, to także β jest tautologią KRZ.

Po drugie: jeśli α jest kpn, to jest postaci: $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$, gdzie każda formuła A_i jest alternatywą elementarną postaci: $L_i^1 \vee L_i^2 \vee \ldots \vee L_i^m$, gdzie z kolei każda formuła L_i^j jest literałem.
Koniunkcja $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ jest tautologią KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie formuły A_i są tautologiami.
Formuła A_i (czyli formuła $L_i^1 \vee L_i^2 \vee \ldots \vee L_i^m$) jest tautologią KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy wśród L_i^1, L_i^2, ..., L_i^m występuje co najmniej jedna para literałów sprzężonych.

Tak więc: sprowadzanie formuł do kpn dostarcza algorytmu sprawdzającego tautologiczność.

Dlaczego alternatywne postacie normalne są ważne

Po pierwsze: jeśli α jest kontrtautologią KRZ oraz $\alpha \sim \beta$, to także β jest kontrtautologią KRZ.

Po drugie: jeśli α jest apn, to jest postaci: $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$, gdzie każda formuła A_i jest koniunkcją elementarną postaci:
$L_i^1 \wedge L_i^2 \wedge \ldots \wedge L_i^m$, gdzie z kolei każda formuła L_i^j jest literałem.
Alternatywa $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ jest kontrtautologią KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie formuły A_i są kontrtautologiami.
Formuła A_i (czyli formuła $L_i^1 \wedge L_i^2 \wedge \ldots \wedge L_i^m$) jest kontrtautologią KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy wśród L_i^1, L_i^2, ..., L_i^m występuje co najmniej jedna para literałów sprzężonych.

Tak więc: sprowadzanie formuł do apn dostarcza algorytmu sprawdzającego kontrtautologiczność.

Jeszcze o funkcjach prawdziwościowych

Pamiętamy, że (n-argumentową) funkcją prawdziwościową nazywamy dowolną funkcję $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, dla $n \geqslant 1$.

Wszystkich n-argumentowych funkcji prawdziwościowych jest 2^{2^n}. W szczególności, jest 16 dwuargumentowych funkcji prawdziwościowych oraz są 4 jednoargumentowe funkcje prawdziwościowe.

Do ważnych problemów (także praktycznych) należą:

- definiowanie jednych funkcji prawdziwościowych przez inne
- reprezentacje dowolnych funkcji prawdziwościowych przez stosowne postacie normalne
- znajdowanie zupełnych układów funkcji prawdziwościowych.

Kodowanie funkcji prawdziwościowych

Każda z 16 dwuargumentowych funkcji prawdziwościowych może zostać zakodowana czteroelementowym ciągiem 0 i 1 (zob. tabelę z poprzedniego wykładu), a więc dwójkowym przedstawieniem jednej z liczb od 0 do 15.

Ogólnie, każda n-argumentowa funkcja prawdziwościowa może zostać zakodowana 2^n-elementowym ciągiem 0 i 1, a więc dwójkowym przedstawieniem jednej z liczb od 0 do $2^n - 1$.

Wszystkie n-argumentowe funkcje prawdziwościowe można zatem łatwo wypisać w formie tabeli o 2^n wierszach oraz $n + 2^{2^n}$ kolumnach. Na pierwszych n miejscach w i-tym wierszu należy umieścić dwójkową reprezentację liczby $i - 1$. W kolumnach od $n + 1$ do 2^{2^n} umieszczamy kolejno (pionowo) reprezentacje dwójkowe liczb od 0 do $2^{2^n} - 1$.

