5 wykładów dla Studium Doktoranckiego Wydziału Neofilologii UAM

LOGIKA WSPÓŁCZESNA (3): METALOGIKA

JERZY POGONOWSKI

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Wstęp

Metalogika to dyscyplina, której przedmiotem badań jest logika. Na oznaczenie badań nad matematyką używa się terminu *metamatematyka*. Niektórzy utożsamiają zakresy tych pojęć, albo mówią jedynie o metamatematyce. Nie przejmujmy się tym. Celem dzisiejszego wykładu jest przybliżenie słuchaczom uzyskanych w XX wieku ustaleń dotyczących refleksji nad systemami logicznymi oraz wybranymi teoriami matematycznymi. Podzielimy ten materiał na cztery części:

1. Wybrane twierdzenia metalogiczne.
2. Wybrane ustalenia metamatematyki.
3. Algebraiczne ujęcie metalogiki.
4. Semantyczne ujęcie metalogiki.

1 Wybrane twierdzenia metalogiczne

W pierwszej kolejności przypomnijmy niektóre wyniki metalogiczne dotyczące klasycznej logiki pierwszego rzędu FOL, omawianej na pierwszym wykładzie oraz klasycznego rachunku zdań, o którym zakładaliśmy, iż – choćby powierzchownie – znany jest słuchaczom. Zamiast przytaczania całego szeregu precyzyjnych definicji pojęć używanych w sformułowaniach tych twierdzeń podamy jedynie krótkie komentarze, ukazujące znaczenie tych rezultatów.

1.1 Niektóre własności klasycznego rachunku zdań

Rachunki zdaniowe – w szczególności klasyczny rachunek zdań (dla skrótu: KRZ) – były, jeśli można tak rzec, pierwszymi obiektami badanymi w laboratorium logicznym. Pierwsze prawa KRZ podane zostały już przez Stoików, choć nie były one ujęte w ramach systemu logicznego we współczesnym rozumieniu tego terminu. Średniowieczna *nauka o konsekwencjach* także takiej postaci jeszcze nie ma. Formalne całościowe podstawy KRZ opracowywane są od wieku XIX, a rozkwit tych badań przypada na pierwszą połowę wieku XX. Mówienie o KRZ jest tu pewnym skrótem myślowym – jak pamiętamy z pierwszego wykładu system logiczny wyznaczony jest zawsze przez pewien język oraz określoną w nim operację konsekwencji. Tak więc, dla pełnej precyzji, należałoby raczej mówić o różnych wersjach KRZ, wyznaczonych dla języka zdaniowego z wybranym zestawem funktorów (zdaniotwórczych od argumentów zdaniowych) poprzez przyjęcie odpowiedniej operacji konsekwencji. Do najbardziej popularnych takich operacji należą:

1. *Konsekwencje aksjomatyczne*.
2. *Konsekwencje bazujące na dedukcji naturalnej*.
3. *Konsekwencje rezolucyjne*.
4. *Konsekwencje bazujące na systemach tablicowych*.
5. *Konsekwencje wyznaczone przez rachunki sekwentów Gentzena*.

Dla każdej z tych operacji konsekwencji precyzyjnie określony jest ogół jej *tez* – formuł wyprowadzalnych, posiadających dowód.

Każda z tych konsekwencji jest – swobodnie mówiąc – konfrontowana z tym, co dane jest w sposób w pewnym sensie obiektywny, niezależny od składni, a więc z semantyką KRZ. Oczywiście owa niezależność semantyki od składni jest jedynie relatywna – środki językowe KRZ pozwalają bowiem „mówić" o takich, a nie innych aspektach odniesienia przedmiotowego KRZ.

Poszczególne operacje konsekwencji dla KRZ są (w ściśle określonym sensie) *równoważne*. Stanowi to uzasadnienie dla owego skrótowego mówienia o klasycznym rachunku zdań, bez wyraźnego podawania, o którą operację konsekwencji chodzi.

Najważniejsze metalogiczne własności (różnych systemów) KRZ to m.in.:

1. *Pełność*. Ogół tez (ustalonej operacji konsekwencji) pokrywa się z ogółem tautologii klasycznego rachunku zdań. To podstawowa własność: jej posia-

danie oznacza, że czysto syntaktycznymi działaniami na napisach (formułach i ciągach formuł) potrafimy odzwierciedlić trafnie i kompletnie wszystkie zależności semantyczne systemu.

2. *Zwartość*. Jeśli formuła α wynika (w sensie ustalonej operacji konsekwencji) ze zbioru formuł X, to α wynika ze skończonego podzbioru zbioru X. Ta własność wynika z tego, że rozważamy jedynie reguły wnioskowania o skończonej liczbie przesłanek, a co za tym idzie, jedynie dowody będące skończonymi ciągami formuł.

3. *Rozstrzygalność*. Istnieją algorytmy pozwalające („w skończonej liczbie prostych, mechanicznych kroków") ustalać czy dowolnie wybrana formuła języka klasycznego rachunku zdań jest czy też nie jest prawem (tautologią) tego rachunku. Własność rozstrzygalności zapewnia możliwość automatycznego (przez program komputerowy) ustalania tautologiczności formuł.

4. *Funkcyjna pełność*. Mówiąc swobodnie, istnieją zestawy funktorów prawdziwościowych, za pomocą których można zdefiniować wszystkie pozostałe funktory klasycznego rachunku zdań. Takie zestawy to np.:

   (a) koniunkcja, negacja
   (b) alternatywa, negacja
   (c) implikacja, negacja
   (d) binegacja
   (e) kreska Sheffera.

   Funkcyjna pełność pozwala m.in. na wybór niektórych tylko funktorów (jako pierwotnych) dla prezentacji całego klasycznego rachunku zdań.

5. *Maksymalność*. Mówimy, że logika jest *zupełna w sensie Posta*, gdy ogół jej tez jest niesprzeczny oraz nie istnieje niesprzeczne rozszerzenie tej logiki. Klasyczny rachunek zdań jest zupełny w sensie Posta, a więc ma własność maksymalności.

6. *Postacie normalne*. Nazwiemy *literałami* zmienne zdaniowe oraz ich negacje. *Alternatywa elementarna* to alternatywa literałów. *Koniunkcja elementarna* to koniunkcja literałów. Każda formuła języka klasycznego rachunku zdań jest równoważna formule w tzw.:

   (a) *koniunkcyjnej postaci normalnej* – czyli formule będącej koniunkcją alternatyw elementarnych;

(b) *alternatywnej postaci normalnej* – czyli formule będącej alternatywą koniunkcji elementarnych.

Twierdzenia o istnieniu postaci normalnych są wielce użyteczne m.in. w automatycznym dowodzeniu twierdzeń (np. wykorzystującym metodę rezolucji).

7. *Twierdzenia o dedukcji*. Twierdzenia te mają postać *semantyczną* lub *syntaktyczną*. Ponadto, mają wersję *wprost* lub *nie wprost*. Sformułujmy je, przykładowo, dla aksjomatycznego ujęcia klasycznego rachunku zdań (tu $\models$ jest relacją wynikania logicznego w klasycznym rachunku zdań, zaś $\vdash$ relacją wyprowadzalności, czyli posiadania dowodu z aksjomatów):

   (a) *Semantyczne Twierdzenie o Dedukcji Wprost*. Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α, β: $X \cup \{\alpha\} \models \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models \alpha \rightarrow \beta$.

   (b) *Semantyczne Twierdzenie o Dedukcji Nie Wprost*. Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α, β:
   1. $X \cup \{\alpha\} \models \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models \neg\alpha$.
   2. $X \cup \{\neg\alpha\} \models \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models \alpha$.

   (c) *Syntaktyczne Twierdzenie o Dedukcji Wprost*. Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α, β: $X \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

   (d) *Syntaktyczne Twierdzenie o Dedukcji Nie Wprost*. Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuły α:
   1. $X \vdash \neg\alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła β taka, że $X \cup \{\alpha\} \vdash \{\beta, \neg\beta\}$.
   2. $X \vdash \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła β taka, że $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash \{\beta, \neg\beta\}$.

   Twierdzenia o dedukcji pozwalają na uproszczenie wielu dowodów.

Ponadto mamy oczywiście wiele twierdzeń ustalających własności szczególne każdej z wybranych operacji konsekwencji.

1.2 Wybrane własności logiki pierwszego rzędu

O pewnych własnościach FOL wspominaliśmy w pierwszym wykładzie. Za historycznie pierwsze ujęcie FOL uznać możemy aksjomatykę Fregego dla tego systemu. Podobnie jak w przypadku klasycznego rachunku zdań, FOL może zostać przedstawiona przez różne (acz równoważne) operacje konsekwencji. Najczęściej stosowane z nich to:

1. *Konsekwencje aksjomatyczne*.
2. *Konsekwencje bazujące na dedukcji naturalnej*.
3. *Konsekwencje rezolucyjne*.
4. *Konsekwencje bazujące na systemach tablicowych*.
5. *Konsekwencje wyznaczone przez rachunki sekwentów Gentzena*.

Dowodzi się, że poszczególne operacje konsekwencji dla FOL są (w ściśle określonym sensie) *równoważne*, co usprawiedliwia (podobnie jak w przypadku KRZ) skrótowy sposób wyrażania się, gdy mówimy po prostu o klasycznej logice pierwszego rzędu.

O semantyce FOL opowiedzieliśmy na pierwszym wykładzie. Przypomnijmy, że jest ona o wiele bogatsza od semantyki dla klasycznego rachunku zdań: obejmuje wszak wszelkie układy złożone z uniwersum jakichkolwiek przedmiotów oraz określonych między nimi relacji i działających na tych przedmiotach funkcji.

Wyliczmy niektóre najbardziej podstawowe własności metalogiczne FOL (powiedzmy, w wersji aksjomatycznej):

1. *Pełność*. Ogół tez FOL pokrywa się z ogółem jej tautologii. Tak więc, również w przypadku tego systemu logicznego potrafimy ogół jego (semantycznych) praw scharakteryzować w sposób trafny i kompletny metodami czysto syntaktycznymi, odwołującymi się jedynie do napisów (formuł oraz ciągów formuł). Waga tego wyniku jest wielce znacząca: pamiętajmy, że język FOL ma *nieskończenie* wiele interpretacji.

2. *Zwartość*. W wersji semantycznej własność zwartości wyrazić można na następujące (równoważne) sposoby:

   (a) Zbiór zdań X ma model wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego skończony podzbiór ma model.

   (b) Zbiór zdań X nie ma modelu wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z jego skończonych podzbiorów nie ma modelu.

   Własność zwartości jest istotnie wykorzystywana w konstrukcji modeli – m.in. modeli *niestandardowych*.

3. *Półrozstrzygalność*. Jeśli formuła α jest tautologią FOL, to można to potwierdzić za pomocą algorytmu („w skończonej liczbie prostych, mechanicznych kroków"). Jeśli α nie jest tautologią FOL, to stwierdzenie tego na sposób algorytmiczny może być niemożliwe. Istotnie, znalezienie *kontrprzykładu*, czyli struktury, w której α byłaby fałszywa, wymaga przejrzenia *nieskończonej* liczby interpretacji, a tego w skończonej liczbie kroków zrobić nie można. Nierozstrzygalność FOL stwierdza *twierdzenie Churcha*.

4. *Postacie normalne*. Przez formułę w *prefiksowej postaci normalnej* rozumiemy każdą formułę rozpoczynającą się od ciągu kwantyfikatorów, po którym następuje formuła nie zawierająca kwantyfikatorów. Każda formuła języka FOL jest równoważna formule w prefiksowej postaci normalnej. Twierdzenie to wykorzystywane jest we wprowadzaniu dalszych, użytecznych w dowodach, postaci normalnych formuł.

5. *Twierdzenie Löwenheima-Skolema-Tarskiego*. Jeśli T jest teorią niesprzeczną (bez modeli skończonych), to T ma modele w każdej mocy nieskończonej. Mówiąc swobodnie, twierdzenie to wyraża fakt, że FOL nie odróżnia mocy nieskończonych. Podobnie jak twierdzenie o zwartości, to twierdzenie służy do budowania modeli teorii (w tym modeli *niestandardowych*).

6. *Lemat Lindenbauma*. Każda teoria niesprzeczna ma niesprzeczne rozszerzenie zupełne.

7. *Twierdzenia o dedukcji*. Twierdzenia te mają, podobnie jak w klasycznym rachunku zdań, postacie: semantyczną i syntaktyczną, a także wersje: wprost i nie wprost. Wymagają jednak (w postaci syntaktycznej) pewnych dodatkowych założeń. Podobnie jak w klasycznym rachunku zdań, znacznie ułatwiają przeprowadzanie dowodów.

   (a) *Semantyczne Twierdzenie o Dedukcji Wprost*. Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α, β: $X \cup \{\alpha\} \models \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models \alpha \to \beta$.

   (b) *Semantyczne Twierdzenie o Dedukcji Nie Wprost*. Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α, β:
   1. $X \cup \{\alpha\} \models \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models \neg\alpha$.
   2. $X \cup \{\neg\alpha\} \models \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models \alpha$.

   (c) *Syntaktyczne Twierdzenie o Dedukcji Wprost*. Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α, β, jeżeli α jest zdaniem (czyli formułą bez zmiennych wolnych), to: $X \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \vdash \alpha \to \beta$.

(d) *Syntaktyczne Twierdzenie o Dedukcji Nie Wprost*. Dla dowolnego zbioru formuł X oraz zdania α:

1. $X \vdash \neg\alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła β taka, że $X \cup \{\alpha\} \vdash \{\beta, \neg\beta\}$.
2. $X \vdash \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła β taka, że $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash \{\beta, \neg\beta\}$.

8. *Twierdzenie Herbranda*. Dla każdego zdania α języka FOL istnieje nieskończony ciąg α_1, α_2,... formuł języka klasycznego rachunku zdań taki, że α jest tezą FOL wtedy i tylko wtedy, gdy pewna alternatywa $\alpha_{i_1} \vee \ldots \vee \alpha_{i_n}$ jest tezą klasycznego rachunku zdań.

   Nieskończony ciąg, o którym mowa w tym twierdzeniu jest dla każdego zdania α języka FOL wyznaczony w sposób efektywny. Jeżeli α jest tezą FOL, to odnajdujemy stosowną alternatywę, będącą tezą klasycznego rachunku zdań w skończonej liczbie kroków. Nie można jednak – w ogólności – oszacować, jak długo, dla ustalonego α, należy przeszukiwać ów nieskończony ciąg. Twierdzenie Herbranda ukazuje związek między dowodliwością w FOL a dowodliwością w klasycznym rachunku zdań.

9. *Twierdzenie Robinsona*. Niech X oraz Y będą niesprzecznymi, rozłącznymi zbiorami zdań języka FOL. Jeśli zbiór $X \cup Y$ jest sprzeczny, to istnieje zdanie α takie, że α jest konsekwencją X, $\neg\alpha$ jest konsekwencją Y oraz predykaty występujące w α to wyłącznie predykaty występujące jednocześnie w zdaniach z X oraz zdaniach z Y.

   Jedną z intuicji związanych z tym twierdzeniem można wyrazić tak: połączenie dwóch niesprzecznych teorii w języku FOL jest sprzeczne tylko wtedy, gdy teorie te choćby częściowo „mówią" o tym samym.

10. *Twierdzenie Craiga*. Jeśli α oraz β są zdaniami języka FOL zawierającymi jakieś wspólne predykaty, przy czym zarówno $\{\alpha\}$ jak i $\{\neg\beta\}$ są niesprzeczne oraz $\alpha \to \beta$ jest tezą FOL, to istnieje zdanie γ takie, że $\alpha \to \gamma$ oraz $\gamma \to \beta$ są tezami FOL, a przy tym γ zawiera wyłącznie predykaty występujące jednocześnie w α oraz β.

11. *Twierdzenie Betha*. Podamy je w nieco uproszczonej formie, dla predykatów jednoargumentowych. Niech S będzie skończonym zbiorem zdań, w których występują jedynie predykaty P, P_1,...,P_n. Mówimy, że P jest *definiowalny explicite poprzez* P_1,...,P_n *na gruncie* S, gdy istnieje formuła $\psi(x)$, której predykaty są wyłącznie wśród P_1,...,P_n taka, że $S \vdash \forall x\ (P(x) \equiv \psi(x))$. Niech teraz Q będzie nowym predykatem, nie występującym w zdaniach

z S i różnym od każdego z $P_1,\ldots,P_n$. Niech $S_{P/Q}$ oznacza wynik zastąpienia P przez Q we wszystkich zdaniach zbioru S. Mówimy, że P jest *definiowalny implicite poprzez* $P_1,\ldots,P_n$ *na gruncie* S, gdy $S \cup S_{P/Q} \vdash \forall x\ (P(x) \equiv Q(x))$. Nietrudno udowodnić, że jeśli P jest definiowalny explicite poprzez $P_1,\ldots,P_n$ na gruncie S, to P jest także definiowalny implicite poprzez $P_1,\ldots,P_n$ na gruncie S. Twierdzenie Betha ustala, że zachodzi także implikacja odwrotna: jeśli P jest także definiowalny implicite poprzez $P_1,\ldots,P_n$ na gruncie S, to P jest definiowalny explicite poprzez $P_1,\ldots,P_n$ na gruncie S.

12. *Twierdzenie o neutralności stałych pozalogicznych*. Mówiąc dość swobodnie, twierdzenie to głosi, że FOL nie wyróżnia żadnej stałej pozalogicznej, żadnego predykatu, żadnego symbolu funkcyjnego. To, co można udowodnić o pewnym predykacie, można też udowodnić o dowolnym innym (o tej samej liczbie argumentów); podobnie dla symboli funkcyjnych i stałych indywiduowych.

Dla każdej z operacji konsekwencji w FOL mamy też, rzecz jasna, osobne twierdzenia charakteryzujące szczególne własności tej operacji.

Słuchacze zwrócili z pewnością uwagę na różnice między klasycznym rachunkiem zdań a FOL. Oto kilka najważniejszych:

1. *Składnia*. Język FOL jest o wiele bogatszy od języka klasycznego rachunku zdań. W tym drugim posługujemy się tylko zmiennymi zdaniowymi, funktorami prawdziwościowymi i formułami tworzonymi z nich wedle znanych zasad. W języku FOL, oprócz zmiennych indywiduowych oraz stałych logicznych (funktory prawdziwościowe, kwantyfikatory) mamy do dyspozycji całkiem dowolne predykaty oraz symbole funkcyjne.

2. *Semantyka*. Semantyka języka klasycznego rachunku zdań jest dość uboga: mówimy w niej o dwóch przedmiotach (możesz nazywać je *Prawdą* i *Fałszem*) oraz dwudziestu funkcjach prawdziwościowych operujących na tych przedmiotach. W języku FOL „mówić” możemy o całkiem dowolnych uniwersach, złożonych z jakichkolwiek przedmiotów oraz o wszelakich relacjach łączących te przedmioty i funkcjach na owych przedmiotach określonych.

3. *Rozstrzygalność*. W przypadku klasycznego rachunku zdań możliwe jest podanie *algorytmu* (w istocie, wielu algorytmów), który pozwala rozstrzygać dla dowolnej formuły języka tego rachunku, czy jest ona czy też nie jest jego prawem (tautologią). W przypadku FOL już tak nie jest, sytuacja jest

mianowicie następująca. Jeśli jakaś formuła *jest* tautologią FOL, to można – posługując się stosowną metodą algorytmiczną – fakt ten potwierdzić. Jeśli jednak jakaś formuła *nie jest* tautologią FOL, to wspomniana metoda może nie podać odpowiedzi w skończonej liczbie kroków.

1.3 Bardzo krótko o teorii modeli

Semantykę dla FOL opisuje dokładniej (klasyczna oraz współczesna) *teoria modeli*. Uwzględnia ona przy tym własności *teorii* wyrażonych w języku FOL.

1.3.1 Klasyczna teoria modeli

O klasycznej teorii modeli wypowiadano slogan, iż jest ona połączeniem logiki oraz algebry uniwersalnej. Do najważniejszych rodzajów ustaleń uzyskanych w tej teorii należą, m.in.:

1. Badania relacji między modelami: izomorfizmu, elementarnej równoważności, bycia elementarnym podmodelem, częściowego izomorfizmu, itd.
2. Charakteryzowanie klas formuł zachowywanych przez różnorodne operacje na modelach (np. branie podstruktur, tworzenie łańcuchów, tworzenie produktów oraz ultraproduktów).
3. Charakteryzowanie pojęć semantycznych (np. elementarnej równoważności) środkami matematycznymi (np. poprzez rodziny częściowych izomorfizmów).
4. Ustalenia dotyczące *zupełności* oraz *kategoryczności* (w mocy) teorii.
5. Badania szczególnych rodzajów modeli: pierwszych, atomowych, jednorodnych, nasyconych, uniwersalnych.

Zakładamy, że słuchacze pamiętają definicje pojęć: izomorfizmu i elementarnej równoważności. Mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest *elementarną podstrukturą* $\mathfrak{B}$, gdy $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ oraz dla każdej *formuły* α języka $L(\sigma)$ (rachunku predykatów o sygnaturze σ) oraz każdego wartościowania w zachodzi: $\mathfrak{A} \models_w \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models_w \alpha$. Jeśli $\mathfrak{A}$ jest elementarną podstrukturą $\mathfrak{B}$, to piszemy $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. Mówimy, że teoria T jest *modelowo zupełna*, gdy dla każdych jej modeli $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$: jeśli $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

Podajmy, dla ilustracji, kilkanaście wybranych ważnych twierdzeń klasycznej teorii modeli (słuchaczy zainteresowanych ich pełnym zrozumieniem uprzejmie zapraszamy do konsultowania podręczników teorii modeli):

1. *Twierdzenie o Istnieniu Modelu.* Zbiór zdań T jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy ma model.

2. Jeśli teoria T ma modele dowolnie dużych mocy skończonych, to ma model nieskończony.

3. *Test Tarskiego-Vaughta.* Niech $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

   (a) $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

   (b) Dla dowolnej formuły α oraz wartościowania w w strukturze $\mathfrak{A}$ takich, że $\mathfrak{B} \models_w \exists x_n \alpha$ istnieje $a \in dom(\mathfrak{A})$ taki, że $\mathfrak{B} \models_{w_n^a} \alpha$.

4. Każda struktura nieskończona ma właściwe elementarne rozszerzenie, czyli dla każdej nieskończonej $\mathfrak{A}$ istnieje $\mathfrak{B}$ różna od $\mathfrak{A}$ taka, że $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

5. $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\mathfrak{C}$ taka, że $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$ oraz $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$.

6. *Test Łosia-Vaughta.* Jeśli T jest teorią niesprzeczną bez modeli skończonych, κ-kategoryczną w pewnej mocy nieskończonej κ, to T jest zupełna.

7. *Test Robinsona na Modelową Zupełność.* Teoria T jest modelowo zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych jej modeli $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$, jeśli $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, to dla każdej formuły pierwotnej ψ oraz dowolnego wartościowania w (w $\mathfrak{A}$): jeśli $\mathfrak{B} \models_w \psi$, to $\mathfrak{A} \models_w \psi$.

8. *Twierdzenie Łosia.* Niech $\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ będzie dowolną rodziną struktur tego samego typu, a F ultrafiltrem nad zbiorem I. Dla dowolnej formuły $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ o zmiennych wolnych $x_1, \ldots, x_n$ i dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in \prod\limits_{i \in I} dom(\mathfrak{A}_i)$ następujące warunki są równoważne:

   (a) $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F \models \psi[[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$

   (b) $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi[a_1^i, \ldots, a_n^i]\} \in F$.

9. Każda ultrapotęga $\mathfrak{A}^I/F$ jest elementarnie równoważna ze strukturą $\mathfrak{A}$ (czyli $\mathfrak{A}^I/F$ spełnia dokładnie te same zdania, co $\mathfrak{A}$).

10. *Twierdzenie Tarskiego.* Niech $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta < \alpha}$ będzie łańcuchem elementarnym. Wtedy $\mathfrak{A}_\beta \prec \bigcup\limits_{\beta < \alpha} \mathfrak{A}_\beta$ dla wszystkich $\beta < \alpha$.

11. Jeśli T jest teorią modelowo zupełną, to suma każdego łańcucha modeli T jest modelem T.

12. *Twierdzenie Lindströma*. Jeśli T jest teorią (w języku przeliczalnym) taką, że:

    (a) wszystkie modele T są nieskończone;

    (b) suma dowolnego łańcucha modeli teorii T jest modelem teorii T;

    (c) T jest κ-kategoryczna w jakiejś mocy nieskończonej κ,

    to T jest modelowo zupełna.

Oczywiście, pełne rozumienie podanych wyżej przykładowo twierdzeń wymaga znajomości całego szeregu pojęć, których tu nie zdefiniowaliśmy. Przykłady te podaliśmy nie dla straszenia słuchaczy, ale raczej dla pokazania, że klasyczna semantyka logiczna nie kończy się na podaniu definicji pojęć takich jak: spełnianie, prawda, wynikanie logiczne, itp. Opuściliśmy m.in.: przykłady twierdzeń dotyczących zachowawczości określonych rodzajów formuł względem różnych operacji na modelach, twierdzenia charakteryzujące pojęcia semantyczne w terminach algebraicznych. Przykłady twierdzeń związanych z realizacją oraz omijaniem typów podajemy niżej, choć niektóre z nich należą jeszcze do klasycznej, a nie współczesnej teorii modeli.

1.3.2 Preludium do współczesnej teorii modeli

Zagadnienia dotyczące realizowania oraz omijania typów stanowiły niejako punkt wyjścia do współczesnej teorii modeli, mniej więcej pół wieku temu.

Są to wszystko zagadnienia matematycznie dość zaawansowane i słuchacze tych wykładów mają pełne prawo zapytać, dlaczego ich właśnie – językoznawców oraz filologów – miałyby one ciekawić. Odpowiedź na to zasadne pytanie mogłaby, naszym zdaniem, wskazać na dwie co najmniej sprawy:

1. Słuchacze chcieli usłyszeć, czym zajmuje się logika współczesna. Podane niżej konstrukcje i twierdzenia udzielają na to częściowej odpowiedzi – dla tego fragmentu badań logicznych, który wyrósł z podstaw semantyki logicznej.

2. Konstrukcje związane z typami elementów dotyczą *lokalnych* własności modeli. Są to zagadnienia, które interesować powinny językoznawcę – zastanawia się on przecież, czym jest np. *miejsce jednostki językowej w systemie języka*. Budując swoje teorie lingwistyczne powinien też zwracać baczną

uwagę na to, które z jego konstrukcji są *definiowalne* (i w jaki sposób) na gruncie przyjętych założeń wyjściowych.

Przed szczegółowym wypisaniem szeregu formalnych definicji, podajmy kilka intuicji. *Typy* to pewne zbiory formuł ze zmiennymi wolnymi, dla których zachodzą określone warunki związane ze spełnianiem formuł w modelach. Formuły ze zmiennymi wolnymi definiują pewne podzbiory uniwersum modelu (lub jakiejś potęgi kartezjańskiej tego uniwersum). Badanie typów to zatem badanie zbiorów definiowalnych w modelach. Zdania opisują modele jako całości. Natomiast elementy (uniwersum) modelu charakteryzowane mogą być przez formuły (z jedną zmienną wolną), które są o tych elementach prawdziwe. Tak więc, element $a \in dom(\mathfrak{A})$ może zostać scharakteryzowany przez zbiór tych formuł $\psi(x)$, dla których $\mathfrak{A} \models \psi(x)[a]$. Ogół takich formuł opisuje więc „miejsce, które a zajmuje w modelu $\mathfrak{A}$." Podobnie dla układów n elementów uniwersum modelu, dla dowolnej n. W zbiorze wszystkich zdań dowolnej teorii T wprowadzić można relację równoważności $\equiv_T$ w sposób następujący: $\psi \equiv_T \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T \vdash \psi \equiv \varphi$. Zbiór ilorazowy tej relacji to uniwersum *algebry Lindenbauma* dla teorii T, oznaczanej przez $\mathcal{L}_T$. Podobnie, w zbiorze formuł Fml_n^T (o *co najwyżej* n zmiennych wolnych) języka teorii T można wprowadzić (dla każdej n) relację równoważności $\equiv_T^n$: $\psi \equiv_T^n \varphi$ dokładnie wtedy, gdy $T \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \ (\psi(x_1, \ldots, x_n) \equiv \varphi(x_1, \ldots, x_n))$. Ten warunek jest z kolei równoważny temu, że: dla każdego modelu $\mathfrak{A}$ dla T oraz każdego ciągu $(a_1, \ldots, a_n)$ elementów $dom(\mathfrak{A})$: $\mathfrak{A} \models (\psi \equiv \varphi)[a_1, \ldots, a_n]$.

Dla dowolnej struktury $\mathfrak{A}$ sygnatury σ, teorii T w języku $L(\sigma)$ oraz ciągu n-elementowego $\overrightarrow{a}$ elementów uniwersum struktury $\mathfrak{A}$ niech:

$$Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a}) = \{\psi \in Fml_n^T : \mathfrak{A} \models \psi[\overrightarrow{a}]\}.$$

Zbiór $Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a})$ nazywamy *n-typem elementu* $\overrightarrow{a}$ (w strukturze $\mathfrak{A}$). Czasami mówimy krótko: typ elementu $\overrightarrow{a}$, gdy liczba n jest jasna z kontekstu lub nieistotna. Wprost z definicji widzimy, że typ elementu $\overrightarrow{a}$ w strukturze $\mathfrak{A}$ to ogół formuł spełnionych w $\mathfrak{A}$ przy wartościowaniu zmiennych wolnych tych formuł elementami ciągu $\overrightarrow{a}$. Oczywiście, różne ciągi $\overrightarrow{a}$ mogą mieć w strukturze $\mathfrak{A}$ ten sam typ.

Dla dowolnej $n > 0$, dowolnego $\Psi \subseteq Fml_n^T$ oraz dowolnej teorii T, mówimy, że:

1. Ψ jest *n-typem* teorii T, gdy istnieje model $\mathfrak{A}$ teorii T oraz n-elementowy ciąg $\overrightarrow{a}$ elementów jego uniwersum takie, że $\Psi \subseteq Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a})$;

2. Ψ jest *domkniętym n-typem* teorii T, gdy Ψ jest n-typem dla T oraz $T \subseteq \Psi$ i dla każdej $\psi \in Fml_n^T$, jeśli $\Psi \models \psi$, to $\psi \in \Psi$;

3. Ψ jest *zupełnym n-typem* teorii T, gdy Ψ jest domkniętym n-typem teorii T oraz dla każdej $\psi \in Fml_n^T$, $\neg\psi \in \Psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\psi \notin \Psi$.

4. Typy teorii T, które nie są zupełne nazywamy jej typami *częściowymi*.

Bezpośrednio z tej definicji wynikają następujące ustalenia. Niech $\Psi \subseteq Fml_n^T$ i niech $\overrightarrow{c}$ będzie ciągiem nowych stałych, a $L(\overrightarrow{c})$ rozszerzeniem języka L o te stałe. Wreszcie, niech $\Psi(\overrightarrow{c}) = \{\psi(\overrightarrow{c}) : \psi \in \Psi\}$. Wtedy dla dowolnej $n > 0$, dowolnego $\Psi \subseteq Fml_n^T$ oraz dowolnej teorii T w języku L:

1. Ψ jest n-typem teorii T dokładnie wtedy, gdy $T \cup \Psi(\overrightarrow{c})$ jest niesprzecznym zbiorem zdań w języku $L(\overrightarrow{c})$.

2. Ψ jest domkniętym n-typem teorii T dokładnie wtedy, gdy $\Psi(\overrightarrow{c})$ jest niesprzeczną teorią (w języku $L(\overrightarrow{c})$), rozszerzającą T.

3. Ψ jest zupełnym n-typem teorii T dokładnie wtedy, gdy $\Psi(\overrightarrow{c})$ jest zupełną teorią (w języku $L(\overrightarrow{c})$), rozszerzającą T.

4. Ψ jest zupełnym n-typem teorii T dokładnie wtedy, gdy $\Psi = Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a})$ dla pewnego modelu $\mathfrak{A}$ dla T oraz pewnego ciągu $\overrightarrow{a}$ elementów $dom(\mathfrak{A})$.

Dla dowolnej teorii T i formuły $\psi(\overrightarrow{x})$ języka tej teorii, mówimy, że $\psi(\overrightarrow{x})$ jest *T-niesprzeczna*, gdy nie zachodzi $T \models \neg\psi(\overrightarrow{x})$ (lub, równoważnie, gdy nie zachodzi $T \models \forall\overrightarrow{x}\ \neg\psi(\overrightarrow{x})$). Mamy wtedy:

1. $\psi(\overrightarrow{x})$ jest T-niesprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy $[\psi(\overrightarrow{x})]_T^n \neq \mathbf{0}_{\mathcal{L}_T^n}$.

2. $\psi(\overrightarrow{x})$ jest T-niesprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy $T \cup \{\exists\overrightarrow{x}\ \psi(\overrightarrow{x})\}$ jest niesprzeczna.

3. Jeśli T jest zupełna, to $\psi(\overrightarrow{x})$ jest T-niesprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy $T \models \exists\overrightarrow{x}\ \psi(\overrightarrow{x})$.

Dla dowolnej $n > 0$, dowolnego $\Psi \subseteq Fml_n$ oraz dowolnej teorii T, następujące warunki są równoważne (co wynika dość prosto z definicji):

1. Ψ jest n-typem dla T.

2. Koniunkcja każdego skończonego podzbioru zbioru Ψ jest T-niesprzeczna.

3. Rodzina $\{[\psi]_T^n : \psi \in \Psi\}$ ma własność przekrojów skończonych w $\mathcal{L}_T^n$.

Dla dowolnej $n > 0$, dowolnej teorii T oraz dowolnej $\psi(\overrightarrow{x}) \in Fml_n^T$, następujące warunki są równoważne:

1. $[\psi(\overrightarrow{x})]_T^n$ jest atomem w $\mathcal{L}_T^n$.
2. Dla wszystkich $\varphi(\overrightarrow{x}) \in Fml_n^T$: $T \models \psi(\overrightarrow{x}) \rightarrow \varphi(\overrightarrow{x})$ lub $T \models \psi(\overrightarrow{x}) \rightarrow \neg\varphi(\overrightarrow{x})$.
3. $\{\varphi(\overrightarrow{x}) : T \models \psi(\overrightarrow{x}) \rightarrow \varphi(\overrightarrow{x})\}$ jest zupełnym n-typem dla T.

Każdą formułę $\psi(\overrightarrow{x})$ spełniającą któryś (dowolny) z powyższych warunków nazywamy *formułą zupełną* (względem T). Dla dowolnej teorii T, dowolnej $n > 0$ i dowolnego n-typu Ψ dla T, mówimy, że: Ψ jest *główny*, gdy istnieje T-niesprzeczna formuła $\psi(\overrightarrow{x})$ taka, że dla wszystkich $\varphi \in \Psi$ zachodzi $T \models \psi \rightarrow \varphi$. W takim przypadku ψ nazywamy *generatorem* Ψ. Typy główne nazywamy także *izolowanymi*. Zauważmy, że w ogólności generator typu głównego nie musi być jego elementem, ale gdy T jest zupełna, to generator typu głównego zawsze do niego należy. Jeśli bowiem Ψ jest typem zupełnym w T, a $\psi(\overrightarrow{x})$ jego generatorem, to (na mocy T-niesprzeczności $\psi(\overrightarrow{x})$): $T \vdash \exists \overrightarrow{x}\ \psi(\overrightarrow{x})$. To z kolei implikuje, że *nie* zachodzi: $T \vdash \forall \overrightarrow{x}\ (\psi(\overrightarrow{x}) \rightarrow \neg\psi(\overrightarrow{x}))$. Tak więc, $\neg\psi(\overrightarrow{x})$ nie należy do Ψ. Ponieważ Ψ jest typem zupełnym, do Ψ musi należeć $\psi(\overrightarrow{x})$.

Dla dowolnej teorii T, niech $S^n(T)$ oznacza *zbiór wszystkich jej n-typów zupełnych*. Wtedy $S^n(T)$ jest zbiorem wszystkich n-typów o postaci $Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a})$, gdzie $\mathfrak{A}$ jest modelem T, a $\overrightarrow{a}$ ciągiem n elementów z $dom(\mathfrak{A})$. Istnieje bijekcja między $S^n(T)$ a rodziną wszystkich ultrafiltrów w algebrze $\mathcal{L}_T^n$. Dla dowolnej teorii T, dowolnej n oraz dowolnej $\psi \in Fml_n^T$, jeśli ψ jest T-niesprzeczna, to: $[\psi]_T^n$ nie jest atomem w $\mathcal{L}_T^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\varphi \in Fml_n$ taka, że zarówno $\psi \wedge \varphi$ jak i $\psi \wedge \neg\varphi$ są T-niesprzeczne.

Dla dowolnego modelu $\mathfrak{A}$ teorii T oraz n-typu Ψ:

1. Mówimy, że Ψ jest *realizowany w* $\mathfrak{A}$, gdy istnieje ciąg $\overrightarrow{a}$ elementów $dom(\mathfrak{A})$ taki, że $\Psi \subseteq Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a})$. Mówimy w takim przypadku, że $\overrightarrow{a}$ *realizuje* Ψ w $\mathfrak{A}$.
2. Mówimy, że *realizowalny*, gdy jest realizowany w jakimś modelu $\mathfrak{A}$. Ten termin może niezbyt zręcznie brzmi po polsku. Powiemy, że typ jest *niesprzeczny*, gdy istnieje model, który go realizuje.
3. Jeśli Ψ nie jest realizowany w $\mathfrak{A}$, to mówimy, że $\mathfrak{A}$ *omija* Ψ.

Wprost z definicji wynika, że każdy typ dla T jest realizowany w *jakimś* modelu teorii T. Z (dolnego) twierdzenia Löwenheima-Skolema wynika ponadto, że Ψ jest n-typem dla T wtedy i tylko wtedy, gdy jest realizowany w pewnym *przeliczalnym* modelu teorii T. Zwróćmy uwagę na różnicę między:

1. $\mathfrak{A} \models \Psi$

2. $\mathfrak{A}$ realizuje Ψ.

W pierwszym przypadku, gdy $\Psi \subseteq Fml_n^T$, to $\mathfrak{A} \models \Psi$ oznacza, że dla każdej formuły $\psi(\overrightarrow{x}) \in \Psi$ mamy $\mathfrak{A} \models \psi(\overrightarrow{x})$. To ostatnie ma miejsce dokładnie wtedy, gdy $\mathfrak{A} \models \forall \overrightarrow{x}\ \psi(\overrightarrow{x})$. Na mocy definicji relacji $\models$ zachodzi to, gdy dla *wszystkich* ciągów $\overrightarrow{a}$ elementów $dom(\mathfrak{A})$ mamy: $\mathfrak{A} \models \psi(\overrightarrow{x})[\overrightarrow{a}]$. Z drugiej strony, to, że $\mathfrak{A}$ realizuje Ψ oznacza, dla *co najmniej jednego* ciągu $\overrightarrow{a}$ elementów $dom(\mathfrak{A})$ mamy: $\mathfrak{A} \models \psi(\overrightarrow{x})[\overrightarrow{a}]$.

Nadto, na mocy twierdzenia o zwartości otrzymujemy natychmiast:

1. Niech Ψ będzie zbiorem formuł, których zmienne wolne znajdują się wśród $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ψ jest realizowany w jakimś modelu dokładnie wtedy, gdy każdy skończony podzbiór Ψ jest realizowany w jakimś modelu.

2. $(*)$ W konsekwencji, jeśli T jest teorią zupełną oraz Ψ jest zbiorem formuł, których zmienne wolne znajdują się wśród $x_1, x_2, \ldots, x_n$, to: Ψ jest n-typem dla T dokładnie wtedy, gdy każdy skończony podzbiór Ψ jest n-typem dla T.

Podajmy, dla ilustracji, kilka wybranych ważnych twierdzeń dotyczących realizowania i omijania typów (słuchaczy zainteresowanych ich pełnym zrozumieniem uprzejmie zapraszamy do konsultowania podręczników teorii modeli):

1. Jeśli T jest teorią zupełną, a Ψ jej n-typem, to dla dowolnego modelu $\mathfrak{A}$ dla T istnieje *elementarne* rozszerzenie modelu $\mathfrak{A}$, w którym Ψ jest realizowany.

2. Jeśli T jest zupełna, a Ψ jest jej typem izolowanym, to Ψ jest realizowany w każdym modelu T.

3. *Twierdzenie o omijaniu typów.* Niech Ψ będzie typem dla T, który nie jest główny. Istnieje wtedy przeliczalny model teorii T, który omija Ψ.

4. *Twierdzenie Rylla-Nardzewskiego.* Dla dowolnej teorii zupełnej T następujące warunki są równoważne:

   (a) T jest $\aleph_0$-kategoryczna.

   (b) Dla każdej $n > 0$, każdy niesprzeczny n-typ jest izolowany.

   (c) Dla każdej $n > 0$, każdy zupełny n-typ jest izolowany.

   (d) Dla każdej $n > 0$, zbiór $S^n(T)$ jest skończony.

(e) Dla każdej $n > 0$, zbiór $\mathcal{L}_T^n$ jest skończony.

Modele danej teorii mogą być „małe” lub „duże”, „ubogie” bądź „bogate”. Pojęcia wprowadzone poniżej oraz charakteryzujące je twierdzenia mają zdać sprawę z tej różnorodności. Modele atomowe to modele „ubogie”. Z kolei, modele uniwersalne i modele nasycone to modele „duże” i „bogate”.

Niech T będzie teorią zupełną (w języku przeliczalnym), która ma modele nieskończone. Jeśli zbiór wszystkich typów zupełnych teorii T, czyli zbiór $S(T)$, jest przeliczalny, to czasem mówimy, że T jest *małą* teorią. Przypominamy, że $S(T)$ jest zbiorem wszystkich typów zupełnych, które zawierają T jako podzbiór. Jeśli T jest mała, to wśród modeli T istnieje przeliczalny model „najmniejszy” oraz przeliczalny model „największy”. Nie chodzi przy tym oczywiście o moc uniwersum modelu, lecz o liczbę typów w nim realizowanych.

Model $\mathfrak{A}$ jest *atomowy*, gdy każdy typ zupełny $Tp_{\mathfrak{A}}(\overrightarrow{a})$ jest typem izolowanym teorii $Th(\mathfrak{A})$, dla każdego ciągu $\overrightarrow{a}$ elementów $dom(\mathfrak{A})$. Jest dość oczywiste, że jeśli teoria zupełna T jest mała, to istnieje jej przeliczalny model atomowy. Istotnie, na mocy Twierdzenia o Omijaniu Typów istnieje model dla T, który omija wszystkie typy niegłówne. Dalej, na mocy Dolnego Twierdzenia Löwenheima-Skolema, istnieje też przeliczalny model o tej własności. Modele atomowe to zatem te modele, które realizują jedynie te typy, które *muszą* być zrealizowane.

Mówimy, że struktura $\mathfrak{A}$ jest $\aleph_0$*-jednorodna*, gdy dla dowolnych ciągów $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ elementów $\mathfrak{A}$, jeśli $(\mathfrak{A}, \overrightarrow{a}) \equiv (\mathfrak{A}, \overrightarrow{b})$, to dla każdego $c \in dom(\mathfrak{A})$ istnieje $d \in dom(\mathfrak{A})$ taki, że $(\mathfrak{A}, \overrightarrow{a}, c) \equiv (\mathfrak{A}, \overrightarrow{b}, d)$.

Dla dowolnej teorii zupełnej T mówimy, że struktura $\mathfrak{A}$ jest *przeliczalnie uniwersalna*, gdy $\mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{A}$ dla każdego przeliczalnego modelu $\mathfrak{B}$ teorii T.

Dla dowolnej teorii zupełnej T mówimy, że struktura $\mathfrak{A}$ jest *słabo nasycona*, jeśli każdy typ w T jest realizowany w $\mathfrak{A}$. Mówimy, że struktura $\mathfrak{A}$ jest $\aleph_0$*-nasycona*, gdy dla dowolnego skończonego ciągu $\overrightarrow{a}$ elementów $\mathfrak{A}$ struktura $(\mathfrak{A}, \overrightarrow{a})$ jest słabo nasyconym modelem teorii $Th((\mathfrak{A}, \overrightarrow{a}))$. Tak więc, słabe nasycenie oznacza, że model realizuje dowolny typ, który może być niesprzecznie opisany w samym języku. Natomiast $\aleph_0$-nasycenie jest własnością mocniejszą: oznacza, iż model realizuje dowolne typy, które mogą być niesprzecznie opisane w języku ze skończenie wielu parametrami, nazywającymi elementy modelu.

Ψ jest (zupełnym) n*-typem w* $\mathfrak{A}$, gdy ψ jest (zupełnym) n-typem teorii $Th(\mathfrak{A})$. $S^n(\mathfrak{A})$ oznacza $S^n(Th(\mathfrak{A}))$, czyli zbiór wszystkich n-typów zupełnych struktury $\mathfrak{A}$. $s^n(\mathfrak{A})$ oznacza moc zbioru $S^n(\mathfrak{A})$. $\mathfrak{A}$ jest $\aleph_0$*-kategoryczna*, gdy $Th(\mathfrak{A})$ jest $\aleph_0$-kategoryczna. Jeśli $A \subseteq dom(\mathfrak{A})$, to *typem nad zbiorem* A jest typ, w którego formułach wystąpić mogą stałe, nazywające elementy zbioru A. Jeśli $A \subseteq dom(\mathfrak{A})$ oraz $(a_1, \ldots, a_n)$ jest ciągiem elementów z $dom(\mathfrak{A})$, to przez *typ (zu-*

pełny) ciągu $(a_1, \ldots, a_n)$ *nad* A *w* $\mathfrak{A}$ rozumiemy zbiór $Tp^A_{\mathfrak{A}}((a_1, \ldots, a_n))$ wszystkich formuł ψ z języka L_A (czyli języka L rozszerzonego o nowe stałe nazywające elementy A), które mają zmienne wolne wśród $x_1, \ldots, x_n$ takich, że: $\mathfrak{A} \models \psi(x_1, \ldots, x_n)[a_1, \ldots, a_n]$. Niech $S_A(T)$ oznacza zbiór wszystkich typów zupełnych nad A, natomiast $S^n_A(T)$ zbiór wszystkich n-typów zupełnych nad A.

Zachodzą następujące fakty:

1. Teoria zupełna T ma przeliczalny model $\aleph_0$-nasycony dokładnie wtedy, gdy zbiór $S(T)$ jest przeliczalny.

2. Każdy przeliczalny model $\aleph_0$-nasycony (teorii zupełnej) jest $\aleph_0$-jednorodny.

3. Każdy przeliczalny model $\aleph_0$-nasycony (teorii zupełnej) jest przeliczalnie uniwersalny.

4. Jeśli T jest małą teorią (czyli $S(T)$ jest przeliczalny), to jej model $\mathfrak{A}$ jest $\aleph_0$-nasycony dokładnie wtedy, gdy jest przeliczalnie uniwersalny oraz $\aleph_0$-jednorodny.

5. Dla dowolnej teorii zupełnej T, T ma przeliczalny model atomowy wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $n > 0$, $\mathcal{L}^n_T$ jest atomową algebrą Boole'a.

6. Dla dowolnej teorii zupełnej T oraz dowolnego $\mathfrak{A}$: $\mathfrak{A}$ jest przeliczalnym modelem atomowym dla T wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A}$ jest modelem elementarnie pierwszym teorii T. [Model $\mathfrak{A}$ teorii T nazywamy jej modelem (elementarnie) *pierwszym*, jeśli istnieją elementarne włożenia $\mathfrak{A}$ w dowolny model teorii T.]

7. Dla dowolnej teorii zupełnej T i dowolnego jej modelu $\mathfrak{A}$ istnieje model $\mathfrak{B}$ dla T taki, że:

   (a) $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.
   (b) $\mathfrak{B}$ jest $\aleph_0$-nasycony nad $\mathfrak{A}$.
   (c) Jeśli moc $\mathfrak{A}$ jest niewiększa od $2^{\aleph_0}$, to także moc $\mathfrak{B}$ jest niewiększa od $2^{\aleph_0}$.
   (d) Jeśli $\mathfrak{A}$ jest przeliczalny oraz $S^n(T)$ jest przeliczalny dla wszystkich $n > 0$, to $\mathfrak{B}$ jest przeliczalny.

8. Dla dowolnej teorii zupełnej T:

   (a) T ma model $\aleph_0$-nasycony mocy co najwyżej $2^{\aleph_0}$.

(b) T ma przeliczalny model $\aleph_0$-nasycony wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $n > 0$ zbiór $S^n(T)$ jest przeliczalny.

9. Teoria jest $\aleph_0$-kategoryczna dokładnie wtedy, gdy ma model atomowy i model $\aleph_0$-nasycony i modele te są izomorficzne.

10. Dla dowolnej teorii zupełnej T i dowolnych jej modeli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, jeśli są one oba $\aleph_0$-nasycone, to są częściowo izomorficzne. Stąd, jeśli oba są przeliczalne, to są również izomorficzne.

Nie będziemy zadręczać słuchaczy omawianiem zagadnień związanych z modelami nieprzeliczalnymi. Dodajmy jedynie dwie definicje, które będą potrzebne w dalszym ciągu.

Dla dowolnej liczby kardynalnej κ oraz dowolnej struktury $\mathfrak{A}$, mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest *κ-nasycona*, gdy dla dowolnego zbioru $X \subseteq dom(\mathfrak{A})$ o mocy mniejszej od κ struktura $\mathfrak{A}_X$ jest słabo nasycona. Mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest *nasycona*, gdy $\mathfrak{A}$ jest $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$-nasycona. Przypominamy, że $\mathfrak{A}_X$ jest strukturą, interpretującą język $L_{\{\overline{a}:a\in X\}}$, gdzie dla każdego $a \in X$, nazwa $\overline{a}$ tego elementu jest interpretowana w $\mathfrak{A}_X$ jako ten właśnie element.

Dla dowolnej teorii T oraz dowolnej liczby kardynalnej κ mówimy, że T jest *κ-stabilna*, gdy dla każdego modelu $\mathfrak{A}$ dla T, wszystkich $X \subseteq dom(\mathfrak{A})$ takich, że moc X jest niewiększa od κ oraz wszystkich $n > 0$ zbiór $S^n(\mathfrak{A}_X)$ jest mocy co najwyżej κ. Zwykle zamiast mówić, że T jest $\aleph_0$-stabilna mówimy, iż T jest ω-stabilna.

1.3.3 Współczesna teoria modeli

Współczesna teoria modeli zaczyna się – umownie – od *twierdzenia Morleya*. Głównym tematem badań są problemy związane z *definiowalnością*. Między innymi, omawiano następujące rodzaje zagadnień:

1. Kategoryczność teorii w mocach nieprzeliczalnych.

2. Ustalenia dotyczące liczby wzajemnie nieizomorficznych modeli wybranych teorii.

3. Struktura przestrzeni n-typów rozmaitych teorii.

Wprowadźmy ogólne oznaczenie: dla dowolnej teorii T oraz dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej κ niech $\mu(T, \kappa)$ oznacza liczbę klas izomorfizmu modeli teorii T mocy κ. Tak więc, jeśli T jest κ-kategoryczna, to $\mu(T, \kappa) = 1$.

Liczba $\mu(T,\kappa)$ jest niemniejsza od liczby klas równoważności relacji elementarnej równoważności modeli. Przypomnijmy, że wszystkie modele teorii zupełnej są elementarnie równoważne. Teoria zupełna może mieć jednak większą od 1 liczbę $\mu(T,\kappa)$: np. dla teorii gęstych liniowych porządków i $\kappa = \aleph_0$ liczba ta jest równa 4. Liczba $\mu(T,\kappa)$ odpowiada różnorodności matematycznej modeli teorii T. Natomiast liczba klas relacji elementarnej równoważności modeli wiąże się z możliwościami wyrażania języków pierwszego rzędu. Wyniki dotyczące niezupełności wielu ważnych teorii matematycznych pokazują ograniczenia w tym względzie języków pierwszego rzędu.

Z Dolnego Twierdzenia Löwenheima-Skolema wynika, że dla dowolnej teorii niesprzecznej T, $\mu(T,\aleph_0) \geqslant 1$. Dla każdej teorii niesprzecznej T oraz dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej κ zachodzą nierówności:

$$1 \leqslant \mu(T,\kappa) \leqslant 2^\kappa.$$

Jeśli T jest teorią zupełną, to algebra Lindenbauma jej zdań jest dwuelementowa i zawiera dokładnie jeden ultrafiltr (jednostkowy). Dla $n > 0$ (czyli gdy rozważamy formuły ze zmiennymi wolnymi), zarówno $\mathcal{L}_T^n$, jak i S^n mają o wiele bardziej złożone struktury. Każdy zupełny n-typ dla T jest nieskończonym zbiorem formuł i ma nieprzeliczalnie wiele podzbiorów, które są typami. Miarą złożoności (semantycznej) jest zatem liczba zupełnych n-typów teorii T, czyli moc zbioru $S^n(T)$. W ogólności, dla dowolnej zupełnej teorii T moc ta jest niemniejsza od 1 oraz niewiększa od $2^{\aleph_0}$. Jednym z ciekawych problemów jest badanie związków między liczbą typów teorii a liczbą jej nieizomorficznych modeli w różnych mocach. Przez $s^n(T)$ oznaczaliśmy moc zbioru $S^n(T)$. Zachodzą następujące fakty:

1. Dla dowolnej niesprzecznej teorii T i każdej $n > 0$ zachodzi nierówność:

   $$s^n(T) \leqslant \aleph_0 \times \mu(T,\aleph_0).$$

   Wynika stąd, że:

   (a) Jeśli $\mu(T,\aleph_0) \leqslant \aleph_0$, to dla wszystkich $n > 0$: $s^n(T) \leqslant \aleph_0$.

   (b) Jeśli dla wszystkich $n > 0$: $s^n(T) = 2^{\aleph_0}$, to $\mu(T,\aleph_0) = 2^{\aleph_0}$.

2. Dla dowolnej niesprzecznej teorii T i każdej $n > 0$, jeśli $s^n(T) < 2^{\aleph_0}$, to $s^n(T) \leqslant \aleph_0$.

Przy założeniu Uogólnionej Hipotezy Kontinuum ostatnie z podanych wyżej twierdzeń jest oczywiste. Natomiast bez tego założenia, stale otwarta pozostaje postawiona w 1963 roku *Hipoteza Vaughta*: Dla dowolnej niesprzecznej teorii T, jeśli

$\mu(T,\aleph_0) < 2^{\aleph_0}$, to $\mu(T,\aleph_0) \leqslant \aleph_0$. Zachodzi następujące twierdzenie, udowodnione przez Morleya: Dla dowolnej niesprzecznej teorii T, jeśli $\mu(T,\aleph_0) < 2^{\aleph_0}$, to $\mu(T,\aleph_0) \leqslant \aleph_1$.

Widma nieprzeliczalne dla teorii przeliczalnych zostały ustalone. Pozostają problemy otwarte dla wartości $\mu(T,\aleph_0)$. Własności widm wiążą się pojęciami niezależności; np. każda teoria T silnie minimalna ma widmo nieprzeliczalne określone przez $\mu(T,\kappa) = 1$.