Termy opisujące funkcje prawdziwościowe

Klasę wszystkich funkcji prawdziwościowych oznaczymy przez $\boldsymbol{C}$. Niech $G \subset \boldsymbol{C}$. Z każdą n-argumentową funkcją f z G stowarzyszymy symbol funkcyjny $\overline{f}$. Niech $Vbl = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$ będzie przeliczalnym zbiorem symboli, zwanych zmiennymi (nazwowymi). Zdefiniujemy pojęcie *termu*:

- (a) każda zmienna v_i jest termem;
- (b) jeśli f jest n-argumentową funkcją z G, a $T_1, \ldots, T_n$ są termami, to $\overline{f}(T_1, \ldots, T_n)$ jest termem;
- (c) nie ma innych termów oprócz utworzonych na mocy warunków (a) i (b).

Uwaga. Termy to wyrażenia opisujące funkcje prawdziwościowe w pewnym (nowym!) języku formalnym.

Wartości termów

Wartościowaniem zmiennych nazwowych (wzn) nazwiemy każdą funkcję $w : Vbl \to \{0, 1\}$. Przyjmujemy oznaczenie: $w(v_i) = w_i$.
Oczywiście w każdym termie występuje jedynie skończona liczba zmiennych (nazwowych).

Określamy *wartość termu T* dla danych wartości zmiennych określonych przez wzn w:

- (a) jeśli T jest zmienną v_i, to wartością T dla wzn w jest w_i;
- (b) jeśli $T = \overline{f}(T_1, \ldots, T_n)$ i wartościami $T_1, \ldots, T_n$ są odpowiednio $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, to wartością T jest $f(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.

Reprezentowalność

Mówimy, że n-argumentowa funkcja prawdziwościowa g jest *reprezentowana* przez term T, jeśli wszystkie zmienne T są wśród $v_1, \ldots, v_n$ i dla dowolnych wartości (przy każdym wzn) zmiennych $v_1, \ldots, v_n$ wartość termu T jest identyczna z wartością termu $\overline{g}(v_1, \ldots, v_n)$.

Mówimy, że funkcja g jest *złożeniem* funkcji $f_1, \ldots, f_n$, jeśli g jest reprezentowana przez term, którego wszystkie symbole funkcyjne znajdują się pośród $\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_n$.

Uwaga. W praktyce, fakt że jakaś funkcja jest złożeniem innych wyrażamy bezpośrednio w metajęzyku. Piszemy np.: $Im(x, y) = Al(Ng(x), y)$. Zwróć uwagę, że zachodzenie tej równości związane jest z faktem, że $(\alpha \rightarrow \beta) \equiv ((\neg\alpha) \vee \beta)$ jest tautologią KRZ.

Zbiory funkcji: zupełne, zamknięte, niezależne

Zbiór funkcji G nazywamy *zupełnym*, jeśli dowolna funkcja prawdziwościowa jest złożeniem pewnych funkcji z G. Zbiór funkcji G nazywamy *niezależnym*, jeśli żadna funkcja f z G nie daje się przedstawić jako złożenie funkcji z $G - \{f\}$.

Klasę funkcji G nazywamy *zamkniętą*, jeśli zawiera ona wszystkie złożenia funkcji, które są jej elementami. Zamkniętą klasę G nazywamy *prapełną*, jeśli $G \neq \boldsymbol{C}$ i G nie jest zawarta w żadnej klasie zamkniętej, różnej od $\boldsymbol{C}$. Niezależny zbiór funkcji G nazywamy *bazą klasy zamkniętej* K, jeśli każda funkcja należąca do K jest złożeniem funkcji należących do G.

Do ważnych funkcji prawdziwościowych należą omówione poprzednio: Ng, Kn, Al, Im, Rw. Będziemy posługiwać się także funkcją n-argumentowej koniunkcji: $Kn(x_1, \ldots, x_n) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = \ldots = x_n = 1$. Podobnie dla n-argumentowej alternatywy.