W 1954 roku Jerzy Łoś zauważył, że wszystkie znane przeliczalne teorie T podpadają pod jeden z następujących czterech typów:

1. $(+,-)$: T jest $\aleph_0$-kategoryczna, ale dla wszystkich nieprzeliczalnych liczb kardynalnych κ, T nie jest κ-kategoryczna.
2. $(-,+)$: T nie jest $\aleph_0$-kategoryczna, ale dla wszystkich nieprzeliczalnych liczb kardynalnych κ, T jest κ-kategoryczna.
3. $(+,+)$: Dla wszystkich liczb kardynalnych κ, T jest κ-kategoryczna.
4. $(-,-)$: Dla wszystkich liczb kardynalnych κ, T nie jest κ-kategoryczna.

Łoś postawił hipotezę, że są to jedyne możliwości. W 1965 roku Morley udowodnił poprawność tej hipotezy:

- *Twierdzenie Morleya*. Jeśli teoria T jest κ-kategoryczna w jakiejś mocy nieprzeliczalnej κ, to T jest kategoryczna w każdej mocy nieprzeliczalnej.

Przypomnijmy, że teorię T nazywaliśmy małą, gdy zbiór $S(T)$ był przeliczalny. Dla małych teorii przytoczyliśmy niektóre ustalenia dotyczące istnienia oraz jednoznaczności modeli $\aleph_0$-nasyconych oraz modeli atomowych. Podaliśmy także warunki konieczne i wystarczające na to, aby mała teoria była $\aleph_0$-kategoryczna, czyli wyznaczała z dokładnością do izomorfizmu swój model przeliczalny. Okazuje się, że dla teorii przeliczalnych są tylko dwie możliwości na moc zbioru $S(T)$: jest on mianowicie albo przeliczalny, albo ma moc kontinuum, czyli $2^{\aleph_0}$. Ponadto, liczba nieizomorficznych modeli przeliczalnej teorii, która nie jest mała wynosi kontinuum. Jest dość oczywiste, że jeśli T jest teorią przeliczalną, a κ liczbą kardynalną nieskończoną, to istnieje co najwyżej 2^κ nieizomorficznych modeli T mocy κ.

Widzimy więc, że funkcja $\mu(T,\aleph_0)$ może osiągać swoją maksymalnie możliwą wartość. Jej pewne wartości są jednak wykluczone, jak pokazuje twierdzenie udowodnione przez Vaughta: Teoria zupełna nie może mieć dokładnie dwóch (nieizomorficznych) modeli przeliczalnych.

Mówimy, że zupełna i przeliczalna teoria T jest:

1. *stabilna*, jeśli jest κ-stabilna dla dowolnie dużych κ.
2. *superstabilna*, jeśli jest κ-stabilna dla wystarczająco dużych κ.
3. *ω-stabilna*, jeśli jest κ-stabilna dla wszystkich nieskończonych κ.
4. *ściśle stabilna*, gdy jest stabilna, ale nie jest superstabilna.
5. *ściśle superstabilna*, gdy jest superstabilna, ale nie ω-stabilna.
6. *niestabilna*, gdy nie jest stabilna.

Każda teoria jest jednej z czterech klas: ω-stabilna, ściśle superstabilna, ściśle stabilna lub niestabilna. Teorie stabilne są czasem definiowane w terminach porządków definiowalnych w ich modelach. Dowodzi się wtedy warunków koniecznych i wystarczających na stabilność właśnie w terminach takich porządków. Dla przykładu, teoria dowolnego nieskończonego porządku liniowego nie jest stabilna. Dowodzi się również, że jeśli T nie jest stabilna, to $\mu(T, \kappa) = 2^\kappa$ dla wszystkich κ nieprzeliczalnych.

Posługujemy się (nieostro, intuicyjnie) rozumianymi pojęciami: teorii *oswojonych* oraz teorii *dzikich*. Teorie oswojone dopuszczają analizowanie ich środkami teorii modeli. Teorie dzikie, to te, które oswojone nie są. Oto niektóre przykłady teorii, umieszczone na skali stabilności:

1. Wśród teorii *dzikich* jest nierozstrzygalna teoria arytmetyki.
2. Teorie *oswojone* to np. teorie o-minimalne oraz teorie wymienione niżej.
3. Teorie *proste* to np. teoria grafu losowego oraz teorie wymienione poniżej.
4. Teorie *stabilne* to teorie superstabilne wymienione niżej oraz takie teorie ściśle stabilne jak np. teoria przeliczalnie wielu relacji równoważności E_i, „zagnieżdżonych" w ten sposób, iż dla każdej i:
   (a) $\forall x \forall y\ (E_{i+1}(x, y) \rightarrow E_i(x, y))$
   (b) każda klasa E_i-równoważności zawiera przeliczalnie wiele klas E_{i+1}-równoważności.

   Ta teoria jest stabilna, ale nie jest superstabilna.
5. Teorie *superstabilne*, wśród których są teorie ω-stabilne wyliczone niżej oraz teorie ściśle superstabilne takie, jak np. teoria przeliczalnie wielu relacji równoważności E_i, z których każda ma dokładnie dwie klasy równoważności i

takich, że przekrój relacji E_i oraz E_j dla $i \neq j$ ma dokładnie cztery klasy równoważności.

Jest to teoria superstabilna, która nie jest ω-stabilna.

6. Teorie *ω-stabilne*, które obejmują wszystkie teorie nieprzeliczalnie kategoryczne oraz takie teorie niekategoryczne jak np. teoria jednej relacji równoważności mającej dwie klasy nieskończone.

7. Teorie *nieprzeliczalnie kategoryczne* obejmują wszystkie teorie silnie minimalne. Każda teoria nieprzeliczalnie kategoryczna jest związana z pewną strukturą silnie minimalną. Należą tu jednak też teorie nieprzeliczalnie kategoryczne, które nie są silnie minimalne, np. teoria struktury liczb całkowitych z funkcją następnika s oraz jedną relacją jednoargumentową P taką, że: $\forall x\ (P(x) \equiv \neg P(s(x)))$.

8. Teorie *silnie minimalne*: np. teoria liczb całkowitych z funkcją następnika, teoria ciał algebraicznie domkniętych, teoria przestrzeni wektorowych.

Wszystkie teorie nieprzeliczalnie kategoryczne są ω-stabilne, ale teorie przeliczalnie kategoryczne przecinają pietra powyższej hierarchii. Istnieją mianowicie teorie przeliczalnie kategoryczne, które:

1. są silnie minimalne (np. teoria klik)
2. są niestabilne (teoria grafu losowego)
3. nie są proste (gęste liniowe porządki).

Część pracy matematyka polega na *klasyfikowaniu*. Należy przy tym podkreślić, że nie jest to praca podobna np. do działań botanika, zoologa czy bibliotekarza. Matematyk klasyfikuje struktury, a po to aby dokonać klasyfikacji nie wystarcza przyglądać się strukturom. Najczęściej trzeba *dowodzić*, że struktury rozważanego rodzaju można poklasyfikować, a ta procedura wcale nie musi być łatwa.

Wedle jakich kryteriów klasyfikujemy struktury? Pierwszą odpowiedzią jest zwykle: z dokładnością do izomorfizmu, czyli za nieodróżnialne uważamy struktury izomorficzne. Istotnie, izomorfizm struktur relacyjnych (bądź algebr) jest bardzo naturalną podstawą klasyfikacji: struktury izomorficzne nie różnią się ani liczbą elementów, ani budową. Jak widzieliśmy powyżej, izomorfizm nie jest jednak jedyną relacją równoważności miedzy strukturami, która jest interesująca z punktu widzenia teorii modeli. Klasyfikujemy struktury np. także ze względu na:

1. relację elementarnej równoważności;

2. relację częściowego izomorfizmu;

3. liczbę typów spełnianych w modelach.

Tak więc, klasyfikowanie ze względu na izomorfizm (lub częściowy izomorfizm) odzwierciedla podobieństwo struktur (a nawet nieodróżnialność) ze względu na budowę. Z kolei, klasyfikowanie ze względu na elementarną równoważność oddaje niedróżnialność struktur jeśli chodzi o spełniane w nich zdania (języka pierwszego rzędu). Podobnie, klasyfikowanie ze względu na liczbę typów spełnianych w modelu jest porównywaniem modeli biorącym pod uwagę bardziej jeszcze złożone własności semantyczne i wiąże się także z rozmaitością zbiorów definiowalnych w poszczególnych modelach.

Przy okazji, dodajmy jeszcze komentarz dotyczący zupełności teorii, czyli elementarnej równoważności wszystkich jej modeli. Jak już wiemy, wiele podstawowych, interesujących matematyków teorii to teorie niezupełne: arytmetyka PA, teoria mnogości, by wymienić te dwie najczęściej przywoływane w tym kontekście. Jednak w wielu twierdzeniach teorii modeli istotne jest założenie zupełności rozważanych teorii. Dlaczego to założenie ma tak uprzywilejowaną pozycję? Między innymi dlatego, że teorie zupełne to takie, których modele nie mogą być odróżnione poprzez zdania pierwszego rzędu. W teorii zupełnej jej modele są scharakteryzowane z całą mocą, na którą pozwala język logiki pierwszego rzędu.

Oprócz samego klasyfikowania struktur, możemy też pytać np. o to, *jakiego rodzaju* struktury występują w poszczególnych członach klasyfikacji (powiedzmy, czy muszą być wyposażone w określoną strukturę algebraiczną).

Operacje na strukturach zachowują określone typy zdań. Mamy więc również klasyfikacje tych operacji, uwzględniające to, jakiego rodzaju zdania (uniwersalne, egzystencjalne, Hornowskie, itp.) są przez te operacje zachowywane.

Do ważnych wyników teorii modeli należą również twierdzenia, ustalające związki miedzy poszczególnymi klasyfikacjami. Struktury izomorficzne są oczywiście elementarnie równoważne (lecz nie na odwrót). Znamy związki między elementarną równoważnością a istnieniem rodzin częściowych izomorfizmów, posiadających stosowne własności rozszerzania. Mamy zatem czysto algebraiczną charakterystykę semantycznego pojęcia elementarnej równoważności. Takimi charakterystykami są również twierdzenia opisujące klasy elementarne w terminach domknięcia na pewne operacje algebraiczne na strukturach. Dolne i górne twierdzenie Löwenheima-Skolema mówi, wyrażając się swobodnie, że logika pierwszego rzędu nie odróżnia mocy nieskończonych. W połączeniu z twierdzeniem o pełności (lub z twierdzeniem o zwartości) twierdzenie Löwenheima-Skolema podaje charakterystykę logiki pierwszego rzędu. Konsekwencją twierdzenia Löwenheima-Skolema jest m.in. to, że żadna teoria, która ma model nieskończony, nie może być kategoryczna. Tak więc, jedynie pojęcie kategoryczności w mocy pozostaje przydatne. Logika pierwszego rzędu nie wyróżnia żadnej stałej pozalogicznej (predykatu, symbolu funkcyjnego, stałej indywidualnej), co wiemy z twierdzenia udowodnionego przez Grzegorczyka. Jednak teorie struktur z relacjami określonego rodzaju (np. liniowym porządkiem) są w pewnym sensie wyróżnione. Teoria gęstego liniowego porządku ma w każdej mocy nieprzeliczalnej κ maksymalną możliwą liczbę modeli nieizomorficznych, co ma pewne ważne konsekwencje dla klasyfikowania struktur i teorii. Twierdzenie Rylla-Nardzewskiego charakteryzuje teorie $\aleph_0$-kategoryczne (czyli takie, których wszystkie modele przeliczalne są izomorficzne) w terminach semantycznych, poprzez odwołanie się do liczby typów spełnianych w modelach. Z kolei, twierdzenie Morleya ustala, mówiąc swobodnie, że żadna moc nieprzeliczalna nie jest wyróżniona, jeśli chodzi o kategoryczność w mocy. Pozostaje jednak problem: czy możemy inaczej jeszcze (niż ze względu na izomorfizm) klasyfikować struktury dla teorii, które nie są kategoryczne w mocach nieskończonych? Czy potrafimy scharakteryzować funkcję $\mu(T, \kappa)$, której wartością jest liczba nieizomorficznych modeli mocy κ dla teorii T? Na czym miałaby taka charakterystyka polegać? Czy miałaby się wiązać z liczbą typów spełnianych w modelach czy może z innymi semantycznymi własnościami teorii? Odpowiedzi na te pytania dostarczyła rozwijana głównie przez Saharona Shelaha *teoria klasyfikacji*.

Powiedzieć, że będziemy klasyfikować struktury z dokładnością do izomorfizmu to jeszcze za mało. Trzeba mianowicie dodać, jakie wybierzemy *niezmienniki* naszych klasyfikacji. Rozważmy prosty przykład. Bierzemy pod uwagę teorię T struktur o postaci (A, E_1, E_2), gdzie E_1, E_2 są relacjami równoważności na zbiorze A takimi, iż:

1. $E_2 \subseteq E_1$ (czyli każda E_2-klasa jest zawarta w pewnej E_1-klasie).

2. Każda E_2-klasa ma nieskończenie wiele elementów.

3. E_1-klasa zawiera nieskończenie wiele E_2-klas.

4. Istnieje nieskończenie wiele E_1-klas.

Wtedy T jest teorią zupełną, co wynika z twierdzenia Vaughta i faktu, że T jest $\aleph_0$-kategoryczna. W jaki sposób (z dokładnością do izomorfizmu) klasyfikować modele tej teorii? Każda E_1-klasa mocy $\aleph_\alpha$ w modelu teorii T jest określona jednoznacznie (z dokładnością do izomorfizmu) przez funkcję, która każdej liczbie kardynalnej $\aleph_\beta \leqslant \aleph_\alpha$ przyporządkowuje liczbę klas E_2-równoważności o mocy $\aleph_\beta$ zawartych w tej E_1-klasie. Inaczej mówiąc, każda E_1-klasa mocy $\aleph_\alpha$ w modelu teorii T jest określona jednoznacznie (z dokładnością do izomorfizmu) przez uporządkowany ciąg długości α liczb kardynalnych niewiększych od $\aleph_\alpha$. Tak więc, jeśli $\mathfrak{A} = (A, E_1, E_2)$ jest modelem T mocy κ, to typ izomorfizmu struktury $\mathfrak{A}$ jest całkowicie określony poprzez funkcję przyporządkowującą każdemu ciągowi długości α liczb kardynalnych niewiększych od $\aleph_\alpha$ (gdzie $\aleph_\alpha \leqslant \kappa$) liczbę E_1-klas w $\mathfrak{A}$ odpowiadającą temu ciągowi.

Niech C będzie klasą liczb kardynalnych. Przez indukcję pozaskończoną definiujemy klasy C^α, gdzie α jest liczbą porządkową:

1. C^0 jest klasą C.
2. Jeśli $\alpha = \beta + 1$, to $C^\alpha = C^\beta \cup \wp(C^\beta)$.
3. Jeśli α jest liczbą graniczną, to $C^\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} C^\beta$.

Niech T będzie teorią zupełną, a α liczbą porządkową. Mówimy, że T ma *system niezmienników* rzędu α, jeśli istnieje funkcja f przyporządkowująca każdemu modelowi teorii T pewien element C^α i to w taki sposób, że modele $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\mathfrak{A}) = f(\mathfrak{B})$.

Mówimy, że teoria jest *klasyfikowalna*, gdy T ma system niezmienników rzędu α dla pewnej liczby porządkowej α. Zachodzi następujący fakt:

- Niech T będzie teorią zupełną taką, że dla każdej mocy nieprzeliczalnej λ teoria T ma 2^λ parami nieizomorficznych modeli mocy λ. Wtedy T nie jest klasyfikowalna.

Tak więc, jeśli wcześniej określona funkcja $\mu(T, \lambda)$ przyjmuje dla każdego argumentu λ swoją maksymalną możliwą wartość, to teoria T jest nieklasyfikowalna. Teoria gęstych liniowych porządków jest $\aleph_0$-kategoryczna. Jednak w każdej mocy nieprzeliczalnej λ teoria ta ma 2^λ parami nieizomorficznych modeli mocy λ, a zatem jest nieklasyfikowalna. Podobnie, (zupełna) teoria porządków liniowych na zbiorach nieskończonych także spełnia warunki powyższego twierdzenia, a więc nie jest klasyfikowalna.

2 Wybrane ustalenia metamatematyki

Badania metateoretyczne nie są ograniczane do samej logiki, do badań poszczególnych systemów logicznych oraz związków między nimi. Prowadzi się mianowicie intensywne badania samych teorii matematycznych, zwłaszcza tych o znaczeniu najbardziej podstawowym dla całości matematyki, jak np. arytmetyka lub teoria mnogości. W niniejszych notatkach ograniczymy się do przedstawienia informacji o wybranych ważnych twierdzeniach dotyczących arytmetyki Peana pierwszego rzędu PA. Obszerne wykłady tej problematyki znaleźć można obecnie w każdym porządnym podręczniku logiki matematycznej. Nasze przedstawienie wzorujemy na monografii Murawski 2000.

Uzyskanie wyników metamatematycznych dotyczących arytmetyki PA umożliwione zostało poprzez genialny, acz w gruncie rzeczy prosty pomysł. Należało mianowicie doprowadzić do tego, aby w języku arytmetyki można było „mówić" o niej samej. Osiągnięto to poprzez *kodowanie* wyrażeń arytmetyki (termów, formuł) oraz ciągów takich wyrażeń (np. dowodów) liczbami naturalnymi. Kodowanie takie musi oczywiście być *jednoznaczne*, ale musi też być – w ściśle określonym sensie – efektywne. Ten drugi wymóg zakłada, że potrafimy w precyzyjny sposób określić intuicyjne pojęcie *efektywnej obliczalności*. Istotnie, potrafimy to zrobić, nawet na wiele różnych (choć równoważnych!) sposobów – służyć temu celowi mogą np.: funkcje rekurencyjne, maszyny Turinga, algorytmy Markowa, rachunek lambda Churcha, itd.

Należało ponadto wykazać, że podstawowe pojęcia oraz operacje logiczne można właśnie w sposób efektywny w arytmetyce wyrazić: dla przykładu, że znając kod formuły (o jednej zmiennej wolnej), kod zmiennej oraz kod termu, efektywnie można obliczyć kod wyniku podstawienia tego termu za ową zmienną w rozważanej formule. Pojęciem, które *nie* jest efektywnie obliczalne, okazuje się pojęcie twierdzenia arytmetyki PA: *być twierdzeniem* PA znaczy przecież *posiadać dowód* w PA, a posiadanie dowodu to *istnienie* pewnego ciągu formuł. Mamy więc w tej definicji *nieograniczony* kwantyfikator egzystencjalny. Nie można z góry przesądzić, jaka będzie długość dowodu wybranej formuły języka PA, o ile jest ona twierdzeniem PA. W konsekwencji, zbiór wszystkich (kodów) twierdzeń PA nie jest zbiorem *obliczalnym* (dokładniej: rekurencyjnym).

Pokazuje się ponadto, że pojęcie dowodliwości w PA nie pokrywa się zakresowo z pojęciem prawdy arytmetycznej, czyli pojęciem prawdziwości w modelu standardowym arytmetyki PA. Jeśli PA jest niesprzeczna, to w PA istnieją zdania *nierozstrzygalne* – takie zdania ψ, że ani ψ, ani $\neg\psi$ nie ma dowodu w PA. Jedno ze zdań tej pary musi być jednak prawdziwe w modelu standardowym. Otrzymujemy więc przykłady zdań, które są prawdziwe, lecz niedowodliwe w PA.

Dalsze wyniki metamatematyczne dotyczące PA głoszą np., że jeśli PA jest niesprzeczna, to jej niesprzeczności nie można udowodnić w niej samej (potrzeba do tego teorii mocniejszej), że pojęcie prawdy arytmetycznej nie może zostać scharakteryzowane w języku PA, itd.

2.1 Funkcje rekurencyjne

Pomijamy cały szereg – koniecznych w całościowym wykładzie tej problematyki – definicji oraz konstrukcji i dowodów, staramy się jedynie przybliżyć słuchaczom podstawowe idee. Funkcje rekurencyjne to, przypomnijmy, jedna z możliwości precyzyjnego reprezentowania intuicyjnego pojęcia efektywnej obliczalności.

Rozważamy nie całkiem dowolne funkcje, ale jedynie takie, których wartości otrzymujemy w sposób *efektywny* (*obliczalny*). Za funkcje obliczalne uznamy np. funkcje stałe (nic nie trzeba liczyć), funkcję następnika (dodanie jedynki do liczby), funkcje rzutu (wybranie liczby ze skończonej listy). Uznamy, że składając funkcje obliczalne otrzymamy funkcję obliczalną. Uznamy też, że pewne inne operacje (rekursja prosta, minimum efektywne) stosowane do funkcji obliczalnych dają funkcje obliczalne.

Przyjmiemy w tym punkcie następujące ustalenia:

1. ω oznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych.
2. $dom(f)$ oznacza dziedzinę funkcji f, a $rng(f)$ jej przeciwdziedzinę. Podobnie dla relacji.
3. Używamy standardowo przyjętych symboli dla operacji i relacji arytmetycznych.
4. Zakładamy, że słuchacze pamiętają podstawowe własności operacji i relacji arytmetycznych.
5. Zakładamy, że słuchacze znają podstawowe pojęcia rachunku zbiorów i relacji.
6. W dalszym ciągu tego punktu, używając terminu „zbiór” będziemy mieli na myśli tylko podzbiory zbioru ω wszystkich liczb naturalnych, zaś *zbiorami* n*-tek* (*ciągów długości* n) będziemy nazywać podzbiory zbioru ω^n $(n \geqslant 1)$.

Częściowe funkcje liczbowe $f(x_1, \ldots, x_n)$ (dla $n = 1, 2, \ldots$), to funkcje określone na pewnym podzbiorze zbioru ω^n o wartościach będących liczbami naturalnymi.

Dla dowolnych liczb $a_1, \ldots, a_n \in \omega$ oraz funkcji f (k-argumentowej) i g (s-argumentowej) piszemy

$$f(a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}) = g(a_{j_1}, \ldots, a_{j_s}),$$

jeśli: albo wartości $(a_{j_1}, \ldots, a_{j_k})$ oraz $g(a_{j_1}, \ldots, a_{j_s})$ są nieokreślone albo są obie określone i identyczne.

n-argumentowa funkcja $f(x_1, \ldots, x_n)$ jest *całkowita*, jeśli jej dziedziną jest cały zbiór ω^n, czyli gdy $dom(f) = \omega^n$.

Następujące funkcje całkowite nazywamy *prostymi*:

1. $s(x) = x + 1$ (następnik),
2. $o(x) = 0$ (funkcja stała równa 0),
3. $I^n_m(x_1, \ldots, x_n) = x_m \quad$ (dla $\quad 1 \leqslant m \leqslant n$) (rzut na m-tą współrzędną).

Funkcja $h(x_1, \ldots, x_n) = g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$ otrzymywana jest z funkcji $g, f_1, \ldots, f_m$ przez operację *złożenia*.

Funkcję $h(x_1, \ldots, x_n) = g(t_1, \ldots, t_m)$ otrzymujemy z pomocą operacji *podstawienia* z funkcji $g, f_1, \ldots, f_k$, gdy $t_i = f_j(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s})$, gdzie każde x_{j_l} jest jedną ze zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ lub t_i jest jedną ze zmiennych $x_1, \ldots, x_n$.

Mówimy, że funkcję $f(x_1, \ldots, x_n, y)$ otrzymujemy z funkcji $g(x_1, \ldots, x_n)$ oraz $h(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ za pomocą *operatora rekursji prostej*, gdy może ona być określona następującym *schematem rekursji prostej*:

1. $f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n)$,
2. $f(x_1, \ldots, x_n, y + 1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y))$.

Dla $n = 0$ schemat rekursji prostej przyjmuje następującą postać:

1. $f(0) = a$,
2. $f(y + 1) = g(y, f(y))$,

gdzie a jest jednoargumentową funkcją stałą o wartości a.

Funkcję $f(x_1, \ldots, x_n)$ otrzymujemy z funkcji $g(x_1, \ldots, x_n, y)$ za pomocą operacji *minimum* (za pomocą *μ-operatora*), co zaznaczamy następująco:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y\ [g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0],$$

gdy spełniony jest warunek: $f(x_1, \ldots, x_n)$ jest określona i równa y wtedy i tylko wtedy, gdy $g(x_1, \ldots, x_n, 0), \ldots, g(x_1, \ldots, x_n, y - 1)$ są wszystkie określone i różne od 0, zaś $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$.

1. Funkcja $f(x_1, \ldots, x_n)$ jest *pierwotnie rekurencyjna*, jeśli może być otrzymana z funkcji prostych za pomocą skończonej liczby zastosowań operacji złożenia oraz rekursji prostej.

2. Funkcja $f(x_1, \ldots, x_n)$ jest *częściowo rekurencyjna*, jeśli może być otrzymana z funkcji prostych za pomocą skończonej liczby zastosowań operacji złożenia, rekursji prostej oraz operacji minimum.

3. Funkcja $f(x_1, \ldots, x_n)$ jest *ogólnie rekurencyjna* (krótko: *rekurencyjna*), gdy jest ona całkowitą funkcją częściowo rekurencyjną.

Każda funkcja pierwotnie rekurencyjna jest też ogólnie rekurencyjna (lecz nie na odwrót).

Jeżeli funkcja $g(x_1, \ldots, x_n)$ jest pierwotnie rekurencyjna oraz

$(*)$ dla wszystkich $x_1, \ldots, x_n$ istnieje y taka, że $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$,

to mówimy, że funkcja $f(x_1, \ldots, x_n)$ określona warunkiem:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y\ [g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0]$$

(czyli $f(x_1, \ldots, x_n) =$ najmniejsza y taka, że $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$) jest zdefiniowana przez *minimum efektywne*. Warunek $(*)$ nazywamy *warunkiem efektywności*.

Funkcje określone za pomocą minimum efektywnego stosowanego do funkcji całkowitych są całkowite.

Funkcję $f(x_1, \ldots, x_n)$ otrzymujemy z funkcji

$$g(x_1, \ldots, x_n, y) \text{ oraz } h(x_1, \ldots, x_n)$$

za pomocą *ograniczonego μ-operatora*, jeśli dla wszystkich $x_1, \ldots, x_n$:

$$\mu y[g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0]$$

jest określona i nie większa od $h(x_1, \ldots, x_n)$ oraz

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y\ [g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0].$$

W szczególności, jeśli $h(x_1, \ldots, x_n) = a$ jest funkcją stałą, to piszemy:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y \leqslant a\ [g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0].$$

Niech P będzie n-argumentową relacją na zbiorze ω. Funkcję $\chi_P(x_1, \ldots, x_n)$ nazywamy *funkcją charakterystyczną relacji P*, jeśli funkcja ta spełnia warunek

$$\chi_P(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad P(x_1, \ldots, x_n) \text{ zachodzi,} \\ 1, & \text{gdy} \quad P(x_1, \ldots, x_n) \text{ nie zachodzi.} \end{cases}$$

W szczególności, funkcje charakterystyczne zbiorów to funkcje charakterystyczne relacji jednoargumentowych.

Uwaga. W niektórych podręcznikach przez funkcję charakterystyczną relacji P rozumie się funkcję $1 - \chi_P(x_1, \ldots, x_n)$. To kwestia umowy, przyjmowanej dla wygody obliczeń.

Relacja P jest *rekurencyjna* (*pierwotnie rekurencyjna*), jeśli jej funkcja charakterystyczna jest ogólnie rekurencyjna (pierwotnie rekurencyjna).

Zbiór n-tek M nazywamy *rekurencyjnym* (*pierwotnie rekurencyjnym*), jeśli relacja:

$$P(x_1, \ldots, x_n) \text{ zachodzi} \equiv (x_1, \ldots, x_n) \in M$$

jest rekurencyjna (pierwotnie rekurencyjna).

W szczególności, zbiór $M \subseteq \omega$ jest rekurencyjny, gdy jego funkcja charakterystyczna χ_M jest rekurencyjna.