Klasy funkcji prawdziwościowych

- Przez $\boldsymbol{C}_1$ oznaczamy klasę funkcji spełniających warunek $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$.
- Przez $\boldsymbol{C}_0$ oznaczamy klasę funkcji spełniających warunek $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$.
- $\boldsymbol{L}$ jest klasą wszystkich funkcji *liniowych*, tj. funkcji postaci $x_1 + \ldots + x_n + \varepsilon$, gdzie $\varepsilon \in \{0, 1\}$.
- $\boldsymbol{D}$ jest klasą funkcji *samodualnych*, tj. funkcji spełniających warunek $f(x_1, \ldots, x_n) = Ng(f(Ng(x_1), \ldots, Ng(x_n)))$.
- przez $\boldsymbol{M}$ oznaczymy klasę wszystkich funkcji *monotonicznych*, tj. funkcji spełniających warunek: jeśli $x_1 \leqslant y_1, \ldots, x_n \leqslant y_n$, to $f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant f(y_1, \ldots, y_n)$.

Uwaga. Symbolu $\leqslant$ używamy dla relacji niewiększości na zbiorze $\{0, 1\}$ traktowanym jako zbiór liczb. Symbol $+$ oznacza dodawanie modulo 2 w tym zbiorze.

Przedstawialność: zapis formalny

Mówimy, że funkcja f jest przedstawialna za pomocą funkcji $f_1, \ldots, f_k$, jeśli równość $\overline{f}(v_1, \ldots, v_n) = T$ zachodzi dla wszystkich wartości przyporządkowanych (przez każde wzn) zmiennym $v_1, \ldots, v_n$, gdzie T jest pewnym termem zbudowanym z symboli funkcyjnych $\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_k$ (niekoniecznie wszystkich) oraz zmiennych $v_1, \ldots, v_n$ (również niekoniecznie wszystkich).

Przykłady:

- Kn jest przedstawialna przez Ng oraz Al:

$$\overline{Kn}(v_1, v_2) = \overline{Ng}(\overline{Al}(\overline{Ng}(v_1), \overline{Ng}(v_2)))$$

- Al jest przedstawialna przez Ng oraz Kn:

$$\overline{Al}(v_1, v_2) = \overline{Ng}(\overline{Kn}(\overline{Ng}(v_1), \overline{Ng}(v_2)))$$

Przedstawialność: zapis uproszczony

- Im jest przedstawialna przez Ng oraz Al:
  $Im(x, y) = Al(Ng(x), y)$
- Im jest przedstawialna przez Ng oraz Kn:
  $Im(x, y) = Ng(Kn(x, Ng(y)))$
- Al jest przedstawialna przez Ng oraz Im:
  $Al(x, y) = Im(Ng(x), y)$
- Kn jest przedstawialna przez Ng oraz Im:
  $Kn(x, y) = Ng(Im(x, Ng(y)))$

Uwaga. Powyższe równości (z tego slajdu), zapisane w metajęzyku, dotyczą bezpośrednio funkcji prawdziwościowych. Milcząco wykorzystujemy tu pewne własności termów opisujących funkcje prawdziwościowe. Równości z poprzedniego slajdu zapisane były w języku termów.

Nie pogub się!

Być może, jesteś wstrząśnięta (choć nie zmieszana) używanymi w tym wykładzie subtelnościami notacyjnymi. Tak trzeba, *trust me*. Zauważ, że:

- gdy piszemy np. równość $Im(x, y) = Al(Ng(x), y)$, to jest to zapis w metajęzyku, mówiący coś o funkcjach prawdziwościowych;
- gdy piszemy równość termów $\overline{Im}(v_1, v_2) = \overline{Al}(\overline{Ng}(v_1), v_2)$, to jest to zapis w języku formalnym opisującym funkcje prawdziwościowe;
- gdy piszemy równoważność $(\alpha \to \beta) \equiv ((\neg\alpha) \vee \beta)$, to jest to formuła języka KRZ.

Można ustanowić precyzyjną odpowiedniość między: spójnikami prawdziwościowymi $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ oraz $\equiv$, a symbolami funkcyjnymi, odpowiednio: $\overline{Ng}$, $\overline{Kn}$, $\overline{Al}$, $\overline{Im}$ oraz $\overline{Rw}$.

Postacie normalne dla funkcji prawdziwościowych

W języku termów opisujących funkcje prawdziwościowe można zdefiniować postacie normalne termów:

- Każde wyrażenie postaci x lub $\overline{Ng}(x)$, gdzie x jest zmienną (nazwową), nazywamy literałem.
- Wyrażenia postaci $L_1 \wedge L_2 \wedge \ldots \wedge L_n$, gdzie każde L_i jest literałem, nazywamy koniunkcjami elementarnymi.
- Wyrażenia postaci $L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$, gdzie każde L_i jest literałem, nazywamy alternatywami elementarnymi.
- Wyrażenie w koniunkcyjnej postaci normalnej (kpn) jest to wyrażenie kształtu $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$, gdzie każde A_i jest alternatywą elementarną.
- Wyrażenie w alternatywnej postaci normalnej (apn) jest to wyrażenie kształtu $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$, gdzie każde A_i jest koniunkcją elementarną.

Postacie normalne dla funkcji prawdziwościowych

Zachodzi następujące ważne twierdzenie o postaciach normalnych:

Twierdzenie 4.1. Każda funkcja prawdziwościowa jest przedstawialna zarówno w koniunkcyjnej, jak i w alternatywnej postaci normalnej.
Dowód w Dodatku 1.

Przykład:

- apn dla Rw: $\overline{Rw}(x,y) = \overline{Al}(\overline{Kn}(x,y), \overline{Kn}(\overline{Ng}(x), \overline{Ng}(y)))$
- kpn dla Rw: $\overline{Rw}(x,y) = \overline{Kn}(\overline{Al}(\overline{Ng}(x), y), \overline{Al}(x, \overline{Ng}(y)))$.

Ćwiczenie. Sprowadź do kpn oraz apn formułę $\alpha \equiv \beta$ języka KRZ i porównaj otrzymane rezultaty z powyższymi postaciami normalnymi dla Rw. Jakieś refleksje?

Zupełne układy funkcji prawdziwościowych

Z twierdzenia o postaciach normalnych wynika, że następujące układy funkcji są zupełne:

$\{Ng, Kn\} \quad \{Ng, Al\} \quad \{Ng, Im\}$.

Zupełny jest także układ funkcji $\{Ar, Kn, \mathbf{1}\}$, gdzie $\mathbf{1}$ jest funkcją stałą równą 1, a funkcja Ar (alternatywa rozłączna) odpowiada dodawaniu modulo 2. Zauważmy, że $Ng(x) = Ar(x, \mathbf{1}(x))$ oraz że Kn odpowiada (zwykłemu) mnożeniu w zbiorze $\{0, 1\}$.

Czasami zamiast $Kn(x, y)$ piszemy xy, zamiast $Ar(x, y)$ piszemy $x + y$, a zamiast $\mathbf{1}$ po prostu 1. Iloczyny zmiennych nazywamy jednomianami, sumy jednomianów wielomianami Żegałkina, a pusty iloczyn zmiennych utożsamiamy ze stałą 1.

Zupełne układy funkcji prawdziwościowych

Twierdzenie 4.2. Każda funkcja prawdziwościowa ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci wielomianu Żegałkina (z dokładnością do kolejności czynników w jednomianach i składników w wielomianie). Dowód w Dodatku 1.

Zauważmy, że:

- (a) funkcje liniowe są przedstawialne jako sumy skończenie wielu jednomianów prostych (tj. jednomianów bez mnożenia)
- (b) funkcje przedstawialne przez funkcje liniowe także są liniowe
- (c) z (a) oraz (b) wynika, że nie są zupełne np. układy: $\{+, 1\}$ oraz $\{Ng, Rw\}$.

Nie są zupełnymi także np. układy: $\{Rw, Ar\}$, $\{Al, Kn, Im\}$.