W myśl innej definicji *zbiór funkcji rekurencyjnych* to najmniejszy zbiór funkcji:

1. zawierający funkcje rzutu I_m^n, dodawania $+$, mnożenia $\cdot$ i funkcję charakterystyczną $\chi_<$ relacji mniejszości $<$,

2. domknięty na operacje złożenia funkcji oraz definiowanie przez minimum efektywne.

Obie te definicji określają tę samą klasę funkcji, ponieważ:

1. można pokazać, że $+$, $\cdot$ i $\chi_<$ są pierwotnie rekurencyjne;

2. można pokazać, że schemat rekursji prostej daje się wyrazić za pomocą minimum efektywnego.

Niniejsza notatka w żadnym sensie nie jest wykładem elementarnej teorii rekursji. Przytaczamy tylko te pojęcia, które potrzebne są dla rozumienia twierdzeń metamatematycznych dotyczących arytmetyki PA. W ramach dygresji, podajmy nieco przykładów, aby słuchacze poczuli się w miarę swojsko, rozpoznając w tych przykładach znane funkcje. Następujące funkcje są pierwotnie rekurencyjne:

1. $f(x) = x + n$;

2. $f(x) = n$;

3. $f(x, y) = x + y$;

4. $f(x, y) = x \cdot y$;

5. $f(x, y) = x^y$ (przyjmujemy $0^0 = 1$);

6. $f(x) = x!$ (przyjmujemy $0! = 1$);

7. $sg(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad x = 0 \\ 1, & \text{gdy} \quad x > 0; \end{cases}$

8. $\overline{sg}(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad x > 0 \\ 1, & \text{gdy} \quad x = 0; \end{cases}$

9. $x \dot{-} 1 = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad x = 0 \\ x - 1, & \text{gdy} \quad x > 0; \end{cases}$

10. $x \dot{-} y = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad x \leqslant y \\ x - y, & \text{gdy} \quad x > y; \end{cases}$

11. $|x - y|$;

12. $\max(x, y)$;

13. $\min(x, y)$;

14. Niech g, α, β będą funkcjami pierwotnie rekurencyjnymi. Wtedy następujące funkcje są pierwotnie rekurencyjne:

    (a) $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \sum\limits_{i=0}^{x_{n+1}} g(x_1, \ldots, x_n, i)$;

    (b) $f(x_1, \ldots, x_n, y, z) = \begin{cases} \sum\limits_{i=y}^{z} g(x_1, \ldots, x_n, i), & \text{gdy} \quad y \leqslant z, \\ 0, & \text{gdy} \quad y > z; \end{cases}$

    (c) $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) =$
    $$= \begin{cases} \sum\limits_{i=\alpha(y_1,\ldots,y_m)}^{\beta(y_1,\ldots,y_m)} g(x_1, \ldots, x_n, i), & \text{gdy } \alpha(y_1, \ldots, y_m) \leqslant \beta(y_1, \ldots, y_m), \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach;} \end{cases}$$

    (d) $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \prod\limits_{i=0}^{x_{n+1}} g(x_1, \ldots, x_n, i)$;

    (e) $f(x_1, \ldots, x_n, y, z) = \begin{cases} \prod\limits_{i=y}^{z} g(x_1, \ldots, x_n, i), & \text{gdy} \quad y \leqslant z \\ 0, & \text{gdy} \quad y > z; \end{cases}$

    (f) $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) =$
    $$= \begin{cases} \prod\limits_{i=\alpha(y_1,\ldots,y_m)}^{\beta(y_1,\ldots,y_m)} g(x_1, \ldots, x_n, i), & \text{gdy } \alpha(y_1, \ldots, y_m) \leqslant \beta(y_1, \ldots, y_m), \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

15. $[\frac{x}{y}]$ — część całkowita z dzielenia x przez y (przyjmujemy, że $[\frac{x}{0}] = x$);

16. rest(x, y) — reszta z dzielenia x przez y (przyjmujemy, że rest$(x, 0) = x$);

17. $\tau(x)$ — liczba dzielników liczby x, gdzie $\tau(0) = 0$;

18. $\sigma(x)$ — suma dzielników liczby x, gdzie $\sigma(0) = 0$;

19. lh(x) — liczba dzielników liczby x, które są liczbami pierwszymi (przyjmujemy lh$(0) = 0$);

20. $\pi(x)$ — liczba liczb pierwszych nie większych niż x;

21. $k(x, y)$ — najmniejsza wspólna wielokrotność liczb x i y, gdzie $k(x, 0) = k(0, y) = 0$;

22. $d(x, y)$ — największy wspólny dzielnik liczb x i y, gdzie $d(0, 0) = 0$;

23. p_x — x-ta liczba pierwsza ($p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, \ldots$);

24. long(x) – numer największego dzielnika liczby x, będącego liczbą pierwszą;

25. ex(x, y) — wykładnik potęgi x-tej liczby pierwszej p_x w kanonicznym rozkładzie liczby y na czynniki pierwsze; przyjmujemy, że ex$(x, 0) = 0$.

Jest nieskończenie wiele funkcji pierwotnie (częściowo, ogólnie) rekurencyjnych. Każda z tych klas zawiera jednak tylko $\aleph_0$ funkcji. Ponieważ *wszystkich* funkcji z ω^n w ω jest *kontinuum*, więc *prawie wszystkie* funkcje są poza klasą funkcji ogólnie rekurencyjnych.

Następujące relacje są pierwotnie rekurencyjne:

1. $x = y$;

2. $x + y = z$;

3. $x \cdot y = z$;

4. x dzieli y;

5. x jest parzyste;

6. x oraz y są względnie pierwsze;

7. $\exists n(x = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$;

8. $\exists n(x = 1 + 2 + \ldots + n)$;

9. Jeżeli relacje $P(x_1, \ldots, x_n)$ oraz $Q(x_1, \ldots, x_n)$ są rekurencyjne (pierwotnie rekurencyjne), to następujące relacje są również rekurencyjne (pierwotnie rekurencyjne):

   (a) $(P(x_1, \ldots, x_n) \wedge Q(x_1, \ldots, x_n))$;

   (b) $(P(x_1, \ldots, x_n) \vee Q(x_1, \ldots, x_n))$;

   (c) $\neg P(x_1, \ldots, x_n)$;

   (d) $(P(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow Q(x_1, \ldots, x_n))$;

   (e) $P(x_1, x_1, x_3, \ldots, x_n)$;

   (f) $P(f(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1})$, jeśli $f(x_1, \ldots, x_m)$ jest rekurencyjna (pierwotnie rekurencyjna).

10. Jeżeli relacja $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ jest rekurencyjna (pierwotnie rekurencyjna), to relacje $\exists y(y \leqslant z \wedge R(x_1, \ldots, x_n, y))$ oraz $\forall y(y \leqslant z \rightarrow R(x_1, \ldots, x_n, y))$ również są rekurencyjne (pierwotnie rekurencyjne).

11. Dowolny skończony zbiór liczb naturalnych jest pierwotnie rekurencyjny.

12. Jeżeli f jest funkcją ogólnie rekurencyjną (pierwotnie rekurencyjną), zaś a jest ustaloną liczbą, to zbiór rozwiązań równania $f(x_1, \ldots, x_n) = a$ jest rekurencyjny (pierwotnie rekurencyjny).

13. Niech f będzie funkcją częściowo, ale nie ogólnie rekurencyjną. Wtedy dziedzina funkcji f^{-1} jest zbiorem pierwotnie rekurencyjnym.

14. Jeżeli zbiory A oraz B są rekurencyjne (pierwotnie rekurencyjne), to również zbiory $A \cap B$, $A \cup B$, $\omega - A$ są rekurencyjne (pierwotnie rekurencyjne).

Niech $\boldsymbol{G}$ będzie pewną rodziną n-argumentowych funkcji częściowych. Funkcję $n + 1$-argumentową F nazwiemy *funkcją uniwersalną* dla $\boldsymbol{G}$, jeśli

$$\boldsymbol{G} = \{F(0, x_1, \ldots, x_n), F(1, x_1, \ldots, x_n), F(2, x_1, \ldots, x_n), \ldots\}.$$

Dla każdej liczby naturalnej n istnieją funkcje uniwersalne dla klas wszystkich n-argumentowych funkcji:

1. pierwotnie rekurencyjnych;

2. ogólnie rekurencyjnych.

Można udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje *ogólnie rekurencyjna* funkcja uniwersalna dla klasy wszystkich n-argumentowych funkcji pierwotnie rekurencyjnych. W dowodzie tego twierdzenia wykorzystuje się możliwość kodowania liczb naturalnych. W szczególności, wykazuje się, że zakodować można: definiowanie przez schemat rekursji prostej, definiowanie przez złożenie oraz definiowanie przez operację minimum efektywnego. Zachodzą następujące fakty:

1. Nie istnieje funkcja pierwotnie rekurencyjna uniwersalna dla rodziny wszystkich n-argumentowych funkcji pierwotnie rekurencyjnych.

2. Nie istnieje funkcja częściowo rekurencyjna uniwersalna dla rodziny wszystkich n-argumentowych funkcji ogólnie rekurencyjnych.

Tak więc, choć można skonstruować funkcje uniwersalne dla rodziny wszystkich n-argumentowych funkcji:

1. pierwotnie rekurencyjnych;

2. ogólnie rekurencyjnych,

to z powyższych twierdzeń otrzymujemy przykłady $(n+1)$-argumentowych funkcji, które *nie* są:

- pierwotnie rekurencyjne;
- ogólnie rekurencyjne.

Inna metoda pokazywania, iż jakaś funkcja *nie* należy do określonej klasy funkcji to dowód, że funkcja ta „rośnie szybciej" niż każda z funkcji tej klasy. W ten sposób pokazuje się np., że *funkcja Ackermanna* nie jest funkcją pierwotnie rekurencyjną.

Zbiór n-tek M nazywamy *rekurencyjnie przeliczalnym* (*zbiorem r.e.*), jeśli istnieje $(n+1)$-argumentowa relacja pierwotnie rekurencyjna

$$R_M(x_1, \ldots, x_n, y)$$

spełniająca dla każdych $x_1, \ldots, x_n$ warunek:

$$(x_1, \ldots, x_n) \in M \equiv \exists y R_M(x_1, \ldots, x_n, y).$$

Zbiory i relacje rekurencyjnie przeliczalne stanowią matematyczne odpowiedniki pojęć *pozytywnie obliczalnych*. Mówimy, że relacja $R \subseteq \omega^n$ jest *pozytywnie obliczalna* wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego układu liczb naturalnych $a_1, \ldots, a_n$,

jeżeli zachodzi $R(a_1, \ldots, a_n)$, to otrzymamy w skończonej liczbie z góry określonych kroków odpowiedź na pytanie: „Czy zachodzi $R(a_1, \ldots, a_n)$?". Jeżeli natomiast *nie* zachodzi $R(a_1, \ldots, a_n)$, to możemy nie uzyskać żadnej odpowiedzi na to pytanie.
Przykład. Klasyczny Rachunek Predykatów (FOL) jest nierozstrzygalny. Nie istnieje efektywna metoda rozstrzygania, czy jakaś formuła języka tego rachunku jest jego tautologią. Klasyczny Rachunek Predykatów jest jednak *półrozstrzygalny*: własność bycia tautologią tego rachunku jest pozytywnie obliczalna. Np. metoda *tablic analitycznych* pozwala, gdy jakaś formuła jest tautologią tego rachunku, dowieść tego w sposób efektywny.

Dla dowolnego zbioru n-tek M zdefiniujemy *częściową funkcję charakterystyczną* $\chi^*_M(x_1, \ldots, x_n)$ w sposób następujący:

$$\chi^*_M(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad (x_1, \ldots, x_n) \in M, \\ \text{nie określona}, & \text{gdy} \quad (x_1, \ldots, x_n) \notin M. \end{cases}$$

Jeżeli f jest n-argumentową funkcją częściową, to zbiór

$$\Gamma_f = \{(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) : (x_1, \ldots, x_n) \in dom(f)\}$$

nazywamy *wykresem* funkcji f.

Wyliczmy niektóre fakty dotyczące zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych:

1. Jeżeli relacja $R(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ jest pierwotnie rekurencyjna, to $M = \{(x_1, \ldots, x_n) : \exists y \exists z R(x_1, \ldots, x_n, y, z)\}$ jest zbiorem rekurencyjnie przeliczalnym.

2. Jeżeli zbiory A i B są rekurencyjnie przeliczalne, to zbiory $A \cap B$ i $A \cup B$ też są rekurencyjnie przeliczalne.

3. Każdy zbiór pierwotnie rekurencyjny jest rekurencyjnie przeliczalny.

4. Niech zbiory A i B różnią się skończoną liczbą elementów. Wtedy:

   (a) jeśli A jest rekurencyjny, to B jest rekurencyjny;

   (b) jeśli A jest rekurencyjnie przeliczalny, to B jest rekurencyjnie przeliczalny.

5. *Twierdzenie Posta*. Jeżeli zbiór A oraz jego dopełnienie $\omega - A$ są rekurencyjnie przeliczalne, to A jest rekurencyjny.

6. Niech $M \subseteq \omega^n$. Przyjmijmy:

$$c^n(M) = \{c^n(x_1, \ldots, x_n) : (x_1, \ldots, x_n) \in M\},$$

gdzie c^n jest funkcją Cantora kodującą ciągi, zdefiniowaną w następnym punkcie. Wtedy:

(a) M jest pierwotnie rekurencyjny wtedy i tylko wtedy, gdy $c^n(M)$ jest pierwotnie rekurencyjny;

(b) M jest rekurencyjny wtedy i tylko wtedy, gdy $c^n(M)$ jest rekurencyjny;

(c) M jest rekurencyjnie przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy $c^n(M)$ jest rekurencyjnie przeliczalny.

7. Niech $M \subseteq \omega$ będzie zbiorem niepustym. M jest rekurencyjnie przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja pierwotnie rekurencyjna $f(x)$ taka, że $M = \{f(x) : x \in \omega\}$.

8. Niech M będzie niepustym zbiorem n-tek. Wtedy zbiór M jest rekurencyjnie przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją jednoargumentowe funkcje pierwotnie rekurencyjne $f_1, \ldots, f_n$ takie, że:

$$M = \{(f_1(x), \ldots, f_n(x)) : x \in \omega\}.$$

9. Niech funkcja ogólnie rekurencyjna $f(x)$ spełnia warunek: $f(x) \geqslant x$ dla wszystkich $x \in \omega$. Wtedy zbiór wartości $rng(f)$ funkcji f jest rekurencyjny.

10. Zbiór nieskończony A jest rekurencyjny wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zbiorem wartości ściśle rosnącej funkcji ogólnie rekurencyjnej.

11. Niepusty zbiór A jest rekurencyjny wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zbiorem wartości rosnącej (niekoniecznie ściśle) funkcji ogólnie rekurencyjnej.

12. Każdy nieskończony zbiór rekurencyjnie przeliczalny zawiera nieskończony zbiór rekurencyjny.

13. Każdy nieskończony zbiór rekurencyjnie przeliczalny daje się przedstawić w postaci $A = rng(f)$, dla pewnej wzajemnie jednoznacznej funkcji ogólnie rekurencyjnej f.

14. Wykres funkcji ogólnie rekurencyjnej jest zbiorem rekurencyjnym.

15. Jeśli wykres Γ_f funkcji f jest rekurencyjnie przeliczalny, to funkcja f jest częściowo rekurencyjna.

16. Przeciwobraz zbioru rekurencyjnego względem funkcji ogólnie rekurencyjnej jest rekurencyjny.

17. Niech A będzie zbiorem rekurencyjnym, f funkcją ogólnie rekurencyjną i przy tym niech $rng(f) = \omega$, $f(A) \cap f(\omega - A) = \emptyset$. Wtedy $f(A)$ jest rekurencyjny.

18. Niech A, B będą zbiorami rekurencyjnie przeliczalnymi, zaś C zbiorem rekurencyjnym takim, że $A \cap B = \emptyset$, $A \subseteq C \subseteq A \cup B$. Wtedy A jest rekurencyjny.

19. Niech A, B będą zbiorami rekurencyjnie przeliczalnymi. Wtedy istnieją zbiory rekurencyjnie przeliczalne $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$ takie, że $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, $A_1 \cup B_1 = A \cup B$.

20. Można udowodnić, że:

    (a) funkcja otrzymana za pomocą złożenia z funkcji o wykresie rekurencyjnie przeliczalnym ma wykres rekurencyjnie przeliczalny;

    (b) funkcja utworzona za pomocą schematu rekursji prostej z funkcji o wykresie rekurencyjnie przeliczalnym ma wykres rekurencyjnie przeliczalny;

    (c) funkcja utworzona z pomocą μ-operatora z funkcji o wykresie rekurencyjnie przeliczalnym ma wykres rekurencyjnie przeliczalny;

    (d) wykres dowolnej funkcji częściowo rekurencyjnej jest rekurencyjnie przeliczalny.

21. Funkcja jest częściowo rekurencyjna wtedy i tylko wtedy, gdy jej wykres jest rekurencyjnie przeliczalny.

22. Dziedzina funkcji częściowo rekurencyjnej jest zbiorem rekurencyjnie przeliczalnym.

23. Zbiór wartości funkcji częściowo rekurencyjnej jest zbiorem rekurencyjnie przeliczalnym.

24. Każdy zbiór rekurencyjny jest rekurencyjnie przeliczalny.

25. Zbiór n-tek jest rekurencyjnie przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy jego funkcja charakterystyczna jest częściowo rekurencyjna.

26. Można udowodnić, że:

    (a) obraz zbioru rekurencyjnie przeliczalnego względem funkcji częściowo rekurencyjnej jest rekurencyjnie przeliczalny;

(b) przeciwobraz zbioru rekurencyjnie przeliczalnego względem funkcji częściowo rekurencyjnej jest rekurencyjnie przeliczalny.

27. Zbiór A rozwiązań równania

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a$$

jest rekurencyjnie przeliczalny, jeśli f jest częściowo rekurencyjną funkcją n-argumentową.

28. Jeśli f jest funkcją częściowo rekurencyjną, to zbiór $M = \{(x_1, \ldots, x_n) : \exists y \; f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0\}$ jest rekurencyjnie przeliczalny.

29. Funkcję częściową $f(x_1, \ldots, x_n)$ można przedstawić w postaci $f(x_1, \ldots, x_n) = \mu t[g(x_1, \ldots, x_n, t) = 0]$ dla stosownej funkcji pierwotnie rekurencyjnej $g(x_1, \ldots, x_n, t)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wykres funkcji $f(x_1, \ldots, x_n)$ jest pierwotnie rekurencyjny.

30. Istnieje funkcja częściowo rekurencyjna $f(x)$, która nie daje się przedstawić w postaci $f(x) = \mu y[g(x, y) = 0]$ dla żadnej ogólnie rekurencyjnej funkcji g.

31. Jeśli $V(n, x)$ jest częściowo rekurencyjną funkcją uniwersalną dla klasy wszystkich jednoargumentowych funkcji częściowo rekurencyjnych, to zbiór $M = \{x : V(x, x) = 0\}$ jest rekurencyjnie przeliczalny, ale nie jest rekurencyjny.

32. Jeśli $V(n, x)$ jest częściowo rekurencyjną funkcją uniwersalną dla klasy wszystkich jednoargumentowych funkcji pierwotnie rekurencyjnych, to zbiór

$$\boldsymbol{G} = \{n : V(n, x) \text{ jest ogólnie rekurencyjna}\}$$

nie jest rekurencyjnie przeliczalny.

Żywimy cichą nadzieję, że wyliczenie tych faktów pozwoliło słuchaczom na wyrobienie sobie pewnych intuicji związanych z pojęciem rekurencyjnej przeliczalności. Aby uzyskać biegłość w operowaniu pojęciami elementarnej teorii rekursji trzeba oczywiście pilnie przestudiować stosowne podręczniki, samodzielnie rozwiązać wiele zadań, itd.

2.2 Dygresja: funkcja Ackermanna

Mówimy, że funkcja $f(x)$ *majoryzuje* funkcję $g(x_1, \ldots, x_n)$, gdy istnieje liczba a taka, że dla wszystkich $x_1, \ldots, x_n$:

$g(x_1, \ldots, x_n) \leqslant f(\max(x_1, \ldots, x_n, a))$.

W szczególności, jeśli f jest ściśle rosnąca, to $f(x)$ majoryzuje $g(x_1, \ldots, x_n)$ dokładnie wtedy, gdy $g(x_1, \ldots, x_n) \leqslant f(\max(x_1, \ldots, x_n))$ dla wszystkich, oprócz skończonej liczby, ciągów $(x_1, \ldots, x_n)$.

Podamy przykład funkcji, która majoryzuje wszystkie funkcje pierwotnie rekurencyjne: *funkcji Ackermanna*. Dowodzi się, że:

1. Funkcja Ackermanna nie jest pierwotnie rekurencyjna (właśnie dlatego, że majoryzuje wszystkie funkcje pierwotnie rekurencyjne).

2. Funkcja Ackermanna jest rekurencyjna.

Dla dowolnych $m > 0$ oraz $n > 0$ niech:

1. $Ack(0, n) = n + 1$

2. $Ack(m, 0) = Ack(m - 1, 1)$

3. $Ack(m, n) = Ack(m - 1, Ack(m, n - 1))$.

Wprowadźmy też oznaczenia:

1. $A_m(n) = A(m, n)$

2. $A(n) = A_n(n)$ (czyli $A(n) = Ack(n, n)$).

Funkcję $A(n)$ nazywamy *funkcją Ackermanna*.

Pisząc dalej a^{b^c} mamy na myśli funkcję $a^{(b^c)}$ (a nie funkcję $(a^b)^c$ — sprawdź, że to różne funkcje!). Podobnie, $a^{b^{c^d}}$ to $a^{(b^{(c^d)})}$, itd.

Zdefiniujemy teraz funkcję ${}^b a$ przez warunki:

1. ${}^0 a = 1$

2. ${}^{(b+1)} a = a^{({}^b a)}$.

Wtedy:

1. ${}^1 a = a^{({}^0 a)} = a^1 = a$

2. ${}^2 a = a^{({}^1 a)} = a^a$

3. ${}^3a = a^{({}^2a)} = a^{a^a}$

4. ${}^na = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$ (a występuje n razy).

Zauważmy, że:

1. $a \cdot b = a + a + \ldots + a$ (a występuje b razy)

2. $a^b = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (a występuje b razy)

3. ${}^ba = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$ (a występuje b razy).

W literaturze wprowadza się oznaczenia:

1. $a \uparrow b = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (a występuje b razy)

2. $a \uparrow\uparrow b = a \uparrow a \uparrow \ldots \uparrow a$ (a występuje b razy)

3. a zatem $a \uparrow\uparrow b = {}^ba = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$ (a występuje b razy)

4. $a \uparrow\uparrow\uparrow b = a \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow (\ldots (a \uparrow\uparrow a) \ldots))$ (a występuje b razy)

5. $a \uparrow^m b = a \uparrow^{m-1} (a \uparrow^{m-1} \ldots (a \uparrow^{m-1} a) \ldots)$ (a występuje b razy).

Formalnie ciąg funkcji $\uparrow^n$ określamy w następujący sposób:

1. $a \uparrow^n b = a^b$, gdy $n = 1$,

2. $a \uparrow^n b = 1$, gdy $b = 0$,

3. $a \uparrow^n b = a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^n (b-1))$, gdy $n > 1$.

Łatwo można pokazać, że np.:

1. $1 \uparrow^n b = 1$

2. $a \uparrow^n 1 = a$

3. $2 \uparrow^n 2 = 4$.

Uwaga. Możesz pisać $\uparrow^n (a, b)$ zamiast $a \uparrow^n b$, wtedy bodaj łatwiej dokonywać rachunków.

Nietrudno też wykazać rachunkiem, że np.:

1. $2 \uparrow^2 3 = 2 \uparrow (2 \uparrow 2) = 2 \uparrow 2^2 = 2 \uparrow 4 = 2^4 = 16$
2. $2 \uparrow^3 3 = 2 \uparrow^2 (2 \uparrow^2 2) = 2 \uparrow^2 4 = 2 \uparrow (2 \uparrow (2 \uparrow 2)) =$
   $= 2 \uparrow (2 \uparrow 4) = 2 \uparrow (2^4) = 2 \uparrow 16 = 2^{16} = 65536$
3. $3 \uparrow^2 2 = 3 \uparrow (3 \uparrow^2 1) = 3 \uparrow (3 \uparrow (3 \uparrow^2 0)) = 3 \uparrow (3 \uparrow 1) = 3 \uparrow 3 =$
   $= 3^3 = 27$
4. $3 \uparrow^3 2 = 3 \uparrow^2 (3 \uparrow^3 1) = 3 \uparrow^2 (3 \uparrow^2 (3 \uparrow^3 0)) = 3 \uparrow^2 (3 \uparrow^2 1) =$
   $= 3 \uparrow^2 (3 \uparrow (3 \uparrow^2 0)) = 3 \uparrow^2 (3 \uparrow 1) = 3 \uparrow^2 3 = 3 \uparrow (3 \uparrow^2 2) =$
   $= 3 \uparrow 27 = 3^{27} = 7625597484987.$

Mamy też np.: $3 \uparrow^3 3 = 3 \uparrow^2 (3 \uparrow^3 2) = 3 \uparrow^2 (3^{27}) = 3 \uparrow^2 7625597484987 =$ $3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}$ (liczba 3 występuje tu 7625597484987 razy).

Słuchacze zechcą, dla relaksu, uzasadnić, że:

1. $2 \uparrow^3 4 = 2 \uparrow (2 \uparrow \ldots (2 \uparrow 2) \ldots)$ (gdzie 2 występuje 65536 razy)
2. $3 \uparrow^2 4 = 3^{3^{27}} = 3^{7625597484987}$
3. $3 \uparrow^3 3 = 3 \uparrow (3 \uparrow \ldots (3 \uparrow 3) \ldots)$ (gdzie 3 występuje 3^{27} razy)
4. $3 \uparrow^3 4 = 3 \uparrow (3 \uparrow \ldots (3 \uparrow 3) \ldots)$ (gdzie 3 występuje $3 \uparrow^2 3^{27}$ razy).

Dla wszystkich n:

1. $A_0(n) = n + 1$
2. $A_1(n) = n + 2 = 2 + (n + 3) - 3$
3. $A_2(n) = 2n + 3 = 2 \cdot (n + 3) - 3$
4. $A_3(n) = 2^{n+3} - 3 = 2 \uparrow (n + 3) - 3$
5. $A_4(n) = 2 \uparrow^2 (n + 3) - 3$
6. $A_5(n) = 2 \uparrow^3 (n + 3) - 3$
7. $A_m(n) = 2 \uparrow^{m-2} (n + 3) - 3$, dla $m > 2$.

Ponadto dla wszystkich $n \geqslant 1$: $A_4(n) = 2^{A_4(n-1)+3} - 3$.
Dla wszystkich $m > 0$ wartość $A_m(n)$ jest równa kolejno:

1. $A_m(n) = A_{m-1}(A_m(n-1)) =$
2. $= A_{m-1}(A_{m-1}(A_m(n-2))) =$
3. $= A_{m-1}(A_{m-1}(A_{m-1}(A_m(n-3)))) =$
4. $\ldots$
5. $= A_{m-1}(A_{m-1}(\ldots A_{m-1}(A_m(0))\ldots)) =$
6. $= A_{m-1}(A_{m-1}(\ldots A_{m-1}(A_{m-1}(1))\ldots))$ (tu mamy $n+1$ iteracji funkcji A_{m-1}).

Mamy ponadto: $A_1(1) = 2$, $A_2(1) = 3$, $A_3(1) = 13$, $A_4(1) = 65533$.
Inny wariant notacyjny otrzymujemy określając ciąg funkcji B_m:

1. $B_0(n) = n + 1$
2. $B_{m+1}(0) = B_m(1)$
3. $B_{m+1}(n+1) = B_m(B_{m+1}(n))$.

Wtedy:

1. $B_1(n) = 2 + (n+3) - 3$
2. $B_2(n) = 2 \cdot (n+3) - 3$
3. $B_3(n) = 2 \uparrow (n+3) - 3$
4. $B_4(n) = 2 \uparrow^2 (n+3) - 3$
5. $B_m(n) = 2 \uparrow^{m-2} (n+3) - 3$.

Zauważmy jeszcze, że jeśli określimy funkcję *trójargumentową* $Ac(k, m, n)$ następująco:

1. $Ac(1, m, n) = m + n$
2. $Ac(k+1, m, 1) = m$
3. $Ac(k+1, m, n+1) = Ac(k, m, Ac(k+1, m, n))$,

to zachodzą następujące równości:

1. $Ac(0, m, n) = m + n$

2. $Ac(1, m, n) = m \cdot n$

3. $Ac(2, m, n) = m^n = m \uparrow n$

4. $Ac(3, m, n) = {}^n m = m \uparrow^2 n = m^{m^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{m}}}}}$ (m występuje tu n razy)

5. $Ac(4, m, n) = m \uparrow^3 n$.

Funkcja $Ack(m, n)$ „rośnie bardzo szybko." Wartość $Ack(4, 2)$ ma w zapisie dziesiętnym 19729 cyfr. Dla dowolnej n wartość $A(4, n)$ możemy zapisać też następująco:

1. $Ack(4, n) = {}^{(n+3)}2 - 3$

2. $Ack(4, n) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} - 3$ (liczba 2 występuje tu $n + 3$ razy).

Widzimy też, że przy rozważaniu tego typu funkcji warto rozważać inne jeszcze (oprócz dodawania, mnożenia i „zwykłego" potęgowania) operacje arytmetyczne na liczbach.

Wartości $n \uparrow^n n$ nazywa się *liczbami Ackermana*. Mamy zatem:

1. $1 \uparrow 1 = 1$

2. $2 \uparrow^2 2 = {}^2 2 = 4$

3. $3 \uparrow^3 3 = {}^{^{3}3}3$ (tutaj ${}^{^{3}3}3$ rozumiemy jako ${}^{({}^{3}3)}3$). Ta liczba równa jest 3^{27}, czyli $3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}$ (tu 3 występuje 7625597484987 razy).

Opis arytmetyczny czwartej liczby Ackermanna $4 \uparrow^4 4$ jest dość złożony: $4 \uparrow^4 4 = 4 \uparrow^3 (4 \uparrow^3 (4 \uparrow^3 4)) = 4 \uparrow^2 (4 \uparrow^2 \ldots (4 \uparrow^2) \ldots)$, gdzie liczba 4 występuje a razy, gdzie $a = 4 \uparrow^2 (4 \uparrow^2 \ldots (4 \uparrow^2) \ldots)$, gdzie w a liczba 4 występuje $4 \uparrow^2 (4 \uparrow^2 (4 \uparrow^2 (4 \uparrow^2 4)))$ razy.

2.3 Funkcje kodujące

Można na różne sposoby kodować ciągi liczb naturalnych. Podajmy przykłady takich kodowań.

2.3.1 Funkcja numerująca Cantora

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & (0,0) & & & & \\
 & & & (1,0) & & (0,1) & & & \\
 & & (2,0) & & (1,1) & & (0,2) & & \\
 & (3,0) & & (2,1) & & (1,2) & & (0,3) & \\
(4,0) & & (3,1) & & (2,2) & & (1,3) & & (0,4) \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

Ustawimy te wszystkie pary w *jeden* ciąg nieskończony, wedle porządku pięter tej nieskończonej piramidy (z góry w dół), a w ramach każdego pietra z lewej do prawej.

Funkcja numerująca Cantora

$$c(x,y) = \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2}$$

ustanawia wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między $\omega \times \omega$ a ω (koduje pary liczb naturalnych wedle wspomnianego wyżej porządku). Funkcja c jest pierwotnie rekurencyjna. Takie są też funkcje:

$l(x) = \mu z \leqslant x\ (\exists t \leqslant x\ c(z,t) = x)$

$r(x) = \mu z \leqslant x\ (\exists t \leqslant x\ c(t,z) = x)$.

Nadto, $l(c(x,y)) = x$ oraz $r(c(x,y)) = y$, a także $c(l(z), r(z)) = z$. Funkcje l oraz r również są wzajemnie jednoznaczne.

Analogicznie kodujemy trójki liczb naturalnych: $c^3(x,y,z) = c(x, c(y,z))$ oraz dowolne n-tki takich liczb:

1. $c^1(x) = x$
2. $c^2(x_1, x_2) = c(x_1, x_2)$
3. $c^{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = c^n(x_1, x_2, \ldots, c(x_n, x_{n+1}))$.

Niektóre własności tego kodowania są następujące:

1. $c^1_1(x) = x$,
2. $c^2_1(x) = l(x)$,
3. $c^2_2(x) = r(x)$,

4. $c_1^{n+1} = c_n^1,\ \ c_2^{n+1} = c_2^n,\ \ldots,\ c_{n-1}^{n+1} = c_{n-1}^n$

5. $c_n^{n+1} = c_1^2 \circ c_n^n,\ \ c_{n+1}^{n+1} = c_2^2 \circ c_n^n$, gdzie $\circ$ jest operacją złożenia funkcji.

6. Funkcje c^n oraz c_m^n są pierwotnie rekurencyjne.

7. Funkcje $c^n(x_1, \ldots, x_n)$ ustanawiają wzajemnie jednoznaczne odpowiedniości między ω^n oraz ω (kodują ciągi liczb naturalnych długości n).

8. Z jednoargumentowych funkcji częściowo rekurencyjnych oraz z funkcji $c^n(x_1, \ldots, x_n)$ otrzymać można wszystkie funkcje częściowo rekurencyjne.

9. Istnieje wzajemnie jednoznaczna funkcja pierwotnie rekurencyjna ze zbioru *wszystkich ciągów skończonych* liczb naturalnych w zbiór ω.

Jedną z zalet kodowania z użyciem funkcji Cantora jest to, że jej zbiór wartości jest równy całemu zbiorowi ω.

2.3.2 Funkcja β Gödla

Lemat (funkcja β Gödla). Istnieje 2-argumentowa funkcja rekurencyjna β taka, że:

1. dla dowolnych a oraz i: $\beta(a, i) \leqslant a \dot{-} 1$

2. dla dowolnych $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ istnieje a taka, że $\beta(a, i) = a_i$, dla $i < n$.

Funkcji β używać możemy dla kodowania ciągów liczb naturalnych:

1. Dla dowolnego ciągu liczb naturalnych $a_1, \ldots, a_n$ niech:
   $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle^\beta = \mu x\ (\beta(x, 0) = n \wedge \beta(x, 1) = a_1 \wedge \beta(x, n) = a_n)$.

2. $lh^\beta(a) = \beta(a, 0)$.

3. $(a)_i^\beta = \beta(a, i)$.

4. $seq^\beta(a)\ \equiv\ \forall x < a\ (lh^\beta(x) \neq lh^\beta(a) \vee \exists i < lh^\beta(a)\ (x)_i^\beta \neq (a)_i^\beta)$.

5. Dla każdej n, funkcja $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto \langle a_1, \ldots, a_n \rangle^\beta$ jest rekurencyjna. Funkcje lh^β i $(\ )_i^\beta$ są rekurencyjne. seq^β jest relacją rekurencyjną.

Następujące funkcje są rekurencyjne (co widać z definicji):

1. $In^\beta(a, i) = \mu x\ (lh^\beta(x) = i \wedge \forall j < i\ (x)_j^\beta = (a)_j^\beta)$.

2. $a *^{\beta} b = \mu x \; (lh^{\beta}(x) = lh^{\beta}(a) + lh^{\beta}(b) \wedge \forall i < lh^{\beta}(a) \; (x)^{\beta}_{i} = (a)^{\beta}_{i} \wedge$
$$\wedge \forall i < lh^{\beta}(b) \; (x)^{\beta}_{lh^{\beta}(a)+i} = (b)^{\beta}_{i}).$$

W dalszym ciągu będziemy pomijać indeks górny β przy wprowadzonych wyżej symbolach.

Bardzo użyteczne są następujące pojęcia związane z kodowaniem ciągów:

1. Dla dowolnej funkcji $f : \omega^n \to \omega$ jej *ściągnięciem* nazywamy funkcję:
   $\lceil f \rceil(a) = f((a)_0, \ldots, (a)_{n-1})$
2. Dla dowolnej relacji $R \subseteq \omega^n$ jej *ściągnięciem* nazywamy relację:
   $\lceil R \rceil(a) \;\equiv\; R((a)_0, \ldots, (a)_{n-1})$.
3. Dla dowolnej funkcji $f : \omega^n \to \omega$ jej *funkcją-pamięcią* nazywamy funkcję:
   $\widehat{f}(a_1, \ldots, a_{n-1}, b) =$
   $$= \langle f(a_1, \ldots, a_{n-1}, 0), f(a_1, \ldots, a_{n-1}, 1), \ldots, f(a_1, \ldots, a_{n-1}, b-1) \rangle.$$
4. $f(a_1, \ldots, a_n) = \lceil f \rceil(\langle a_1, \ldots, a_n \rangle)$.
5. $R(a_1, \ldots, a_n) \;\equiv\; \lceil R \rceil(\langle a_1, \ldots, a_n \rangle)$.

Funkcja-pamięć może też zostać określona przy użyciu innych (pierwotnie rekurencyjnych) funkcji kodujących. Funkcja f jest rekurencyjna dokładnie wtedy, gdy rekurencyjna jest jej funkcja-pamięć $\widehat{f}$. Funkcja-pamięć pozwala zastąpić pewne definicje przez schematy rekursji definicjami używającymi tylko funkcji pierwotnie rekurencyjnych oraz efektywnego operatora minimum. Jeśli g oraz h są funkcjami rekurencyjnymi, to funkcja f określona następującym schematem rekursji:

1. $f(a_1, \ldots, a_n, b) = g(a_1, \ldots, a_n,)$, gdy $b = 0$,
2. $f(a_1, \ldots, a_n, b) = h(\widehat{f}(a_1, \ldots, a_n, b), a_1, \ldots, a_n, b)$, gdy $b > 0$

także jest rekurencyjna. Wyrażenie schematów rekursji przez funkcję-pamięć pozwala lepiej zrozumieć działanie tych schematów. Własności operacji ściągnięcia ukazują natomiast, że funkcje (i relacje) wieloargumentowe (na liczbach naturalnych) możemy zastąpić przez równe im funkcje (i relacje) jednoargumentowe.

2.4 Arytmetyka PA: składnia

Słuchacze znają arytmetykę szkolną. Są przecież *doktorantami*, a to zakłada, że ukończyli: szkołę podstawową, gimnazjum, liceum oraz studia magisterskie. Przypomnijmy teraz, jak – w postaci aksjomatycznej – wygląda arytmetyka liczb naturalnych.

Alfabet symboli obejmuje:

1. stałe logiczne: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$, $\forall$, $\exists$,
2. zmienne indywidualne: $x_1, x_2, \ldots$,
3. predykat (2-arg.) identyczności: $\doteq$,
4. stała indywidualna (zero): $\underline{0}$,
5. symbol funkcyjny (1-arg.) następnika: $\underline{s}$,
6. symbole funkcyjne (2-arg.) dodawania $\underline{+}$ oraz mnożenia $\underline{\times}$,
7. symbole pomocnicze: nawiasy (oraz).

Wyrażeniem języka PA jest dowolny skończony ciąg symboli alfabetu języka PA.

Uwaga. Przecinek jest symbolem metajęzykowym.

Zbiór termów jest najmniejszym zbiorem wyrażeń języka PA takim, że:

1. stała $\underline{0}$ jest termem,
2. każda zmienna indywidualna $x_1, x_2, \ldots$ jest termem,
3. jeśli α jest termem, to $\underline{s}(\alpha)$ jest termem,
4. jeśli α i β są termami, to $(\alpha)\underline{+}(\beta)$ oraz $(\alpha)\underline{\times}(\beta)$ są termami.

Ze względów natury psychologicznej piszemy zwykle:

1. $(\alpha)\underline{+}(\beta)$ zamiast $\underline{+}(\alpha, \beta)$
2. $(\alpha)\underline{\times}(\beta)$ zamiast $\underline{\times}(\alpha, \beta)$.

Zbiór formuł jest najmniejszym zbiorem wyrażeń języka PA takim, że:

1. jeśli α, β są termami, to $\alpha \doteq \beta$ jest formułą,

2. jeśli ψ jest formułą, a x_i zmienną indywidualną, to formułami są też $\neg(\psi)$, $\forall x_i\ (\psi)$, $\exists x_i\ (\psi)$,

3. jeśli φ, ψ są formułami, to formułami są także: $(\varphi) \wedge (\psi)$, $(\varphi) \vee (\psi)$, $(\varphi) \rightarrow (\psi)$, $(\varphi) \equiv (\psi)$.

Stosujemy konwencje opuszczania nawiasów, znane z elementarnego kursu logiki. Dla wygody, opuszczamy też czasem indeks przy zmiennych indywidualnych.

Aksjomatami logicznymi są wszystkie podstawienia formuł języka PA za zmienne zdaniowe w następujących formułach języka KRZ:

1)	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	8)	$(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow p \rightarrow (q \wedge r))$
2)	$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$	9)	$p \rightarrow (p \vee q)$
3)	$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	10)	$q \rightarrow (p \vee q)$
4)	$\neg\neg p \rightarrow p$	11)	$(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r))$
5)	$p \rightarrow \neg\neg p$	12)	$(p \equiv q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
6)	$(p \wedge q) \rightarrow p$	13)	$(p \equiv q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
7)	$(p \wedge q) \rightarrow q$	14)	$(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow (p \equiv q))$

Aksjomatami identyczności dla PA są:

1. $x \doteq x$

2. $x \doteq y \rightarrow y \doteq x$

3. $(x \doteq y \wedge y \doteq z) \rightarrow x \doteq z$

4. $x \doteq y \rightarrow \underline{s}(x) \doteq \underline{s}(y)$

5. $x \doteq y \rightarrow x \underline{+} z \doteq y \underline{+} z$

6. $x \doteq y \rightarrow z \underline{+} x \doteq z \underline{+} y$

7. $x \doteq y \rightarrow x \underline{\times} z \doteq y \underline{\times} z$

8. $x \doteq y \rightarrow z \underline{\times} x \doteq z \underline{\times} y$

Aksjomatami specyficznymi PA są:

- (A1) $\underline{s}(x) \doteq \underline{s}(y) \rightarrow x = y$
- (A2) $\neg \underline{0} \doteq \underline{s}(x)$
- (A3) $x \underline{+} \underline{0} \doteq x$
- (A4) $x \underline{+} \underline{s}(y) \doteq \underline{s}(x \underline{+} y)$

- (A5) $x\underline{\times}\underline{0} \doteq \underline{0}$
- (A6) $x\underline{\times}\underline{s}(y) \doteq (x\underline{\times}y)\underline{+}x$
- (A7) $(\varphi(\underline{0}) \wedge \forall x\ (\varphi(x) \to \varphi(\underline{s}(x)))) \to \forall x\ \varphi(x)$

(A7) jest schematem (nieskończenie wielu) aksjomatów, zwanym *aksjomatem indukcji*.

Regułami wnioskowania są:

1. reguła podstawiania: $\frac{\psi}{\psi(x/\alpha)}$, o ile term α jest podstawialny za zmienną x w formule ψ,
2. reguła odrywania: $\frac{\varphi\to\psi\ \varphi}{\psi}$
3. reguła generalizacji: $\frac{\psi}{\forall x\ \psi}$
4. reguła (O∀): $\frac{\varphi\to\forall x\ \psi}{\varphi\to\psi}$
5. reguła (D∀): $\frac{\varphi\to\psi}{\varphi\to\forall x\ \psi}$, o ile x nie jest zmienną wolną w φ
6. reguła (O∃): $\frac{\exists x\ (\varphi)\to\psi}{\varphi\to\psi}$
7. reguła (D∃): $\frac{\exists x\ (\varphi)\to\psi}{\varphi\to\psi}$, o ile x nie jest zmienną wolną w ψ.

2.5 Arytmetyka PA: model standardowy

Spośród wszystkich modeli PA (a jest ich bardzo wiele!) wyróżnia się model standardowy $\mathfrak{N}_0$, w którym:

1. uniwersum stanowią wszystkie liczby naturalne $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
2. interpretacją stałej $\underline{0}$ jest liczba zero,
3. interpretacją predykatu $\doteq$ jest relacja równości $=$,
4. interpretacją symbolu $\underline{+}$ jest operacja dodawania $+$,
5. interpretacją symbolu $\underline{\times}$ jest operacja mnożenia $\cdot$,
6. interpretacją symbolu $\underline{s}$ jest funkcja następnika s: $s(n) = n + 1$.

To właśnie Świat Arytmetyki (liczb naturalnych), który – jak ci się zdaje – dobrze znasz ze szkoły. Twierdzenia metamatematyczne, które za chwilę omówimy ukazują, jak złudne są mniemania, że świat ten jest dobrze poznawalny.

Dodajmy, że schemat indukcji nie może zostać zastąpiony żadnym równoważnym mu skończonym zbiorem aksjomatów. Nie można zastąpić go także żadną równoważną (nawet nieskończoną) liczbą przypadków szczególnych, tj. aksjomatu indukcji dla formuł o dowolnie z góry ograniczonej liczbie kwantyfikatorów.

System w powyższym języku, ale oparty jedynie na aksjomatach (A1)–(A6) (a więc bez aksjomatu indukcji) nazywa się *Arytmetyką Robinsona* i bywa oznaczany Q. System Q jest istotnie słabszy od PA: można w nim dowodzić *konkretnych* prawd arytmetycznych (np. tego, że $2 + 2 = 4$), ale nie wielu praw ogólnych (np. tego, że dodawanie jest przemienne).

Jeśli ψ jest twierdzeniem PA (czyli posiada dowód z aksjomatów PA), to piszemy: $PA \vdash \psi$.

Wygodnie jest wprowadzić pewne zdefiniowane predykaty, np. *mniejszość*:

$$x\underline{\leq}y \ \equiv_{df} \ \exists z \ (\neg z \doteq \underline{0} \wedge z\underline{+} \doteq x).$$

Wtedy interpretacją $\underline{\leq}$ w $\mathfrak{N}_0$ jest relacja mniejszości $<$.
Uwaga. Nie myl predykatu $\underline{\leq}$ (podkreślony symbol $<$) z relacją „mniejsze lub równe”, którą zapisujemy $\leqslant$. Odróżniaj predykat identyczności $\doteq$ od relacji równości $=$, stałą $\underline{0}$ od liczby 0, symbol funkcyjny $\underline{s}$ od funkcji następnika s, itd.

Niektóre proste twierdzenia arytmetyczne są potrzebne w dowodach twierdzeń o reprezentowalności oraz twierdzeń dotyczących arytmetyzacji składni; w niniejszej notatce pomijamy ich sformułowanie.

Dla pełnej (pedantycznej) poprawności trzeba byłoby również np. używać innych oznaczeń na stałe logiczne w języku przedmiotowym, a inne w tej roli w metajęzyku. Podobnie, kształt zmiennych języka przedmiotowego powinien być różny od zmiennych metajęzykowych (przebiegających, w naszym przypadku, liczby naturalne). Nie robimy tego. *Ufamy.* Ufamy, że kontekst użycia symbolu pozwala na uniknięcie nieporozumień w rozumieniu, co w tekście porabia ten symbol, jaki jest jego status, itd.

2.6 Liczebniki

Definicja liczebników:

1. Term $\underline{0}$ jest liczebnikiem.
2. Jeśli term α jest liczebnikiem, to term $\underline{s}(\alpha)$ jest liczebnikiem.
3. Liczebnikami są tylko termy opisane w powyższy sposób.

Oznaczmy: $\overline{n} = \underbrace{\underline{s}(\underline{s}(\ldots\underline{s}}_{n\ razy}(\underline{0})\ldots))$.

$\overline{n}$ jest zatem liczebnikiem nazywającym liczbę n.

Uwaga. Liczebniki są symbolami językowymi, liczby naturalne są elementami uniwersum modelu standardowego.

Dla dowolnej formuły ψ języka PA i dowolnej liczby naturalnej n:

$$PA \vdash (\psi(\underline{0}) \wedge \psi(\overline{1}) \wedge \ldots \wedge \psi(\overline{n-1}) \wedge x \underline{\leq} \overline{n}) \rightarrow \psi(x).$$

Dla dowolnej formuły ψ języka PA i dowolnej liczby naturalnej n, jeżeli:

1. $PA \vdash \neg\psi(\bar{i})$ dla wszystkich $i < n$ oraz
2. $PA \vdash \psi(\overline{n})$

to:

$$PA \vdash (\psi(x) \wedge \forall y\ (y \underline{\leq} x \rightarrow \neg\psi(y))) \equiv x \doteq \overline{n}.$$

2.7 Reprezentowalność w PA

Formuła φ języka PA o n zmiennych wolnych *słabo reprezentuje* w PA relację $R \subseteq \omega^n$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych liczb naturalnych $k_1, \ldots, k_n$ zachodzi równoważność:

$$R(k_1, \ldots, k_n) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy PA} \vdash \varphi(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}).$$

Relację $R \subseteq \omega^n$ nazywamy *słabo reprezentowalną* w PA, jeśli istnieje formuła języka PA, która słabo reprezentuje R.

Uwaga. Formuła φ słabo reprezentuje R w PA wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą implikacje:

1. Jeśli $R(k_1, \ldots, k_n)$, to $\vdash \varphi(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n})$.
2. Jeśli $\vdash \varphi(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n})$, to $R(k_1, \ldots, k_n)$.

Formuła φ języka PA o n zmiennych wolnych *mocno reprezentuje* w PA relację $R \subseteq \omega^n$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych liczb naturalnych $k_1, \ldots, k_n$ zachodzą implikacje:

1. Jeśli $R(k_1, \ldots, k_n)$, to PA $\vdash \varphi(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n})$.
2. Jeśli $\neg R(k_1, \ldots, k_n)$, to PA $\vdash \neg\varphi(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n})$.

Relację $R \subseteq \omega^n$ nazywamy *mocno reprezentowalną* w PA, jeśli istnieje formuła języka PA, która mocno reprezentuje R.

Uwaga. Każda relacja mocno reprezentowalna w PA jest też słabo reprezentowalna w PA, lecz nie na odwrót.

Jeśli PA jest niesprzeczna oraz R jest mocno reprezentowana w PA przez formułę φ, to zachodzą następujące równoważności:

1. $R(k_1, \ldots, k_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy PA $\vdash \varphi(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n})$.
2. $\neg R(k_1, \ldots, k_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy PA $\vdash \neg\varphi(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n})$.

Na mocy powyższego twierdzenia, relacja R jest mocno reprezentowalna w PA wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła φ języka PA taka, że:

1. R jest słabo reprezentowana przez φ,
2. $\neg R$ jest słabo reprezentowana przez $\neg\varphi$.

Formuła φ języka PA o $n+1$ zmiennych wolnych *reprezentuje* w PA funkcję $f : \omega^n \to \omega$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych liczb naturalnych $k_1, \ldots, k_n$:

PA$\vdash \forall y\ (\varphi(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}) \equiv (y \doteq \overline{f(k_1, \ldots, k_n)}))$.

Funkcję $f : \omega^n \to \omega$ nazywamy *reprezentowalną* w PA wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła φ języka PA o $n+1$ zmiennych wolnych taka, że φ reprezentuje f w PA.

Słuchacze nie powinni być zaskoczeni, że zachodzą następujące fakty:

1. Relacja identyczności jest mocno reprezentowana w PA przez formułę $x_1 \doteq x_2$.
2. Funkcja dodawania jest reprezentowana w PA przez formułę $x_1 \underline{+} x_2 \doteq x_3$.
3. Funkcja mnożenia jest reprezentowana w PA przez formułę $x_1 \underline{\times} x_2 \doteq x_3$.
4. Relacja mniejszości jest mocno reprezentowana w PA przez formułę $x_1 \underline{\leq} x_2$.
5. Relacja $R \subseteq \omega^n$ jest mocno reprezentowalna w PA wtedy i tylko wtedy, gdy jej funkcja charakterystyczna jest reprezentowalna w PA.
6. Dowolna relacja $R \subseteq \omega^n$ jest mocno reprezentowalna w PA wtedy i tylko wtedy, gdy jej funkcja charakterystyczna jest reprezentowalna w PA.
7. Dla dowolnej formuły φ języka PA i dowolnej liczby naturalnej n:

   PA $\vdash \varphi(0) \wedge \varphi(\overline{1}) \wedge \ldots \wedge \varphi(\overline{n-1}) \wedge x < \overline{n} \to \varphi(x)$.

8. Dla dowolnej formuły φ języka PA i dowolnej liczby naturalnej n, jeżeli dla każdego $i < n$, PA $\vdash \neg\varphi(\bar{i})$ oraz PA $\vdash \varphi(\overline{n})$, to:

   PA $\vdash (\varphi(x) \wedge \forall y\ (y < x \rightarrow \neg\varphi(y))) \equiv (x \doteq \overline{n})$.

Twierdzenie o reprezentowalności:

1. Każda funkcja rekurencyjna jest reprezentowalna w PA.
2. Każda relacja rekurencyjna jest mocno reprezentowalna w PA.

Dowód twierdzenia o reprezentowalności jest łatwy, ale żmudny. Dowodzi się mianowicie kolejno, że:

1. funkcje proste są reprezentowalne,
2. funkcja powstająca przez złożenie z funkcji reprezentowalnych jest reprezentowalna,
3. funkcja powstająca przez schemat rekursji prostej z funkcji reprezentowalnych jest reprezentowalna,
4. funkcja powstająca przez zastosowanie operacji minimum efektywnego do funkcji reprezentowalnej jest reprezentowalna.

2.8 Arytmetyzacja składni

Możliwość kodowania wyrażeń języka PA przez liczby naturalne pozwala na „mówienie” o arytmetyce w niej samej, i to bez popadania w paradoksy pomieszania języka przedmiotowego i metajęzyka. Dokładniej, owo „mówienie” w PA o PA umożliwione jest dodatkowo przez dwa fakty: to, że pojęciom metalogicznym odpowiadają funkcje i relacje rekurencyjne oraz to, że funkcje i relacje rekurencyjne są reprezentowalne w PA. Są różne możliwości (jednoznacznego i efektywnego) kodowania wyrażeń (skończonych ciągów symboli), np.:

1. użycie rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze;
2. zastosowanie funkcji kodującej Cantora;
3. zastosowanie funkcji kodującej β Gödla (w dalszym ciągu wybieramy tę właśnie możliwość);
4. konkatenację w bazie dziesiętnej, itd.

Każdemu symbolowi X języka PA przyporządkowujemy *numer* $sn(X)$, np. w taki sposób:

X	$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\rightarrow$	$\equiv$	$\exists$
$sn(X)$	3	5	7	9	11	13

X	$\forall$	$\underline{s}$	$\underline{+}$	$\underline{\times}$	$\underline{0}$	$\doteq$
$sn(X)$	15	17	19	21	23	25

Zmiennej x_i przyporządkowujemy liczbę $2i$: $sn(x_i) = 2i$.

Zakładamy, że każdy term i każda formuła języka PA są zapisane w notacji *prefiksowej* (*polskiej*), czyli: funktor przed swoim argumentami. Tak więc, każdy term jest ciągiem o postaci $vv_1 \ldots, v_n$, gdzie v jest symbolem funkcyjnym, a $v_1 \ldots, v_n$ są termami. Każda formuła jest ciągiem o postaci $vv_1 \ldots, v_n$, gdzie: albo v jest funktorem prawdziwościowym, a $v_1 \ldots, v_n$ są formułami lub termami, albo v jest kwantyfikatorem, a $v_1 \ldots, v_n$ są formułami lub termami. Notacja prefiksowa nie wymaga stosowania nawiasów.