Binegacja i kreska Sheffera

Dalsze dwie ważne funkcje prawdziwościowe to:

- binegacja: $\downarrow(x, y) = Ng(Al(x, y))$
- kreska Sheffera: $|(x, y) = Ng(Kn(x, y))$

Zauważmy, że:

$Ng(x) = |(x, x) \quad Al(x, y) = \downarrow(\downarrow(x, y), \downarrow(x, y))$

$Ng(x) = \downarrow(x, x) \quad Kn(x, y) = |(|(x, y), |(x, y))$

Binegacja odpowiada spójnikowi „ani ..., ani ...", a kreska Sheffera spójnikowi „co najwyżej jedno z dwojga ..., ...".

Twierdzenie 4.3.
Jedyne zupełne jednoelementowe układy funkcji to: $\{|\}$ oraz $\{\downarrow\}$.
Dowód w Dodatku 1.

Przykłady zbiorów niezależnych i baz

Przykładami niezależnych układów funkcji są:
(a) $\{Ng, Rw\}$; (b) $\{Ng, Ar\}$; (c) $\{Rw, Ar\}$; (d) $\{Rw, Al\}$.

Zupełne i niezależne są np. następujące układy funkcji:
(a) $\{Im, /\}$, gdzie $/(x, y) = Ng(Im(y, x))$;
(b) $\{Rw, Al, \mathbf{0}\}$, gdzie $\mathbf{0}$ jest funkcją stałą równą 0.

- $\{Kn, Im\}$ jest bazą dla $\boldsymbol{C}_1$
- $\{Kn, Ar\}$ jest bazą dla $\boldsymbol{C}_0$
- $\{Al, Kn, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ jest bazą dla $\boldsymbol{M}$
- $\{\mathbf{0}, Rw\}$ jest bazą dla $\boldsymbol{L}$
- $\{Ng, \curlywedge\}$ jest bazą dla $\boldsymbol{D}$, gdzie $\curlywedge(x, y, z) = xy + xz + yz$.

Klasy prapełne i twierdzenie Posta

- Klasy: $\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_0$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{L}$ są wszystkie prapełne.
- Dowolna klasa zamknięta $\boldsymbol{K} \neq \boldsymbol{C}$ zawiera się w pewnej klasie prapełnej.
- Układ funkcji jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest zawarty w żadnej klasie prapełnej.

4.4. Twierdzenie Posta. Nie istnieją klasy prapełne różne od $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_0$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{D}$ oraz $\boldsymbol{M}$.

Dowód opuszczamy.

- Każdy zamknięty zbiór funkcji prawdziwościowych ma skończoną bazę.
- Rodzina wszystkich zamkniętych zbiorów funkcji prawdziwościowych jest przeliczalna.
- Każda baza dla $\boldsymbol{C}$ zawiera nie więcej niż cztery funkcje.

Zadania domowe

Zaleca się wykonanie wszystkich podanych zadań.

Możesz także korzystać z (powszechnie dostępnego) zbioru zadań Pani Profesor Barbary Stanosz: Ćwiczenia z logiki, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa (kilkanaście wydań) i rozwiązać zadania **1–27**.

Uwaga! Bez umiejętności rozwiązywania zadań nie zdasz egzaminu z logiki matematycznej. Wybór należy do ciebie.

Przykłady poprawnych rozwiązań

Poprawne rozwiązania przykładowych zadań dot. omawianych problemów znaleźć można pod adresami:

www.logic.amu.edu.pl/images/8/87/Egzlogmat2007.pdf

Zadania (z obu grup): **2** (rozwiązania 2.1. i 2.2.) oraz **5** (rozwiązania 5.2. i 5.3.).

www.logic.amu.edu.pl/images/4/4f/Logjiin2007.pdf

Zadania z 4 czerwca 2007: **1** (rozwiązania 1.1. i 1.2.), **2** (rozwiązania 2.1. i 2.2.), **3** (rozwiązania 3.1. i 3.2.), a także zadania z 6 czerwca 2007: **2** (rozwiązania 2.1. i 2.2.) oraz **4** (rozwiązanie 4.2.).