1. Każdemu termowi lub formule u o postaci $vv_1 \ldots v_n$ przyporządkowujemy jego/jej *numer gödlowski* $\ulcorner u \urcorner$, zdefiniowany następująco:

   $\ulcorner u \urcorner = \langle sn(v), \ulcorner v_1 \urcorner, \ldots \ulcorner v_n \urcorner \rangle$.

2. Powyższa definicja może też być „rozpisana" w sposób wyraźny, dla każdego rodzaju termu lub formuły.

Dla przykładu, numer gödlowski formuły $\forall x_1\ (x_1 \doteq \underline{0} \rightarrow (x_1 \underline{\times} \underline{s}(x_1)) \doteq \underline{0})$ obliczamy następująco:

1. Przekształcamy formułę do postaci prefiksowej:

   $\forall x_1 \rightarrow \doteq x_1 \underline{0} \doteq \underline{\times} x_1 \underline{s} x_1 \underline{0}$ (i w znany sposób odszukujemy jej podformuły).

2. $\ulcorner \underline{s}(x_1) \urcorner = \langle 17, 2 \rangle$

3. $\ulcorner x_1 \underline{\times} \underline{s}(x_1) \urcorner = \langle 21, 2, \langle 17, 2 \rangle \rangle$

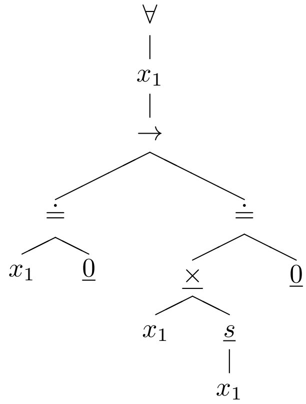
4. $\ulcorner (x_1 \underline{\times} \underline{s}(x_1) \doteq \underline{0}) \urcorner = \langle 25, \langle 21, 2, \langle 17, 2 \rangle \rangle, 23 \rangle$

5. $\ulcorner x_1 \doteq \underline{0} \urcorner = \langle 25, 2, 23 \rangle$

6. $\ulcorner x_1 \doteq \underline{0} \rightarrow (x_1 \underline{\times} \underline{s}(x_1) \urcorner = \langle 9, \langle 25, 2, 23 \rangle, \langle 25, \langle 21, 2, \langle 17, 2 \rangle \rangle, 23 \rangle \rangle$

7. $\ulcorner \forall x_1\ (x_1 \doteq \underline{0} \rightarrow (x_1 \underline{\times} \underline{s}(x_1)) \doteq \underline{0}) \urcorner = \langle 15, 2, \langle 9, \langle 25, 2, 23 \rangle, \langle 25, \langle 21, 2, \langle 17, 2 \rangle \rangle, 23 \rangle \rangle \rangle$

Ten sposób kodowania staje się jasny, gdy spojrzymy na drzewo syntaktyczne rozważanej formuły (w istocie kodujemy właśnie to drzewo):



Omówione kodowanie wyrażeń jest:

1. jednoznaczne (każdy term lub formuła otrzymuje dokładnie jeden numer gödlowski);

2. efektywne (przypisanie numerów realizowane jest za pomocą funkcji rekurencyjnych).

Numery gödlowskie termów i formuł są oczywiście dość dużymi liczbami. W praktyce nie ma jednak żadnej potrzeby, aby je obliczać. Wystarczy możliwość ich jednoznacznego, efektywnego otrzymywania. Ponadto, dla dowolnej liczby naturalnej a można w sposób efektywny rozstrzygnąć, czy jest ona numerem gödlowskim termu lub formuły. Wystarczy w tym celu:

1. sprawdzić, czy zachodzi $seq(a)$;

2. jeśli tak, to wyznaczyć $lh(a)$ oraz $(a)_i$ dla $i = 0, 1, \ldots, lh(a)$;

3. dla tak „rozłożonej" $a = \langle a_0, a_1, \ldots a_n \rangle$ sprawdzić, czy $a_0 = sn(X)$ dla jakiegoś symbolu X alfabetu języka PA;

4. jeśli tak, to procedurę tę powtórzyć dla a_i, gdzie $i = 0, 1, \ldots, lh(a)$;

5. ponieważ $a_i < a$, więc po skończonej liczbie kroków procedura ta się zakończy (i uzyskamy odpowiedź czy a jest numerem gödlowskim termu lub formuły).

2.8.1 Kodowanie zmiennych

Vble(a) $\equiv$ $a = \langle (a)_0 \rangle \wedge \exists y \leqslant a\ ((a)_0 \doteq 2y)$

Vble(a) zachodzi, gdy a jest numerem gödlowskim pewnej zmiennej x_i, czyli gdy $a = \ulcorner x_i \urcorner$.

Rekurencyjność Vble wynika z faktu, że $(a)_0 < a$.

Zauważmy, że numer gödlowski zmiennej to nie to samo, co numer przypisany jej przez funkcję sn.

2.8.2 Kodowanie termów

Formuła Term(a) jest równoważna:

formule	jeśli
$0 = 0$	$a = \langle sn(\underline{0}) \rangle$
Term$((a_1))$	$a = \langle sn(\underline{s}), (a)_1 \rangle$
Term$((a)_1) \wedge$ Term$((a)_2)$	$a = \langle sn(\underline{+}), (a)_1, (a)_2 \rangle$
Term$((a)_1) \wedge$ Term$((a)_2)$	$a = \langle sn(\underline{\times}), (a)_1, (a)_2 \rangle$
Vble(a)	w p.p.

Term(a) czytamy: a jest numerem gödlowskim termu, czyli $a = \ulcorner \alpha \urcorner$ dla pewnego termu α. Skrót „w p.p." czytamy: „w pozostałych przypadkach." Rekurencyjność Term dostajemy z: faktu, iż $(a)_1 < a$ oraz twierdzeń o definiowaniu warunkowym i definiowaniu przez schemat rekursji.

2.8.3 Kodowanie formuł

AtForm$(a) \equiv a = \langle (a)_0, (a)_1, (a)_2 \rangle (a)_0 = sn(\doteq) \wedge$ Term$((a)_1) \wedge$ Term$((a)_2)$.

Formuła Form(a) jest równoważna:

formule	jeśli
Form$((a)_1)$	$a = \langle sn(\neg), (a)_1 \rangle$
Form$((a)_1) \wedge$ Form$((a)_2)$	$a = \langle sn(\vee), (a)_1, (a)_2 \rangle$
Form$((a)_1) \wedge$ Form$((a)_2)$	$a = \langle sn(\wedge), (a)_1, (a)_2 \rangle$
Form$((a)_1) \wedge$ Form$((a)_2)$	$a = \langle sn(\rightarrow), (a)_1, (a)_2 \rangle$
Form$((a)_1) \wedge$ Form$((a)_2)$	$a = \langle sn(\equiv), (a)_1, (a)_2 \rangle$
Vble$((a)_1) \wedge$ Form$((a)_2)$	$a = \langle sn(\exists), (a)_1, (a)_2 \rangle$
Vble$((a)_1) \wedge$ Form$((a)_2)$	$a = \langle sn(\forall), (a)_1, (a)_2 \rangle$
AtForm(a)	w p.p.

Form(a) zachodzi, gdy a jest numerem gödlowskim formuły języka PA.

2.8.4 Kodowanie operacji syntaktycznych

Funkcja Sub(a, b, c):

ma wartość	jeśli
c	$\mathrm{Vble}(a) \wedge a = b$
$\langle (a)_0, \mathrm{Sub}((a)_1, b, c)\rangle$	$a = \langle (a)_0, (a)_1\rangle$
$\langle (a)_0, \mathrm{Sub}((a)_1, b, c), \mathrm{Sub}((a)_2, b, c)\rangle$	$a = \langle (a)_0, (a)_1, (a)_2\rangle \wedge$ $(a)_0 \neq sn(\exists) \wedge (a)_0 \neq sn(\forall)$
$\langle (a)_0, (a)_1, \mathrm{Sub}((a)_2, b, c)\rangle$	$(a = \langle sn(\exists), (a)_1, (a)_2\rangle \vee$ $a = \langle sn(\exists), (a)_1, (a)_2\rangle) \wedge (a)_1 \neq b$
a	w p.p.

Dla termów α, β, zmiennej x oraz formuły ψ mamy:

$\mathrm{Sub}(\ulcorner\alpha\urcorner, \ulcorner x\urcorner, \ulcorner\beta\urcorner) = \ulcorner\alpha(x/\beta)\urcorner$ (podstawienie β za x w α)

$\mathrm{Sub}(\ulcorner\psi\urcorner, \ulcorner x\urcorner, \ulcorner\alpha\urcorner) = \ulcorner\psi(x/\alpha)\urcorner$ (podstawienie α za x w ψ).

Formuła $\mathrm{Fr}(a, b)$ jest równoważna:

formule	jeśli
$a = b$	$\mathrm{Vble}(a)$
$\mathrm{Fr}((a)_1, b)$	$a = \langle (a)_0, a_1\rangle$
$\mathrm{Fr}((a)_1, b) \vee \mathrm{Fr}((a)_2, b)$	$a = \langle (a)_0, a_1, a_2\rangle \wedge$ $(a)_0 \neq sn(\exists) \wedge (a)_0 \neq sn(\forall)$
$\mathrm{Fr}((a)_2, b) \wedge (a)_1 \neq b$	w p.p.

Dla formuły ψ oraz zmiennej x zachodzi relacja $\mathrm{Fr}(\ulcorner\psi\urcorner, \ulcorner x\urcorner)$ dokładnie wtedy, gdy x jest zmienną wolną w ψ.

Formuła $\mathrm{Subtl}(a, b, c)$ jest równoważna:

formule	jeśli
$\mathrm{Subtl}((a)_1, b, c)$	$a = \langle (a)_0, (a)_1\rangle$
$\mathrm{Subtl}((a)_1, b, c) \wedge \mathrm{Subtl}((a)_2, b, c)$	$a = \langle (a)_0, (a)_1, (a)_2\rangle \wedge$ $(a)_0 \neq sn(\exists) \wedge (a)_0 \neq sn(\forall)$
$\mathrm{Subtl}((a)_2, b, c) \wedge$ $\wedge(\neg\mathrm{Fr}((a)_2, b) \vee \neg\mathrm{Fr}(c, (a)_1))$	$(a = \langle sn(\exists), (a)_1, (a)_2\rangle \vee$ $a = \langle sn(\forall), (a)_1, (a)_2\rangle) \wedge$ $(a)_1 \neq b$
$0 = 0$	w p.p.

$\mathrm{Subtl}(\ulcorner\psi\urcorner, \ulcorner x\urcorner, \ulcorner\alpha\urcorner)$ zachodzi dokładnie wtedy, gdy term α jest podstawialny za zmienną x do formuły ψ.

2.8.5 Kodowanie aksjomatów logicznych

Formuła $\mathrm{LogAx}(a)$ jest alternatywą 14 warunków:

- $\exists x < a \exists y < a(\mathrm{Form}(x) \wedge \mathrm{Form}(y) \wedge a = \langle 9, x, \langle 9, y, x\rangle\rangle)$
- $\exists x < a \exists y < a \exists z < a(\mathrm{Form}(x) \wedge \mathrm{Form}(y) \wedge \mathrm{Form}(z) \wedge$ $a = \langle 9, \langle 9, x, \langle 9, y, z\rangle\rangle, \langle 9, \langle 9, x, y\rangle, \langle 9, x, z\rangle\rangle\rangle)$
- $\exists x < a \exists y < a(\mathrm{Form}(x) \wedge \mathrm{Form}(y) \wedge a = \langle 9, \langle 9, x, y\rangle, \langle 9, \langle 3, y\rangle, \langle 3, x\rangle\rangle\rangle)$

- $\exists x < a(\mathrm{Form}(x) \wedge a = \langle 9, \langle 3, \langle 3, x\rangle\rangle, x\rangle)$
- $\exists x < a(\mathrm{Form}(x) \wedge a = \langle 9, x, \langle 3, \langle 3, x\rangle\rangle\rangle)$
- $\exists x < a \exists y < a(\mathrm{Form}(x) \wedge \mathrm{Form}(y) \wedge a = \langle 9, \langle 7, x, y\rangle, x\rangle)$
- $\exists x < a \exists y < a(\mathrm{Form}(x) \wedge \mathrm{Form}(y) \wedge a = \langle 9, \langle 7, x, y\rangle, y\rangle)$

2.8.6 Kodowanie aksjomatów logicznych

- $\exists x < a \exists y < a(\mathrm{Form}(x) \wedge \mathrm{Form}(y) \wedge \mathrm{Form}(z) \wedge$ $a = \langle 9, \langle 9, x, y\rangle, \langle 9, \langle 9, x, z\rangle, \langle 9, x, \langle 7, y, z\rangle\rangle\rangle\rangle)$
- $\exists x < a \exists y < a(\mathrm{Form}(x) \wedge \mathrm{Form}(y) \wedge a = \langle 9, x, \langle 5, x, y\rangle\rangle)$
- $\exists x < a \exists y < a(\mathrm{Form}(x) \wedge \mathrm{Form}(y) \wedge a = \langle 9, y, \langle 5, x, y\rangle\rangle)$
- $\exists x < a \exists y < a(\mathrm{Form}(x) \wedge \mathrm{Form}(y) \wedge \mathrm{Form}(z) \wedge$ $a = \langle 9, \langle 9, x, z\rangle, \langle 9, \langle 9, y, z\rangle, \langle 9, \langle 5, x, y\rangle, z\rangle\rangle\rangle)$
- $\exists x < a \exists y < a(\mathrm{Form}(x) \wedge \mathrm{Form}(y) \wedge a = \langle 9, \langle 11, x, y\rangle, \langle 9, x, y\rangle\rangle)$
- $\exists x < a \exists y < a(\mathrm{Form}(x) \wedge \mathrm{Form}(y) \wedge a = \langle 9, \langle 11, x, y\rangle, \langle 9, y, x\rangle\rangle)$
- $\exists x < a \exists y < a(\mathrm{Form}(x) \wedge \mathrm{Form}(y) \wedge a = \langle 9, \langle 9, x, y\rangle, \langle 9, \langle 9, y, x\rangle, \langle 11, x, y\rangle\rangle\rangle)$

LogAx(a) zachodzi dokładnie wtedy, gdy a jest numerem gödlowskim aksjomatu logicznego PA.

2.8.7 Kodowanie aksjomatów identyczności

Formuła EqAx(a) jest alternatywą 8 warunków:

- $\exists x < a\ (a = \langle 25, 2x, 2x\rangle)$
- $\exists x < a\ \exists y < a\ (a = \langle 9, \langle 25, 2x, 2y\rangle, \langle 25, 2y, 2x\rangle\rangle)$
- $\exists x < a\ \exists y < a\ \exists z < a\ (a = \langle 9, \langle 7, \langle 25, 2x, 2y\rangle, \langle 25, 2y, 2z\rangle, \langle 25, 2x, 2z\rangle\rangle)$
- $\exists x < a\ \exists y < a\ \exists z < a\ (a = \langle 9, \langle 25, 2x, 2y\rangle, \langle 25, \langle 17, 2x\rangle, \langle 17, 2y\rangle\rangle\rangle)$
- $\exists x < a\ \exists y < a\ \exists z < a\ (a = \langle 9, \langle 25, 2x, 2y\rangle, \langle 25, \langle 19, 2x, 2z\rangle, \langle 19, 2y, 2z\rangle\rangle\rangle)$
- $\exists x < a\ \exists y < a\ \exists z < a\ (a = \langle 9, \langle 25, 2x, 2y\rangle, \langle 25, \langle 19, 2z, 2x\rangle, \langle 19, 2z, 2y\rangle\rangle\rangle)$
- $\exists x < a\ \exists y < a\ \exists z < a\ (a = \langle 9, \langle 25, 2x, 2y\rangle, \langle 25, \langle 21, 2x, 2z\rangle, \langle 21, 2y, 2z\rangle\rangle\rangle)$
- $\exists x < a\ \exists y < a\ \exists z < a\ (a = \langle 9, \langle 25, \langle 25, 2x, 2y\rangle, \langle 25, \langle 21, 2z, 2x\rangle, \langle 21, 2z, 2v\rangle\rangle\rangle)$

EqAx(a) zachodzi dokładnie wtedy, gdy a jest numerem gödlowskim jednego z aksjomatów identyczności PA.

2.8.8 Kodowanie aksjomatów pozalogicznych

Formuła NLAx(a) jest alternatywą następujących warunków:

- $\exists x < a\ \exists y < y\ ((\text{Vble}(x) \wedge \text{Vble}(y)) \wedge a = \langle 9, \langle 25, \langle 17, x\rangle, \langle 17, y\rangle\rangle, \langle 25, x, y\rangle\rangle)$
- $\exists x < a\ (\text{Vble}(x) \wedge a = \langle 3, \langle 25, 23, \langle 17, x\rangle\rangle\rangle)$
- $\exists x < a\ (\text{Vble}(x) \wedge a = \langle 25, \langle 19, x, 23\rangle, x\rangle)$
- $\exists x < a\ \exists y < y\ ((\text{Vble}(x) \wedge \text{Vble}(y)) \wedge a = \langle 25, \langle 19, x, \langle 17, y\rangle\rangle, \langle 17, \langle 19, x, y\rangle\rangle\rangle)$
- $\exists x < a\ (\text{Vble}(x) \wedge a = \langle 25, \langle 21, x, 23\rangle, 23\rangle)$
- $\exists x < a\ \exists y < a\ ((\text{Vble}(x) \wedge \text{Vble}(y)) \wedge a = \langle 25, \langle 21, x, \langle 17, y\rangle\rangle, \langle 19, \langle 21, x, y\rangle, x\rangle\rangle)$
- $\exists x < a\ \exists y < a\ ((\text{Form}(x) \wedge \text{Vble}(y) \wedge \text{Fr}(x, y)) \wedge$
  $a = \langle 9, \langle 7, \text{Sub}(x, y, 23), \langle 15, y, \langle 9, x, \text{Sub}(x, y, \langle 17, y\rangle)\rangle\rangle\rangle, \langle 15, y, x\rangle\rangle)$.

NLAx(a) zachodzi dokładnie wtedy, gdy a jest numerem gödlowskim aksjomatu pozalogicznego PA.

Zauważmy, że ostatni z powyższych warunków odpowiada nieskończonemu zbiorowi aksjomatów.

2.8.9 Kodowanie reguł wnioskowania

Relacja sub(a, b) zachodzi dokładnie wtedy, gdy istnieją $x < b$ oraz $y < b$ takie, że:

- Term(x)
- Vble(y)
- Form(a)
- Form(b)
- Subtl(a, y, x)
- $b = \text{Sub}(a, y, x)$.

sub$(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner)$ zachodzi dokładnie wtedy, gdy formuła ψ powstaje z formuły φ przez podstawienie w φ pewnego termu za pewną zmienną.

Relacja MP(a, b, c) zachodzi, gdy:

- $\mathrm{Form}(a)$
- $\mathrm{Form}(b)$
- $\mathrm{Form}(c)$
- $a = \langle 9, (a)_1, (a)_2 \rangle$
- $b = (a)_1$
- $c = (a)_2$.

MP(a, b, c) zachodzi dokładnie wtedy, gdy formuła o numerze gödlowskim c jest wnioskiem reguły odrywania, gdzie przesłankami są formuły o numerach gödlowskich a oraz b.

Relacja GR(a, b) zachodzi, gdy istnieje $x < b$ taka, że:

- $\mathrm{Form}(a)$
- $\mathrm{Form}(b)$
- $\mathrm{Vble}(x)$
- $(b)_0 = sn(\forall)$
- $(b)_1 = x$
- $(b_2) = a$.

GR(a, b) zachodzi dokładnie wtedy, gdy gdy formuła o numerze gödlowskim b jest wnioskiem reguły generalizacji, gdzie przesłanką jest formuła o numerze gödlowskim a.

Relacja OA(a, b) zachodzi, gdy istnieją $x < a$, $y < a$ oraz $z < b$ takie, że:

- $\mathrm{Form}(x)$
- $\mathrm{Form}(y)$
- $\mathrm{Vble}(z)$
- $a = \langle 9, x, \langle 13, z, y \rangle \rangle$
- $b = \langle 9, x, y \rangle$.

Relacja $\mathrm{OA}(a, b)$ zachodzi dokładnie wtedy, gdy b jest numerem gödlowskim wniosku reguły opuszczania kwantyfikatora generalnego, gdzie przesłanka ma numer gödlowski a.

Relacja $\mathrm{DA}(a, b)$ zachodzi, gdy istnieją $x < a$, $y < a$ oraz $z < b$ takie, że:

- $\mathrm{Form}(x)$
- $\mathrm{Form}(y)$
- $\mathrm{Vble}(z)$
- $a = \langle 9, x, y\rangle$
- $b = \langle 9, x, \langle 13, z, y\rangle\rangle$
- $\neg\mathrm{Fr}(x, z)$.

Relacja $\mathrm{DA}(a, b)$ zachodzi dokładnie wtedy, gdy b jest numerem gödlowskim wniosku reguły dołączania kwantyfikatora generalnego, gdzie przesłanka ma numer gödlowski a.

Relacja $\mathrm{OE}(a, b)$ zachodzi, gdy istnieją $x < a$, $y < a$ oraz $z < b$ takie, że:

- $\mathrm{Form}(x)$
- $\mathrm{Form}(y)$
- $\mathrm{Vble}(z)$
- $a = \langle 9, \langle 13, z, x\rangle\rangle$
- $b = \langle 9, x, y\rangle$.

Relacja $\mathrm{OE}(a, b)$ zachodzi dokładnie wtedy, gdy b jest numerem gödlowskim wniosku reguły opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego, gdzie przesłanka ma numer gödlowski a.

Relacja $\mathrm{DE}(a, b)$ zachodzi, gdy istnieją $x < a$, $y < a$ oraz $z < b$ takie, że:

- $\mathrm{Form}(x)$
- $\mathrm{Form}(y)$
- $\mathrm{Vble}(z)$
- $a = \langle 9, x, y\rangle$

- $b = \langle 9, \langle 13, z, x \rangle \rangle$
- $\neg \mathrm{Fr}(y, z)$.

Relacja $\mathrm{DE}(a, b)$ zachodzi dokładnie wtedy, gdy b jest numerem gödlowskim wniosku reguły dołączania kwantyfikatora egzystencjalnego, gdzie przesłanka ma numer gödlowski a.

2.8.10 Kodowanie dowodów

$\mathrm{Ax}(a) \equiv$ LogAx $\vee$ EqAx $\vee$ NLAx. Relacja ta zachodzi dokładnie dla liczb będących numerami gödlowskimi aksjomatów PA.

Dowody są *ciągami* formuł. Nadto, jak pamiętamy, każdy dowód jest też *drzewem*: w korzeniu znajduje się dowodzona formuła, w liściach aksjomaty, a bezpośrednie poprzedniki każdego wierzchołka są przesłankami reguły wnioskowania, której wnioskiem jest właśnie ów wierzchołek.

Ciągi numerów formuł możemy kodować na tej samej zasadzie, na jakiej kodujemy ciągi symboli. Jeśli $\Delta = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ jest ciągiem formuł, to przez *numer gödlowski* ciągu Δ rozumiemy (wyznaczoną jednoznacznie i efektywnie) liczbę:

$$\langle \ulcorner \psi_1 \urcorner, \ulcorner \psi_2 \urcorner, \ldots, , \ulcorner \psi_n \urcorner \rangle.$$

Relację $\mathrm{Dow}(a, b)$ definiujemy przez koniunkcję warunków:

$$seq(a) \wedge lh(a) \neq 0 \wedge (a)_{lh(a) \dot{-} 1} = b \wedge \forall i < lh(a) \ (\mathrm{Form}((a)_i) \wedge$$
$$\exists j < i \ \exists k < i \ (\mathrm{sub}((a)_j, (a)_i) \vee \mathrm{MP}((a)_j, (a)_k, (a)_i) \vee \mathrm{GR}((a)_j, (a)_i) \vee$$
$$\mathrm{OA}((a)_j, (a)_i) \vee \mathrm{DA}((a)_j, (a)_i) \vee \mathrm{OE}((a)_j, (a)_i) \vee \mathrm{DE}((a)_j, (a)_i))).$$

Relacja $\mathrm{Dow}(a, b)$ zachodzi dokładnie wtedy, gdy a jest numerem gödlowskim dowodu formuły o numerze gödlowskim b.

Jak bowiem pamiętamy, dowód formuły ψ to ciąg formuł o ostatnim elemencie ψ taki, że każdy z elementów tego ciągu jest bądź aksjomatem, bądź wnioskiem którejś z reguł wnioskowania, której przesłankami są wcześniejsze (od tego wniosku) elementy owego ciągu.

2.8.11 Rekurencyjność kodowań

Twierdzenie. Wszystkie zdefiniowane powyżej funkcje i relacje są rekurencyjne.

Dowód tego twierdzenia wynika bezpośrednio z podanych wyraźnych rekurencyjnych definicji. Odwołujemy się przy tym także do faktów wspomnianych wyżej, przy kodowaniu termów.

2.8.12 Twierdzenia PA

Wszystkie dotąd rozważane funkcje i relacje odpowiadające pojęciom metalogicznym okazały się rekurencyjne. A co z relacją $PA \vdash \psi$? Gdy zachodzi $PA \vdash \psi$, to ψ jest twierdzeniem PA. Okazuje się, że relacja ta (dokładniej: relacja między numerami dowodów a numerami formuł) nie jest rekurencyjna, jest jedynie rekurencyjnie przeliczalna. Mamy bowiem: $PA \vdash \psi$ dokładnie wtedy, gdy *istnieje* dowód ψ w PA. W definicji pojęcia „być twierdzeniem PA" występuje zatem jeden nieograniczony kwantyfikator egzystencjalny.

1. Definiujemy: $\mathrm{Tw}(a) \equiv \exists x\ \mathrm{Dow}(x, a)$.
2. Relacja Tw jest rekurencyjnie przeliczalna.

2.8.13 Inne funkcje kodujące

- Zamiast funkcji β Gödla można używać innych funkcji rekurencyjnych w arytmetyzacji składni. Przy tym, stosowane kodowanie może uwzględniać budowę składniową wyrażeń, bądź kodować po prostu ciągi symboli.
- W wielu podręcznikach używa się kodowania wykorzystującego rozkład liczb na czynniki pierwsze.
- Dla wyrażenia (termu lub formuły) u o postaci: $vv_1v_2 \ldots v_n$ jego numer gödlowski $gn(u)$ określamy indukcyjnie: $gn(u) = 2^{sn(v)} \cdot 3^{gn(v_1)} \cdot 5^{gn(v_2)} \cdot \ldots \cdot p_n^{gn(v_n)}$.
- Tu p_n jest n-tą liczbą pierwszą ($p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, itd.)

Dla rozważanej wcześniej formuły $\forall x_1\ (x_1 \doteq \underline{0} \rightarrow (x_1 \underline{\times} \underline{s}(x_1)) \doteq \underline{0})$ mamy (przy ustalonej uprzednio funkcji sn):

- $gn(\underline{s}(x_1)) = 2^{17} \cdot 3^2$
- $gn(x_1 \underline{\times} \underline{s}(x_1)) = 2^{21} \cdot 3^2 \cdot 5^{2^{17} \cdot 3^2}$
- $gn(x_1 \underline{\times} \underline{s}(x_1)) \doteq \underline{0}) = 2^{25} \cdot 3^{2^{21} \cdot 3^2 \cdot 5^{2^{17} \cdot 3^2}} \cdot 5^{23}$
- $gn(x_1 \doteq \underline{0}) = 2^{25} \cdot 3^2 \cdot 5^{23}$
- $gn(x_1 \doteq \underline{0} \rightarrow (x_1 \underline{\times} \underline{s}(x_1)) \doteq \underline{0}) = 2^9 \cdot 3^{gn(x_1 \doteq \underline{0})} \cdot 5^{gn(x_1 \underline{\times} \underline{s}(x_1)) \doteq \underline{0})}$
- $gn(\forall x_1\ (x_1 \doteq \underline{0} \rightarrow (x_1 \underline{\times} \underline{s}(x_1)) \doteq \underline{0})) = 2^{15} \cdot 3^2 \cdot 5^{gn(x_1 \doteq \underline{0} \rightarrow (x_1 \underline{\times} \underline{s}(x_1)) \doteq \underline{0})}$.

Kodowanie jest jednoznaczne. Dla dowolnej liczby a można ustalić czy jest ona kodem jakiegoś wyrażenia.

- Można też kodować wyrażenia po prostu jako ciągi symboli. Niech funkcja σ numerująca symbole alfabetu przyjmuje wartości dodatnie. Jeśli $s_1 s_2 \ldots s_n$ jest ciągiem symboli alfabetu, to za kod tego ciągu można wziąć liczbę $2^{\sigma(s_1)} \cdot 3^{\sigma(s_2)} \cdot \ldots \cdot p_{n-1}^{\sigma(s_n)}$.

- Można kodować wyrażenia ustalając np., że symbole alfabetu kodujemy liczbami zaczynającymi się (w zapisie dziesiętnym) od cyfry 8, po której występuje pewna liczba cyfr 1 (inna dla każdego symbolu alfabetu).

- Można kodować wyrażenia używając funkcji Cantora lub jakiejkolwiek innej (rekurencyjnej) funkcji kodującej ciągi skończone.

- Wybór funkcji kodującej jest więc sprawą konwencji. Kodowanie musi być jedynie jednoznaczne i rekurencyjne. W rozważaniach metateoretycznych nigdy nie obliczamy wartości funkcji kodujących wyrażenia.

2.9 Kilka pojęć metalogicznych

Procedurę arytmetyzacji składni można przeprowadzić dla dowolnej teorii pierwszego rzędu, której zbiór numerów gödlowskich symboli pozalogicznych jest rekurencyjny. Jeśli jednak zbiór numerów gödlowskich aksjomatów pozalogicznych teorii T nie jest rekurencyjny, to relacja $Dow_T(a, b)$ (czytaj: a jest numerem gödlowskim dowodu w teorii T formuły o numerze gödlowskim b) nie musi być rekurencyjna. W konsekwencji, w takim przypadku zbiór numerów gödlowskich twierdzeń teorii T nie musi być rekurencyjnie przeliczalny.

Mówimy, że teoria T jest *(rekurencyjnie) aksjomatyzowalna*, gdy zbiór numerów gödlowskich aksjomatów teorii T jest rekurencyjny. Arytmetyka PA jest rekurencyjnie aksjomatyzowalna.

Niech T będzie teorią pierwszego rzędu, której zbiór numerów gödlowskich symboli pozalogicznych jest rekurencyjny. Mówimy, że T jest:

1. *zupełna*, gdy dla dowolnego zdania ψ jej języka: albo $T \vdash \psi$, albo $T \vdash \neg\psi$; w przeciwnym przypadku T nazywamy *niezupełną*.

2. *rozstrzygalna*, gdy zbiór numerów gödlowskich jej twierdzeń jest rekurencyjny; w przeciwnym przypadku T nazywamy *nierozstrzygalną*.

Teoria T jest zatem zupełna, gdy dla dowolnego pytania rozstrzygnięcia sformułowanego w jej języku potrafimy w T udowodnić: albo odpowiedź TAK, albo odpowiedź NIE na to pytanie. Teoria T jest rozstrzygalna, gdy istnieje obliczalna metoda pozwalająca rozstrzygać o dowolnej formule jej języka czy jest ona twierdzeniem T czy nie jest [zakładamy tu Tezę Churcha: obliczalne=rekurencyjne].

Niech T będzie teorią (pierwszego rzędu), w której języku mamy liczebniki (nazwy liczb naturalnych). Jak zwykle, $T \vdash \psi$ oznacza, że istnieje dowód formuły ψ w teorii T. Piszemy $T\ non \vdash \psi$, gdy nie zachodzi $T \vdash \psi$. Mówimy, że teoria T jest *ω-niesprzeczna*, gdy dla każdej formuły $\psi(x)$: jeśli $T \vdash \psi(\underline{0})$, $T \vdash \psi(\overline{1})$, $T \vdash \psi(\overline{2})$, $\ldots$, $T \vdash \psi(\overline{n})$,$\ldots$, to $T\ non \vdash \exists x\ \neg\psi(x)$. Teorie, które nie są ω-niesprzeczne nazywamy ω-sprzecznymi.
Twierdzenie. Jeśli PA jest ω-niesprzeczna, to jest niesprzeczna.

2.10 I Twierdzenie Gödla i Twierdzenie Rossera

Funkcję num określamy przez schemat rekursji prostej:

1. $\mathrm{num}(0) = \langle sn(\underline{0})\rangle$
2. $\mathrm{num}(a+1) = \langle sn(\underline{s}), \mathrm{num}(a)\rangle$.

Wtedy $\mathrm{num}(n)$ jest numerem gödlowskim liczebnika $\overline{n}$. Funkcja num jest rekurencyjna. Przypominamy, że $\langle\ \rangle$ jest tu funkcją kodowania ciągów zdefiniowaną w poprzednim wykładzie.

Nie zagub się! Należy odróżniać:

1. liczbę naturalną n
2. liczebnik $\overline{n}$
3. numer gödlowski $\mathrm{num}(n)$ liczebnika $\overline{n}$.

Skonstruujemy teraz słynne zdanie Gödla. Niech sam będzie dwuargumentową relacją zdefiniowaną następująco:

$\mathrm{sam}(a,b)\ \equiv\ \mathrm{Form}(a) \wedge \mathrm{Fr}(a,2) \wedge \mathrm{Dow}(b, \mathrm{sub}(a,2,\mathrm{num}(a)))$.

Jeśli a jest numerem gödlowskim formuły, powiedzmy, $\psi(x_1)$, to $\mathrm{sub}(a,2,\mathrm{num}(a))$ jest numerem gödlowskim formuły, która powstaje z formuły $\psi(x_1)$ poprzez wstawienie za zmienną x_1 liczebnika nazywającego liczbę a, czyli nazywającego właśnie numer gödlowski samej formuły ψ. Tak więc, relacja sam zachodzi między liczbami a oraz b dokładnie wtedy, gdy:

1. a jest numerem gödlowskim formuły o zmiennej wolnej x_1,

2. b jest numerem gödlowskim dowodu formuły o numerze gödlowskim sub$(a, 2, \text{num}(a))$, czyli formuły otrzymanej z formuły o numerze gödlowskim a w wyżej podany sposób.

Komentarz dydaktyczny. Mamy formułę, powiedzmy, $\psi(x_1)$ o jednej zmiennej wolnej x_1 (wybór tej właśnie zmiennej jest nieistotny). Wtedy:

1. Formuła ta ma swój numer gödlowski, powiedzmy, a, czyli $\ulcorner\psi(x_1)\urcorner = a$.

2. Liczba num(a) jest numerem gödlowskim liczebnika $\overline{a}$.

3. Do formuły $\psi(x_1)$ chcemy wstawić, w miejsce zmiennej wolnej x_1 term $\overline{a}$, czyli chcemy otrzymać formułę $\psi(\overline{a})$, która (na mocy definicji liczby a) jest formułą $\psi(\overline{\ulcorner\psi(x_1)\urcorner})$.

4. Liczba sub$(a, 2, \text{num}(a))$ jest właśnie numerem gödlowskim otrzymanej w ten sposób formuły: sub$(a, 2, \text{num}(a)) = \ulcorner\psi(\overline{\ulcorner\psi(x_1)\urcorner})\urcorner$.

5. Pamiętaj: do formuły podstawiamy (w miejsce zmiennej wolnej) term. W szczególności, term ten może być liczebnikiem.

Ponieważ sam jest relacją rekurencyjną, więc (na mocy twierdzenia o reprezentowalności) istnieje co najmniej jedna formuła języka PA, która mocno reprezentuje tę relację. Niech $\underline{\text{sam}}(x, y)$ będzie taką formułą. Dalej:

1. Rozważmy formułę o postaci: $\forall y \neg \underline{\text{sam}}(x, y)$.

2. Niech $m = \ulcorner\forall y \neg \underline{\text{sam}}(x, y)\urcorner$, czyli niech m będzie numerem gödlowskim formuły $\forall y \neg \underline{\text{sam}}(x, y)$.

3. Niech *god* będzie zdaniem: $\forall y \neg \underline{\text{sam}}(\overline{m}, y)$.

4. Zdanie *god* nazywamy *zdaniem Gödla*.

5. Zdanie *god* stwierdza zatem, że formuła o numerze gödlowskim m nie ma dowodu w PA.

6. Ponieważ m jest numerem gödlowskim formuły $\forall y \neg \underline{\text{sam}}(x, y)$, więc zdanie Gödla *god* stwierdza, że zdanie *god* nie jest twierdzeniem PA, czyli głosi ono samo o sobie: „nie jestem twierdzeniem PA.”

I TWIERDZENIE GÖDLA (O NIEZUPEŁNOŚCI PA). *Jeśli PA jest ω-niesprzeczna, to ani zdanie god, ani zdanie $\neg$ god nie ma dowodu w PA:*

1. PA $non \vdash$ god

2. PA $non \vdash \neg$ god.

Tak więc, PA jest niezupełna.

Zauważmy, że jedno ze zdań: god, $\neg$ god musi być prawdziwe w modelu standardowym $\mathfrak{N}_0$. Zobaczymy, że $\mathfrak{N}_0 \models god$. Dla dowodu PA $non \vdash god$ wystarczy założenie niesprzeczności PA; dowód PA $non \vdash \neg$ god wymaga silniejszego założenia ω-niesprzeczności.

Dowód, że PA $non \vdash god$:

1. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $PA \vdash god$, czyli że god ma dowód w PA.
2. Niech k będzie numerem gödlowskim jakiegoś dowodu zdania god (pamiętamy, że dowody, jako ciągi formuł, też mają numery gödlowskie).
3. Zachodzi zatem sam(m, k). Ponieważ $\underline{\text{sam}}$ mocno reprezentuje relację sam, więc $PA \vdash \underline{\text{sam}}(\overline{m}, \overline{k})$.
4. Skoro $PA \vdash god$, czyli $PA \vdash \forall y \neg \underline{\text{sam}}(\overline{m}, y)$, to $PA \vdash \neg \underline{\text{sam}}(\overline{m}, \overline{k})$.
5. Skoro $PA \vdash \underline{\text{sam}}(\overline{m}, \overline{k})$ oraz $PA \vdash \neg \underline{\text{sam}}(\overline{m}, \overline{k})$, to PA jest sprzeczna, wbrew założeniu (bo zakładamy, że PA jest nawet ω-niesprzeczna).
6. Przypuszczenie dowodu nie wprost trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie, PA $non \vdash$ god.

Dowód, że PA $non \vdash \neg$ god:

1. Pokazaliśmy, że PA $non \vdash god$, a więc nie istnieje liczba naturalna n, która byłaby numerem gödlowskim dowodu god w PA.
2. Dla każdej n: **nie** zachodzi zatem sam(m, n).
3. Ponieważ $\underline{\text{sam}}$ mocno reprezentuje relację sam, więc dla wszystkich n mamy: $PA \vdash \neg \underline{\text{sam}}(\overline{m}, \overline{n})$.
4. Na mocy ω-niesprzeczności PA mamy: PA $non \vdash \exists y \neg\neg \underline{\text{sam}}(\overline{m}, y)$, co jest równoważne temu, iż PA $non \vdash \neg\forall y \neg \underline{\text{sam}}(\overline{m}, y)$.
5. Ponieważ $\neg\forall y \neg \underline{\text{sam}}(\overline{m}, y)$ jest formułą $\neg$ god, więc PA $non \vdash \neg$ god.

Dowód całego twierdzenia został tym samym zakończony. Zdanie Gödla god jest formułą generalnie skwantyfikowaną: $\forall y \neg \underline{\text{sam}}(\overline{m}, y)$. Ponieważ: $PA\ non \vdash god$ oraz $\underline{\text{sam}}$ mocno reprezentuje w PA relację sam, więc dla każdej liczby naturalnej n mamy: $PA \vdash \neg \underline{\text{sam}}(\overline{m}, \overline{n})$. Tak więc, choć samo (generalnie skwantyfikowane) zdanie Gödla jest nierozstrzygalne w PA, to wszystkie jego szczególne przypadki (gdy pomijamy kwantyfikator generalny i wstawiamy liczebnik za zmienną) są twierdzeniami PA. Założenie ω-niesprzeczności można osłabić do zwykłej niesprzeczności, jak za chwilę zobaczymy.

Zdefiniujmy dwuargumentową relacje rekurencyjną samneg:

samneg$(a, b) \equiv$ Form$(a) \wedge$ Fr$(a, 2) \wedge$ Dow$(b, \text{sub}(\langle 3, a\rangle, 2, \text{num}(a)))$.

Relacja samneg zachodzi zatem między liczbami a oraz b dokładnie wtedy, gdy a jest numerem gödlowskim pewnej formuły, powiedzmy, $\psi(x_1)$ o zmiennej wolnej x_1, natomiast b jest numerem gödlowskim dowodu formuły otrzymanej przez podstawienie w formule $\neg\psi(x_1)$ za zmienną x_1 liczebnika nazywającego liczbę a, czyli numer gödlowski samej formuły $\psi(x_1)$.

Relacja samneg jest rekurencyjna, a zatem istnieje co najmniej jedna formuła języka PA, która ją mocno reprezentuje. Niech $\underline{\text{samneg}}$ będzie taką formułą. Jak poprzednio, niech formuła $\underline{\text{sam}}$ mocno reprezentuje relację sam. A teraz kolejno:

1. Rozważmy formułę: $\forall y\ (\underline{\text{sam}}(x, y) \rightarrow \exists z\ (z \underline{\leqslant} y \wedge \underline{\text{samneg}}(x, z)))$. Tu $\underline{\leqslant}$ jest predykatem o denotacji $\leqslant$.

2. Niech n będzie numerem gödlowskim tej formuły, czyli: $n = \ulcorner \forall y\ (\underline{\text{sam}}(x, y) \rightarrow \exists z\ (z \underline{\leqslant} y \wedge \underline{\text{samneg}}(x, z))) \urcorner$.

3. Niech ros będzie zdaniem: $\forall y\ (\underline{\text{sam}}(\overline{n}, y) \rightarrow \exists z\ (z \underline{\leqslant} y \wedge \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, z)))$.

4. Zdanie ros nazwiemy *zdaniem Rossera*.

Dla każdej liczby naturalnej y mamy:

1. (†) sam(n, y) dokładnie wtedy, gdy y jest numerem gödlowskim dowodu w PA zdania ros

2. (‡) samneg(n, y) dokładnie wtedy, gdy y jest numerem gödlowskim dowodu w PA zdania $\neg\ ros$.

Zdanie Rossera ros stwierdza zatem, że jeśli istnieje w PA dowód zdania ros, to istnieje w PA również dowód (o niewiększym numerze gödlowskim) zdania $\neg\ ros$. Zdanie ros stwierdza więc, że jeśli ono samo jest twierdzeniem PA, to twierdzeniem PA jest także jego negacja.

TWIERDZENIE ROSSERA. *Jeśli PA jest niesprzeczna, to ani zdanie ros, ani zdanie $\neg\ ros$ nie ma dowodu w PA:*

1. PA *non* $\vdash ros$

2. PA *non* $\vdash \neg\, ros.$

Tak więc, PA jest niezupełna.
1. Dowód, że PA *non* $\vdash ros$:

1. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że $PA \vdash ros$ i niech k będzie numerem gödlowskim jakiegoś dowodu ros w PA.

2. Wtedy (na mocy (†)) sam(n, k), a więc $PA \vdash \underline{\text{sam}}(\overline{n}, \overline{k})$.

3. Na mocy przypuszczenia dowodu nie wprost mamy: $PA \vdash \underline{\text{sam}}(\overline{n}, \overline{k}) \rightarrow \exists z\ (z \underline{\leqslant} \overline{k} \wedge \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, z))$.

4. Na mocy reguły odrywania mamy: $(*)$ $PA \vdash \exists z\ (z \underline{\leqslant} \overline{k} \wedge \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, z))$.

5. Na mocy założenia, że PA niesprzeczna: nie istnieje w PA dowód zdania $\neg\, ros$.

6. Na mocy (‡), dla każdej y: *nie* zachodzi samneg(n, y).

7. Ponieważ $\underline{\text{samneg}}$ mocno reprezentuje samneg w PA, więc dla wszystkich i mamy: $PA \vdash \neg\, \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, \overline{i})$.

8. W szczególności: $PA \vdash \neg\, \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, \underline{0}) \wedge \neg\, \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, \overline{1}) \wedge \ldots \wedge \neg\, \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, \overline{k})$.

9. Na mocy faktu podanego w poprzednim wykładzie mamy: $PA \vdash (\neg\, \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, \underline{0}) \wedge \neg\, \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, \overline{1}) \wedge \ldots \wedge \neg\, \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, \overline{k})) \rightarrow \forall z\ (z \underline{\leqslant} \overline{k} \rightarrow \neg\, \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, z))$.

10. Na mocy reguły odrywania mamy: $(**)$ $PA \vdash \forall z\ (z \underline{\leqslant} \overline{k} \rightarrow \neg\, \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, z))$.

11. Skoro zachodzą $(*)$ oraz $(**)$, to PA jest sprzeczna, wbrew założeniu.

12. Tak więc, przypuszczenie dowodu nie wprost $PA \vdash ros$ trzeba odrzucić jako fałszywe.

13. Ostatecznie, PA *non* $\vdash ros$.

2. Dowód, że PA *non* $\vdash \neg\, ros$:

1. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że $PA \vdash \neg\, ros$ i niech r będzie numerem jakiegoś dowodu $\neg\, ros$ w PA.

2. Na mocy (‡) mamy: samneg(n, r), a na mocy mocnej reprezentowalności samneg przez $\underline{\text{samneg}}$ mamy: $PA \vdash \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, \overline{r})$.

3. Z założenia niesprzeczności PA oraz przypuszczenia dowodu nie wprost mamy: $PA\ non \vdash ros$.

4. Tak więc, żadna liczba y nie jest numerem gödlowskim dowodu zdania ros, co oznacza, że dla każdej y: *nie* zachodzi sam(n, y).

5. W konsekwencji, $PA \vdash \neg\, \underline{\text{sam}}(\overline{n}, \overline{i})$, dla wszystkich i.

6. Mamy więc: $PA \vdash \neg\, \underline{\text{sam}}(\overline{n}, \underline{0}) \wedge \neg\, \underline{\text{sam}}(\overline{n}, \overline{1}) \wedge \ldots \wedge \neg\, \underline{\text{sam}}(\overline{n}, \overline{r})$.

7. Tak samo jak w dowodzie punktu 1 otrzymujemy stąd: $PA \vdash y \underline{\leqslant} \overline{r} \rightarrow \neg\, \underline{\text{sam}}(\overline{n}, y)$.

8. Skoro $PA \vdash \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, \overline{r})$, to $PA \vdash \overline{r} \underline{\leqslant} y \rightarrow \exists z\ (z \underline{\leqslant} y \wedge \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, z))$.

9. Z faktu podanego w poprzednim wykładzie mamy: $PA \vdash y \underline{\leqslant} \overline{r} \vee \overline{r} \underline{\leqslant} y$.

10. Z trzech powyższych faktów otrzymujemy: $PA \vdash \neg\, \underline{\text{sam}}(\overline{n}, y) \vee \exists z\ (z \underline{\leqslant} y \wedge \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, z))$.

11. Na mocy reguły generalizacji mamy: $PA \vdash \forall y\ (\neg\, \underline{\text{sam}}(\overline{n}, y) \rightarrow \exists z\ (z \underline{\leqslant} y \wedge \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, z)))$.

12. Otrzymaliśmy więc: $PA \vdash ros$, co (łącznie z przypuszczeniem dowodu nie wprost) przeczy założeniu o niesprzeczności PA.

13. Ostatecznie, odrzucamy przypuszczenie dowodu nie wprost i mamy: $PA\ non \vdash \neg\, ros$.

2.11 Lemat Przekątniowy

Oba powyższe twierdzenia (oraz szereg dalszych) można udowodnić, odwołując się do pewnego wyniku dotyczącego *dowodów przekątniowych*. W dalszym ciągu przyjmujemy we wszystkich twierdzeniach założenie: *PA jest niesprzeczna*.

LEMAT PRZEKĄTNIOWY. *Dla dowolnej formuły języka PA $\varphi(x)$ o jednej zmiennej wolnej istnieje zdanie ψ tego języka takie, że: $PA \vdash \psi \equiv \varphi(\overline{\ulcorner \psi \urcorner})$.*

Tak więc, dla każdej własności (liczb) wyrażalnej w PA znajdziemy zdanie ψ, stwierdzające, że jego numer gödlowski $\ulcorner \psi \urcorner$ ma tę własność. Dowód Lematu Przekątniowego:

1. Przypomnijmy, że dla termu α, zmiennej x oraz formuły ϕ mamy:

   (a) Sub($\ulcorner\phi\urcorner, \ulcorner x\urcorner, \ulcorner\alpha\urcorner) = \ulcorner\phi(x/\alpha)\urcorner$ (= numer gödlowski formuły otrzymanej przez podstawienie termu α za zmienną x w formule ϕ).
   (b) Sub jest funkcją rekurencyjną, a więc istnieje co najmniej jedna formuła języka PA, która ją reprezentuje w PA. Niech $\underline{\text{Sub}}(x, y, u, v)$ będzie taką formułą.

2. Niech $\text{Subst}(x, y, z) = \text{Sub}(x, y, \text{num}(z))$ i niech $\underline{\text{Subst}}$ będzie formułą reprezentującą w PA funkcję Subst.

3. Rozważmy formułę $ref(x)$ o postaci: $\forall y\ (\underline{\text{Subst}}(x, \overline{2}, x, y) \rightarrow \varphi(y))$.

4. W powyższym (i dalej) zakładamy, że x to zmienna x_1, y to zmienna x_2, z to zmienna x_3. Wtedy $\ulcorner x\urcorner = \ulcorner x_1\urcorner = 2$.

5. Niech $m = \ulcorner ref(x)\urcorner$.

6. Niech ψ będzie zdaniem $ref(\overline{m})$.

7. Wtedy w PA można udowodnić równoważność następujących zdań (co daje dowód Lematu Przekątniowego):

   (a) ψ
   (b) $ref(\overline{m})$
   (c) $\forall y\ (\underline{\text{Subst}}(\overline{m}, \overline{2}, \overline{m}, y) \rightarrow \varphi(y))$
   (d) $\forall y\ (\underline{\text{Subst}}(\overline{\ulcorner ref(x)\urcorner}, \overline{2}, \overline{m}, y) \rightarrow \varphi(y))$
   (e) $\varphi(\overline{\ulcorner ref(\overline{m})\urcorner})$
   (f) $\varphi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$.

Istniejące na mocy Lematu Przekątniowego zdanie ψ stwierdza samo o sobie, że (jego numer gödlowski) ma własność φ. Precyzyjne sformułowanie tego faktu stało się możliwe dzięki procedurze arytmetyzacji składni. Unikamy przy tym wszelkich niebezpieczeństw, które stwarzają zdania samozwrotne w językach etnicznych. Przypominamy, że np. zdanie:

Zdanie napisane w tej ramce jest fałszywe.

prowadzi do antynomii. Powstaje ona na skutek pomieszania języka przedmiotowego i metajęzyka.

Pokażemy teraz, że I Twierdzenie Gödla jest konsekwencją Lematu Przekątniowego. Niech φ_G będzie zdaniem takim, że $PA \vdash \varphi_G \equiv \neg\, \underline{\text{Tw}}(\overline{\ulcorner\varphi_G\urcorner})$. Zdanie φ_G istnieje na mocy Lematu Przekątniowego.

I TWIERDZENIE GÖDLA. *Niech φ_G będzie określonym powyżej zdaniem. Wtedy:*

1. $PA\ non \vdash \varphi_G$.

2. Jeżeli dla dowolnego zdania ψ *zachodzi implikacja:*

$(*)$ *jeśli* $PA \vdash \underline{Tw}(\overline{\ulcorner \psi \urcorner})$*, to* $PA \vdash \psi$*,*

to $PA\ non \vdash \neg\varphi_G$.

Dowód:

1. Dla dowodu nie wprost punktu 1, przypuśćmy, że $PA \vdash \varphi_G$.
2. Wtedy $PA \vdash \underline{\text{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner})$, a stąd $PA \vdash \neg\varphi_G$.
3. To oznacza, że PA jest sprzeczna, wbrew założeniu.
4. Przypuszczenie $PA \vdash \varphi_G$ trzeba więc odrzucić. Ostatecznie, $PA\ non \vdash \varphi_G$.
5. Dla dowodu nie wprost punktu 2, przypuśćmy, że $PA \vdash \neg\varphi_G$.
6. Wtedy $PA \vdash \neg\neg\ \underline{\text{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner})$, a stąd $PA \vdash \underline{\text{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner})$.
7. Na mocy $(*)$ mamy wtedy $PA \vdash \varphi_G$, wbrew 1.
8. Przypuszczenie dowodu nie wprost zatem odrzucamy i mamy ostatecznie $PA\ non \vdash \neg\varphi_G$.

Warto zauważyć, że:

1. Nie zakładano ω-niesprzeczności PA, a tylko jej niesprzeczność oraz warunek $(*)$.
2. Z ω-niesprzeczności wynika warunek $(*)$.
3. W dowodzie wykorzystywano warunek $(*)$ tylko dla zdania φ_G.
4. Zdanie φ_G ma postać: $\neg\exists x\ \underline{Dow}(x, \overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner})$.
5. Zdanie φ_G jest zatem równoważne zdaniu ogólnemu: $\forall x\ \neg\ \underline{Dow}(x, \overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner})$.
6. Można pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi $PA \vdash \neg\ \underline{Dow}(\overline{n}, \overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner})$.

2.12 II Twierdzenie Gödla

Ponieważ relacja Dow jest rekurencyjna, więc istnieje co najmniej jedna formuła języka PA, która ją mocno reprezentuje. Niech $\underline{\mathrm{Dow}}(x, y)$ będzie taką formułą (o dwóch zmiennych wolnych). Niech $\underline{\mathrm{Tw}}(y)$ będzie formułą $\exists x\ \underline{\mathrm{Dow}}(x, y)$. Wtedy dla dowolnej formuły ψ języka PA: jeśli $PA \vdash \psi$, to $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \psi \urcorner})$.

Warunkami dowodliwości nazywamy następujące trzy warunki, dla dowolnych zdań φ i ψ:

1. (D1) Jeśli $PA \vdash \varphi$, to $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$.
2. (D2) $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \ \rightarrow\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \urcorner})$.
3. (D3) $PA \vdash (\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \wedge \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner})) \rightarrow \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \psi \urcorner})$.

Jak się okazuje, postać formuły mocno reprezentującej relację Tw jest istotna w dowodach niektórych twierdzeń o PA. To samo dotyczy też postaci formuły mocno reprezentującej relację Dow. Nie możemy mocno reprezentować relacji dowodliwości całkiem dowolnie, chcąc otrzymać te twierdzenia. Warunki dowodliwości są właśnie pewnymi ograniczeniami nakładanymi na mocną reprezentację relacji dowodliwości w PA.

Dowodliwość w PA można interpretować jako modalność. Otrzymujemy wtedy pewną logikę modalną, *logikę dowodliwości* (*logikę Gödla-Löba*). Warunki dowodliwości przekładają się na aksjomaty tej logiki.

Jak można *wyrazić* w PA niesprzeczność PA? Wystarczy zapisać, że w PA nie można dowieść sprzeczności. Przez Con_{PA} rozumiemy formułę: $\neg\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{0} \doteq \overline{1} \urcorner})$. Wtedy Con_{PA} wyraża niesprzeczność PA.