Język KRZ

Narysuj drzewa składniowe formuł:

- $(((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p)$
- $((((p \vee \neg p) \wedge (p \rightarrow q)) \wedge (\neg p \rightarrow r)) \rightarrow (q \vee r))$
- $((p \equiv \neg(q \vee r)) \rightarrow (\neg(q \wedge p)))$.

Wstaw jakieś wartości logiczne na liście tych drzew i oblicz wartość przyporządkowaną, zgodnie z tablicami opisującymi funkcje prawdziwościowe, korzeniowi.

Język KRZ

Na ile sposobów można wstawić w poniższe ciągi symboli języka KRZ nawiasy, aby otrzymać formuły języka KRZ:

- $p \rightarrow \neg q \vee q \rightarrow r$
- $p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow \neg p$
- $p \equiv \neg p \vee q \wedge r$.

W każdym z powyższych przypadków podaj wszystkie podformuły otrzymanych formuł.

Tautologie KRZ

Pokaż, że są tautologiami KRZ:

- $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$
- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
- $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

Tautologie KRZ

Pokaż, że są kontrtautologiami KRZ:

- $(\neg(p \to q)) \equiv ((\neg p) \vee q)$
- $(p \wedge q) \equiv ((\neg p) \vee (\neg q))$
- $(p \wedge (\neg q)) \to (p \to q)$

Tautologie KRZ

Zbadaj, czy są tautologiami KRZ:

- $(p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow (s \rightarrow t)))) \rightarrow (\neg t \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow (s \rightarrow \neg r))))$
- $(p \rightarrow (q \vee r)) \rightarrow ((q \wedge r) \rightarrow \neg p)$
- $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \equiv (r \rightarrow \neg(p \wedge q))$

Wynikanie logiczne w KRZ

Zbadaj, czy następujące reguły są niezawodne:

$$\frac{(p \vee q) \equiv r \quad \neg p \quad \neg q}{\neg(r \wedge s)} \qquad \frac{\neg(p \vee q) \rightarrow r \quad \neg q \quad p \rightarrow s}{s \vee r} \qquad \frac{p \rightarrow (q \rightarrow r) \quad s \rightarrow \neg r}{p \rightarrow \neg q}$$

Semantyczna niesprzeczność w KRZ

Zbadaj, czy są semantycznie niesprzecznymi zbiorami formuł:

$p \to (q \to r)$ q $\neg(p \to r)$	$p \to \neg(q \vee \neg r)$ p $r \to q$	p $\neg q$ $\neg r$ $p \to (s \vee t)$ $t \to (r \wedge q)$
$\neg p \to q$ $p \to r$ p $\neg r \vee \neg q$	$p \to q$ $p \vee q$ $\neg q$	$p \to q$ $r \to q$ $(p \vee r) \to q$

Wnioskowania dedukcyjne

Zbadaj, czy są wnioskowaniami dedukcyjnymi:

- *Jeśli wycofamy naukę religii ze szkół, to nie jest prawdą, że jednocześnie: Polska będzie normalnym krajem oraz Episkopat będzie zachwycony. Panie kochany, mówię Panu: normalnym krajem to ta nasza Polska w końcu będzie. No to sam Pan widzi, że Episkopat nie będzie, delikatnie rzecz ujmując, zachwycony, jeśli naukę religii wycofamy ze szkół.*
- *Mówię wam, jeśli Ala wyjdzie za mąż, to będzie awantura na weselu. Nie wierzycie? Wystarczy się tylko zastanowić: jeśli Ala wyjdzie za mąż, to na pewno i Kasia i Dorota będą druhnami. A przecież jest jasne, że dojdzie do awantury, gdy co najmniej jedna z nich będzie druhną, znamy je nie od dziś.*

Wnioskowania dedukcyjne

Zbadaj, czy są wnioskowaniami dedukcyjnymi:

- *Ten pogrzeb nie ma prawa się udać, o ile nie jest plotką, że odszedł ostatni z Wielkich Przywódców Postępowej Ludzkości. Dlaczego? To chyba oczywiste. Jeśli istotnie już Go nie ma, to Lewus lub Prawus będzie przemawiał na pogrzebie. Gdy jednak pojawią się tam obaj ze swoimi tekstami, to skandal murowany, inaczej mówiąc pogrzeb nieudany.*
- *Jeśli masz 1 dolara, to możesz sobie kupić lody. Ciasteczko możesz sobie kupić, jeśli masz 1 dolara. Tak więc, drogie dziecko, jeśli masz 1 dolara, to możesz sobie kupić i lody i ciasteczko. Masz tu 1 dolara i wypad!*
- *Jestem, o ile myślę. No i przecież myślę. Wynika stąd, że jestem.*

Teksty semantycznie niesprzeczne

Zbadaj, czy są tekstami semantycznie niesprzecznymi:

- *Agentem był Marszałek lub Prezydent. Przewodniczący był agentem, o ile Prezydent był agentem. Prymas był agentem, jeśli Marszałek był agentem. Ale przecież — na litość boską — ani Prymas, ani Przewodniczący nie byli agentami.*
- *Jeżeli Polska będzie katolicka, to jeżeli przeprowadzi się (rzetelną, do trzeciego pokolenia) lustrację, to zapanuje prawdziwa (na wieki) demokracja. A jeśli zapanuje demokracja, to już zaraz będzie dobrobyt, o ile oczywiście przeprowadzi się lustrację. Polska będzie katolicka. I lustrację się przeprowadzi, a jakże. Tylko dobrobytu nie będzie, mili słuchacze.*
- Tekst taki sam, jak wyżej, oprócz ostatniego zdania, zamiast którego wstawić: *I będzie dobrobyt, że hej.*

Zupełne układy funkcji

1. Przedstawić wszystkie dwuargumentowe funkcje prawdziwościowe (z tabeli podanej na wykładzie drugim) poprzez funkcje z poniższych układów:

$\{Ng, Kn\}$ $\{Ng, Al\}$ $\{Ng, Im\}$

$\{Im, \mathbf{0}\}$ $\{|\}$ $\{\downarrow\}$

2. Dla każdego z tych przedstawień zapisać odpowiadającą mu tautologię KRZ (w przypadku $|$, $\downarrow$ oraz $\mathbf{0}$ wymaga to rozszerzenia języka KRZ o te symbole).

Dla ciekawych: KRZ a rachunek zbiorów

Przekład 1. Niech T będzie termem reprezentującym pewną funkcję prawdziwościową, w zapisie którego występują tylko znaki $\overline{Kn}$, $\overline{Al}$ i $\overline{Ng}$ oraz zmienne $v_1, \ldots, v_k$. Przez $\varepsilon(T, x)$ oznaczymy formułę języka teorii mnogości otrzymaną z termu T przez podstawienia w miejsce zmiennych $v_1, \ldots, v_k$ odpowiednio wyrażeń $x \in Z_1, \ldots, x \in Z_k$.

Przekład 2. T jak wyżej. Przez $Z(T)$ oznaczymy wyrażenie, które otrzymujemy z termu T poprzez zamianę zmiennych v_i symbolami Z_i, a symboli $\overline{Kn}$, $\overline{Al}$ i $\overline{Ng}$ odpowiednio symbolami $\cap$, $\cup$ oraz $-$.

- Podaj przykłady zbiorów, które można tworzyć z termów opisujących funkcje prawdziwościowe, posługując się przekładem 1.
- Podaj przykłady praw rachunku zbiorów odpowiadające prawom dotyczącym funkcji prawdziwościowych przy przekładzie 2.
- Podaj przykłady praw rachunku zbiorów odpowiadające tautologiom KRZ.

Koniec

To była najłatwiejsza część Elementarza Logicznego.

Na wszystkich dalszych wykładach w semestrze zimowym będziemy zajmować się różnymi operatorami konsekwencji w KRZ.