II TWIERDZENIE GÖDLA. *(Niedowodliwość niesprzeczności PA w PA). Przy założeniach (D1)–(D3):* $PA\ non \vdash Con_{PA}$.

Pokażemy, że $PA \vdash \varphi_G \equiv Con_{PA}$. Na mocy I Twierdzenia Gödla dostaniemy wtedy: $PA\ non \vdash Con_{PA}$.
Dowód:

1. Przypominamy, że na mocy Lematu Przekątniowego istnieje zdanie φ_G takie, że $PA \vdash \varphi_G \equiv \neg\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner})$ (czyli zdanie gödlowskie, stwierdzające swoją własną niedowodliwość w PA).
2. Ponieważ dla wszystkich ψ mamy: $PA \vdash (\underline{0} \doteq \overline{1} \rightarrow \psi)$, więc $PA \vdash (\underline{0} \doteq \overline{1} \rightarrow \varphi_G)$.
3. Na mocy (D1): $PA \vdash\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{0} \doteq \overline{1} \rightarrow \varphi_G \urcorner})$.

4. Na mocy (D3): $PA \vdash\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{0} \doteq \overline{1} \urcorner}) \rightarrow\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner})$.

5. Przez kontrapozycję: $PA \vdash\ \neg\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \rightarrow \neg\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{0} \doteq \overline{1} \urcorner})$.

6. Z definicji φ_G mamy: $PA \vdash \varphi_G \rightarrow \neg\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner})$.

7. Z powyższego mamy: $PA \vdash \varphi_G \rightarrow \neg\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{0} \doteq \overline{1} \urcorner})$, czyli $PA \vdash \varphi_G \rightarrow Con_{PA}$. Trzeba jeszcze udowodnić implikację odwrotną.

8. Na mocy (D2): (†) $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \rightarrow \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \urcorner})$.

9. Z definicji φ_G mamy: $PA \vdash \varphi_G \rightarrow \neg\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner})$.

10. Przez kontrapozycję: $PA \vdash \neg\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \rightarrow \neg\varphi_G$.

11. Na mocy (D1) oraz (D3) otrzymujemy odpowiednio:

    $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \rightarrow \neg\varphi_G \urcorner})$

    (‡) $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \urcorner}) \rightarrow\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \neg\varphi_G \urcorner})$.

12. Z (†) oraz (‡) mamy: (♡) $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \rightarrow\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \neg\varphi_G \urcorner})$.

13. Mamy także: $PA \vdash \varphi_G \rightarrow (\neg\varphi_G \rightarrow (\varphi_G \wedge \neg\varphi_G))$.

14. Na mocy (D1) oraz (D3) mamy: $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \rightarrow (\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \neg\varphi_G \urcorner}) \rightarrow \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \wedge \neg\varphi_G \urcorner}))$.

15. Mamy więc też: (♣) $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \neg\varphi_G \urcorner}) \rightarrow (\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \rightarrow\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \wedge \neg\varphi_G \urcorner}))$.

16. Podstawiamy w prawie KRZ $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow r))$: $\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \neg\varphi_G \urcorner})$ za p; $\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner})$ za q; $\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \wedge \neg\varphi_G \urcorner})$ za r i otrzymujemy:

    (♠) $PA \vdash (\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \neg\varphi_G \urcorner}) \rightarrow (\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \rightarrow\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \wedge \neg\varphi_G \urcorner}))) \rightarrow ((\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \rightarrow\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \neg\varphi_G \urcorner})) \rightarrow (\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \rightarrow \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \wedge \neg\varphi_G \urcorner})))$

17. Z (♠), (♣) oraz (♡) dostajemy: (♢) $\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \rightarrow\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \wedge \neg\varphi_G \urcorner})$.

18. Ponieważ $PA \vdash (\varphi_G \wedge \neg\varphi_G) \equiv (\underline{0} \doteq \overline{1})$, więc $PA \vdash (\varphi_G \wedge \neg\varphi_G) \rightarrow (\underline{0} \doteq \overline{1})$.

19. Na mocy (D1) i (D3) mamy: $PA \vdash\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \wedge \neg\varphi_G \urcorner}) \rightarrow\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{0} \doteq \overline{1} \urcorner})$.

20. A stąd oraz z (♢) mamy: $PA \vdash\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \rightarrow\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{0} \doteq \overline{1} \urcorner})$.

21. Przez kontrapozycję mamy: $PA \vdash \neg\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{0} \doteq \overline{1} \urcorner}) \rightarrow \neg\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner})$.

22. Na mocy definicji zdania φ_G oraz formuły Con_{PA} otrzymujemy stąd potrzebną implikację: $PA \vdash Con_{PA} \rightarrow \varphi_G$.

23. Udowodniliśmy obie implikacje: $PA \vdash \varphi_G \rightarrow Con_{PA}$ oraz $PA \vdash Con_{PA} \rightarrow \varphi_G$, a więc mamy: $PA \vdash \varphi_G \equiv Con_{PA}$.

24. Ponieważ (I Twierdzenie Gödla) mamy $PA\ non \vdash \varphi_G$, więc mamy również: $PA\ non \vdash Con_{PA}$, co kończy dowód II Twierdzenia Gödla.

Przy założeniach (D1)–(D3) każde zdanie wyrażające swoją własną niedowodliwość jest równoważne zdaniu Con_{PA} wyrażającemu niesprzeczność PA. Tak więc, przy tych założeniach dowolne dwa zdania gödlowskie są dowodliwie równoważne na gruncie PA: jeśli $PA \vdash \varphi \equiv \neg\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$ oraz $PA \vdash \psi \equiv \neg\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$, to $PA \vdash \varphi \equiv \psi$.

2.13 Twierdzenie Löba

TWIERDZENIE LÖBA. *Dla dowolnego zdania φ języka PA następujące warunki są równoważne:*

1. $PA \vdash \underline{Tw}(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \rightarrow \varphi$

2. $PA \vdash \varphi$.

Dowód. Implikacja $2 \Rightarrow 1$ jest oczywista, na mocy aksjomatu $p \rightarrow (q \rightarrow p)$.
Dowód implikacji $1 \Rightarrow 2$:

1. Załóżmy, że $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \rightarrow \varphi$.

2. Na mocy Lematu Przekątniowego istnieje zdanie ψ takie, że: $PA \vdash (\psi \equiv (\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \rightarrow \varphi))$.

3. Na mocy warunków (D1) oraz (D3) mamy:

   $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \ \equiv\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \rightarrow \varphi)\urcorner})$

   $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \rightarrow (\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})\urcorner}) \rightarrow \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}))$.

4. Na mocy warunku (D2) mamy:

   $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \rightarrow \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})\urcorner})$.

5. Korzystamy teraz z Prawa Fregego: $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ i otrzymujemy: $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \rightarrow \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$.

6. Stąd oraz z założenia $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \rightarrow \varphi$ mamy: $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \rightarrow \varphi$.

7. Ponieważ PA dowodzi równoważności ψ z $\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \rightarrow \varphi$, więc $PA \vdash \psi$.

8. Z $PA \vdash \psi$ otrzymujemy, na mocy (D1): $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$.

9. Na mocy reguły odrywania mamy ostatecznie: $PA \vdash \varphi$.

Inny jeszcze dowód Twierdzenia Löba można otrzymać wykorzystując II Twierdzenie Gödla.

Niech ψ_H będzie *zdaniem Henkina* (zdaniem stwierdzającym swoją własną dowodliwość), czyli takim, iż: $PA \vdash \psi_H \equiv \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner\psi_H\urcorner})$. Z Twierdzenia Löba wynika, że zdanie Henkina jest dowodliwe w PA: $PA \vdash \psi_H$. Z Twierdzenia Löba wynika też, że każde dwa zdania Henkina są równoważne na gruncie PA.

2.14 Twierdzenie Tarskiego

TWIERDZENIE TARSKIEGO. *(Niedefiniowalność prawdy arytmetycznej w PA). Nie istnieje formuła $alf(x)$ języka PA taka, że dla dowolnego zdania φ tego języka: $PA \vdash \varphi \equiv alf(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$.*

Dowód:

1. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że istnieje taka formuła alf.

2. Na mocy Lematu Przekątniowego istnieje zdanie ψ takie, że $PA \vdash \psi \equiv \neg\, alf(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$.

3. Ponieważ z przypuszczenia dowodu nie wprost mamy: $PA \vdash \psi \equiv alf(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$, więc otrzymujemy $PA \vdash alf(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \equiv \neg\, alf(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$.

4. To oznacza, że PA jest sprzeczna, wbrew założeniu.

5. Przypuszczenie dowodu nie wprost musimy więc odrzucić.

6. Ostatecznie, nie istnieje taka formuła alf.

Aksjomaty PA są prawdziwe w modelu standardowym $\mathfrak{N}_0$. Wszystkie twierdzenia PA są prawdziwe w modelu standardowym. Konsekwencją Twierdzenia Tarskiego jest zatem to, że nie istnieje formuła alf języka PA taka, iż dla dowolnego zdania φ tego języka: $\mathfrak{N}_0 \models \varphi$ dokładnie wtedy, gdy $\mathfrak{N}_0 \models alf(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$. To z kolei oznacza, że w języku PA nie istnieje definicja zbioru tych zdań rozważanego języka, które są prawdziwe w modelu standardowym.

2.15 Istotna niezupełność arytmetyki PA

Z podanych wyżej twierdzeń wynika, że jeśli arytmetyka PA jest niesprzeczna, to jest: niezupełna oraz nierozstrzygalna.

1. Przez *rekurencyjne rozszerzenie arytmetyki PA* rozumiemy każdą teorię pierwszego rzędu, która jest rozszerzeniem PA o rekurencyjny zbiór aksjomatów i której zbiór numerów gödlowskich symboli pozalogicznych jest rekurencyjny.

2. Teoria T (w której możliwa jest arytmetyzacja składni) jest *istotnie niezupełna*, jeśli T jest (niesprzeczna i) niezupełna oraz każde jej niesprzeczne rozszerzenie rekurencyjne jest niezupełne.

Podane wyżej twierdzenia implikują zatem, że: *Jeśli arytmetyka PA jest niesprzeczna, to jest istotnie niezupełna.*

Twierdzenia Gödla uważa się za najbardziej doniosłe dokonanie w logice XX wieku. Istnieje na jego temat olbrzymia literatura. Na stronie tych wykładów umieszczono kilkadziesiąt plików dotyczących tej problematyki, znalezionych w sieci. Szczególnie polecamy lekturę dwóch monografii:

1. Krajewski, S. 2003. *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne. Od mechanicyzmu do postmodernizmu.* Wydawnictwo Instytutu Filozofii i Socjologii PAN, Warszawa.

2. Murawski, R. 2000[3]. *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

2.16 Twórczość zbioru twierdzeń PA i produktywność zbioru prawd arytmetycznych

Zbiór wszystkich numerów gödlowskich twierdzeń arytmetyki PA jest dość szczególnym zbiorem rekurencyjnie przeliczalnym. Z kolei, zbiór wszystkich prawd arytmetycznych (zdań prawdziwych w modelu standardowym arytmetyki) jest dość szczególnym zbiorem, który nie jest rekurencyjnie przeliczalny. Niektóre pojęcia używane w tym punkcie omówiono w Dodatku A.

Powiemy, że zbiór X jest m-*sprowadzalny* do zbioru Y, gdy istnieje funkcja pierwotnie rekurencyjna f taka, że dla dowolnej n: $n \in X$ dokładnie wtedy, gdy $f(n) \in Y$. Jeśli dodatkowo f jest injekcją, to mówimy, że X jest 1-*sprowadzalny* do Y. Powiemy, że zbiór Y jest *uniwersalny* dla klasy zbiorów $\mathcal{X}$, gdy każdy zbiór

$X \in \mathcal{X}$ jest m-sprowadzalny do zbioru Y. Mówimy, że zbiory X oraz Y są *rekurencyjnie oddzielalne*, gdy istnieje zbiór rekurencyjny Z taki, że: $X \subseteq Z$ oraz $Y \subseteq \omega - Z$ (czyli $Y \cap Z = \emptyset$).

Przypominamy, że wszystkie relacje rekurencyjne (a więc także wszystkie zbiory rekurencyjne) są mocno reprezentowalne w PA. Dla teorii T (która dopuszcza arytmetyzację składni) możemy przeprowadzić takie same konstrukcje, jak dla arytmetyki PA. W szczególności, zdefiniować można (rekurencyjną) relację $\mathrm{Dow}_T(b, a)$ zachodzącą dokładnie wtedy, gdy b jest numerem gödlowskim dowodu (na gruncie T) formuły o numerze gödlowskim a. Dalej, niech:

1. $\mathrm{Tw}_T = \{a : \exists x\ \mathrm{Dow}_T(x, a)\}$.
2. $\mathrm{NegTw}_T = \{a :\ \mathrm{Form}_T(a) \wedge \neg\exists x\ \mathrm{Fr}(a, x) \wedge \langle sn(\neg), a\rangle \in Tw_T\}$.
3. Tw_T jest zatem zbiorem numerów gödlowskich twierdzeń teorii T.
4. NegTw_T jest zbiorem numerów gödlowskich negacji twierdzeń teorii T.

TWIERDZENIE. *Nie istnieje zbiór uniwersalny dla klasy wszystkich zbiorów rekurencyjnych.*
Zarys dowodu:

1. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że Y jest zbiorem uniwersalnym dla klasy wszystkich zbiorów rekurencyjnych.
2. Niech $F(x, y)$ będzie funkcją rekurencyjną, uniwersalną dla klasy wszystkich jednoargumentowych funkcji pierwotnie rekurencyjnych.
3. Niech $X_0 = \{n : F(n, n) \notin Y\}$. Wtedy X_0 jest rekurencyjny.
4. Na mocy przypuszczenia dowodu nie wprost istnieje więc funkcja pierwotnie rekurencyjna f taka, że: $n \in X_0$ dokładnie wtedy, gdy $f(n) \in Y$.
5. Na mocy uniwersalności F istnieje liczba n_0 taka, że dla wszystkich x: $f(x) = F(n_0, x)$.
6. Dla dowolnej n mamy więc:

   $n \in X_0$ dokładnie wtedy, gdy $F(n_0, n) \in Y$.
7. Dla $n = n_0$ mamy w szczególności:

   (a) $n_0 \in X_0$ dokładnie wtedy, gdy $F(n_0, n_0) \in Y$ (na mocy definicji funkcji F).

(b) $n_0 \in X_0$ dokładnie wtedy, gdy $F(n_0, n_0) \notin Y$ (na mocy definicji X_0).

8. Otrzymana sprzeczność każe odrzucić przypuszczenie dowodu nie wprost. Ostatecznie zatem nie istnieje rekurencyjny zbiór uniwersalny dla klasy wszystkich zbiorów rekurencyjnych.

TWIERDZENIE. *Jeśli wszystkie zbiory rekurencyjne są mocno reprezentowalne w T, to zbiory Tw$_T$ oraz NegTw$_T$ nie są rekurencyjnie oddzielalne. W szczególności, zbiór numerów gödlowskich twierdzeń PA oraz negacji twierdzeń PA nie są rekurencyjnie oddzielalne.*
Zarys dowodu:

1. Dla każdego zbioru rekurencyjnego X istnieje formuła $\psi_X(x)$ języka teorii T taka, że dla dowolnej n mamy:
2. $n \in X$ dokładnie wtedy, gdy $T \vdash \psi_X(\overline{n})$,
3. $n \notin X$ dokładnie wtedy, gdy $T \vdash \neg\psi_X(\overline{n})$.
4. To z kolei oznacza, że dla dowolnej n:
   (a) $n \in X$ dokładnie wtedy, gdy $\ulcorner \psi_X(\overline{n}) \urcorner \in \mathrm{Tw}_T$
   (b) $n \notin X$ dokładnie wtedy, gdy $\ulcorner \psi_X(\overline{n}) \urcorner \in \mathrm{NegTw}_T$.
5. Otrzymujemy stąd równoważności:
   (a) $n \in X$ dokładnie wtedy, gdy $\mathrm{Sub}(\ulcorner \psi_X, \ulcorner x \urcorner, \mathrm{num}(n) \urcorner) \in \mathrm{Tw}_T$,
   (b) $n \notin X$ dokładnie wtedy, gdy $\mathrm{Sub}(\ulcorner \psi_X, \ulcorner x \urcorner, \mathrm{num}(n) \urcorner) \in \mathrm{NegTw}_T$.
6. Funkcja $f(n) = \mathrm{Sub}(\ulcorner \psi_X, \ulcorner x \urcorner, \mathrm{num}(n) \urcorner)$ jest pierwotnie rekurencyjna.
7. X jest sprowadzalny (za pomocą f) do Tw$_T$ (a $\omega - X$ jest sprowadzalny do NegTw$_T$), ponieważ:
   (a) $n \in X$ dokładnie wtedy, gdy $f(n) \in \mathrm{Tw}_T$
   (b) $n \notin X$ dokładnie wtedy, gdy $f(n) \in \mathrm{NegTw}_T$.
8. Gdyby istniał rekurencyjny zbiór Y oddzielający zbiory Tw$_T$ i NegTw$_T$, to mielibyśmy:
   (a) jeśli $n \in X$, to $f(n) \in Y$
   (b) jeśli $n \notin X$, to $f(n) \in \omega - Y$.

9. Wtedy: $n \in X$ dokładnie wtedy, gdy $f(n) \in Y$, czyli Y byłby uniwersalny dla klasy wszystkich zbiorów rekurencyjnych, co jest niemożliwe. Ostatecznie więc, Tw_T oraz NegTw_T nie są rekurencyjnie oddzielalne.

Na mocy powyższego twierdzenia możemy stwierdzić, jak złożone są zbiory: numerów gödlowskich twierdzeń oraz numerów gödlowskich negacji twierdzeń danej teorii.

Jeśli w teorii T wszystkie relacje rekurencyjne są mocno reprezentowalne, to zbiory: Tw_T numerów gödlowskich twierdzeń teorii T oraz NegTw_T numerów gödlowskich negacji twierdzeń teorii T nie są rekurencyjne. W szczególności, zbiór numerów gödlowskich twierdzeń arytmetyki PA nie jest rekurencyjny. Podobnie, zbiór numerów gödlowskich negacji twierdzeń arytmetyki PA nie jest rekurencyjny.

Niech $\mathbb{T}$ oznacza zbiór numerów gödlowskich zdań języka PA prawdziwych w modelu standardowym $\mathfrak{N}_0$, zaś $\mathbb{F}$ zbiór numerów gödlowskich zdań języka PA fałszywych w tym modelu. Wiemy, że $\mathrm{Tw}_{PA} \subset \mathbb{T}$ (inkluzja właściwa). Zbiór Tw_{PA} jest rekurencyjnie przeliczalny, ale nie jest rekurencyjny. *A jaki jest zbiór $\mathbb{T}$?*

Mówimy, że zbiór $X \subseteq \omega$ jest:

1. *produktywny*, gdy istnieje funkcja rekurencyjna f taka, że dla wszystkich x, jeśli $W_x \subseteq X$, to $f(x) \in X - W_x$ (tu $(W_x)_{x \in \omega}$ jest standardowym wyliczeniem zbiorów rekurencyjnie przeliczalnych);

2. *twórczy*, gdy X jest rekurencyjnie przeliczalny, a jego dopełnienie $\omega - X$ jest zbiorem produktywnym.

3. *m-zupełny*, gdy X jest rekurencyjnie przeliczalny i każdy rekurencyjnie przeliczalny zbiór A jest m-sprowadzalny do X.

Wprost z definicji wynika, że:

1. Jeśli X jest produktywny, to nie jest rekurencyjnie przeliczalny.

2. Jeśli X jest twórczy, to nie jest rekurencyjny.

Zbiór $W = \{\langle a, m\rangle : \exists n\ (\{a\}(m) \simeq n)\}$ nazywamy *(1-arg.) problemem stopu*. [Tu $\langle\ \rangle$ jest funkcją kodującą ciągi.] Zachodzą następujące fakty:

1. Zbiór W jest rekurencyjnie przeliczalny. Istotnie, wynika to z faktu, że zbiór częściowych obliczeń rekurencyjnych COR jest rekurencyjnie przeliczalny.

2. Zbiór W jest m-zupełny. Istotnie, jeśli A jest dowolnym zbiorem rekurencyjnie przeliczalnym, to jest dziedziną pewnej częściowej funkcji rekurencyjnej $\{a\}$, i wtedy dla funkcji rekurencyjnej $g(m) = \langle a, m \rangle$ mamy: $A = g^{-1}(W)$.

3. Przy okazji: W jest uniwersalny dla klasy wszystkich (1-arg.) relacji semi-rekurencyjnych (w konsekwencji, nie jest rekurencyjny). [Relacja R jest semi-rekurencyjna, gdy dla pewnej relacji rekurencyjnej $Q(x, y)$: $R(x)$ dokładnie wtedy, gdy istnieje y taka, że $Q(x, y)$. Podobnie dla relacji n-arg.]

Zachodzą także następujące twierdzenia:

1. *Zbiór przekątniowy* $\mathbb{K} = \{x : x \in W_x\}$ *jest rekurencyjnie przeliczalny, a nie jest rekurencyjny.*

2. *Zbiór przekątniowy* $\mathbb{K}$ *jest twórczy oraz* m*-zupełny.*

3. *Zbiór* $\overline{\mathbb{K}} = \{x : x \notin W_x\}$ *jest produktywny.*

Mamy bowiem: $a \in \mathbb{K}$ dokładnie wtedy, gdy $\langle a, a \rangle \in W$. Stąd $\mathbb{K}$ jest rekurencyjnie przeliczalny. Gdyby $\mathbb{K}$ był rekurencyjny, to zarówno $\mathbb{K}$ jak i $\overline{\mathbb{K}}$ byłby rekurencyjnie przeliczalny (Twierdzenie Posta). W szczególności, dla pewnej a^* mielibyśmy: $\overline{\mathbb{K}} = W_{a^*}$. Ale wtedy: $a^* \in \mathbb{K} \equiv a^* \in W_{a^*} \equiv a^* \in \overline{\mathbb{K}} \equiv a^* \notin \mathbb{K}$, co daje sprzeczność. Tak więc, $\mathbb{K}$ nie jest rekurencyjny. Dla dowodu 3 wystarczy zauważyć, że dla każdej a, jeśli $W_a \subseteq \overline{\mathbb{K}}$, to $a \in \overline{\mathbb{K}} - W_a$. Funkcja $g(a) = a$ jest rekurencyjna. Dla dowodu, że $\mathbb{K}$ jest m-zupełny niech A będzie dowolnym zbiorem rekurencyjnie przeliczalnym i niech $f(x, y)$ będzie funkcją częściową zdefiniowaną następująco:

1. $f(x, y) \simeq 0$, gdy $x \in A$

2. $f(x, y) \uparrow$, w przeciwnym przypadku.

Wykres f jest semi-rekurencyjny, a więc f jest częściową funkcją rekurencyjną. Niech a będzie jakimś indeksem f. Wtedy dla wszystkich $x \in \omega$ następujące warunki są równoważne:

1. $x \in A$

2. $\{S^1_1(a, x)\}(y) \downarrow$

3. $S^1_1(a, x) \in \mathbb{K}$.

Tak więc, $A \leqslant_m \mathbb{K}$, czyli $\mathbb{K}$ jest m-zupełny. Wreszcie, $\mathbb{K}$ jest twórczy, bo $\overline{\mathbb{K}}$ jest produktywny.

TWIERDZENIE. *Jeśli X jest produktywny oraz m-sprowadzalny do Y, to Y jest produktywny.*

Zarys dowodu:

1. Niech h będzie funkcją produktywną dla X. Dla wszystkich x mamy więc: jeśli $W_x \subseteq X$, to $h(x) \in X - W_x$.

2. Skoro $X \leqslant_m Y$, to istnieje funkcja rekurencyjna f taka, że $X = f^{-1}(Y)$. Niech b będzie indeksem f (wykład 6) oraz niech $g(a) = 2^{3+1} \cdot 3^{1+1} \cdot 5^{a+1} \cdot 7^{b+1}$. Wtedy $g(a) \in PRI$.

3. Wtedy dla wszystkich a mamy $W_{g(a)} = f^{-1}(W_a)$, ponieważ zachodzą równoważności:

   $x \in f^{-1}(W_a) \;\equiv\; f(x) \in W_a \;\equiv\; \{a\}(f(x)) \downarrow \equiv\; \{g(a)\}(x) \downarrow.$

4. Zatem dla każdej a:

   (a) jeśli $W_a \subseteq Y$, to $W_{g(a)} \subseteq X$,
   (b) jeśli $W_{g(a)} \subseteq X$, to $h(g(a)) \in X - W_{g(a)}$,
   (c) jeśli $h(g(a)) \in X - W_{g(a)}$, to $f(h(g(a))) \in Y - W_a$,
   (d) a zatem Y jest produktywny.

Jako wniosek otrzymujemy: *Jeśli X jest m-zupełny, to $\omega - X$ jest produktywny*. Zauważmy bowiem, że jeśli X jest m-zupełny, to $\mathbb{K} \leqslant_m X$, a więc także $\overline{\mathbb{K}} \leqslant_m (\omega - X)$, czyli $\omega - X$ jest produktywny. Nadto, jeśli X jest twórczy i m-sprowadzalny do Y, to Y jest twórczy.

X jest 1-*zupełny*, gdy jest rekurencyjnie przeliczalny i wszystkie zbiory rekurencyjnie przeliczalne są doń 1-sprowadzalne. Powiemy, że X i Y są m-równoważne, gdy $X \leqslant_m Y$ oraz $Y \leqslant_m X$. Powiemy, że X i Y są 1-*równoważne*, gdy X jest 1-sprowadzalny do Y oraz Y jest 1-sprowadzalny do X. Mówimy, że X i Y są *rekurencyjnie izomorficzne*, jeśli istnieje rekurencyjna bijekcja z X na Y. Zachodzą następujące Twierdzenia Myhilla:

1. Następujące warunki są równoważne, dla dowolnego zbioru X:

   (a) X jest twórczy.
   (b) X jest 1-zupełny.
   (c) X jest m-zupełny.

2. Następujące warunki są równoważne, dla dowolnych zbiorów X, Y:

   (a) X i Y są rekurencyjnie izomorficzne.

   (b) X i Y są 1-równoważne.

Wszystkie zbiory twórcze są „podobne” do $\mathbb{K}$, a wszystkie produktywne do $\overline{\mathbb{K}}$, co wynika z twierdzeń Myhilla:

1. *Zbiór X jest produktywny dokładnie wtedy, gdy $\overline{\mathbb{K}}$ jest m-sprowadzalny do X.*

2. *Zbiór X jest twórczy dokładnie wtedy, gdy istnieje rekurencyjna bijekcja z X na $\mathbb{K}$.*

Dowody twierdzeń Myhilla znaleźć można np. w: Bell, Machover 1977, Odifreddi 1989, Rogers 1967, Soare 1987.

TWIERDZENIE. *Zbiór $\mathbb{T}$ jest produktywny. Zbiór $\mathbb{T}$ nie jest rekurencyjnie przeliczalny.*
Zarys dowodu:

1. Zbiór przekątniowy $\mathbb{K}$ jest rekurencyjnie przeliczalny, a zatem istnieje relacja rekurencyjna R taka, że: $x \in \mathbb{K}$ dokładnie wtedy, gdy istnieje y taka, że zachodzi $R(x, y)$.

2. Na mocy Twierdzenia o Reprezentowalności istnieje formuła ψ_R języka PA, która mocno reprezentuje R.

3. Wtedy dla dowolnej n: $n \in \mathbb{K}$ dokładnie wtedy, gdy $\mathfrak{N}_0 \models \exists y\ \psi_R(\overline{n}, y)$.

4. Nadto, dla dowolnej n: $n \in \overline{\mathbb{K}}$ dokładnie wtedy, gdy $\mathfrak{N}_0 \models \neg\exists y\ \psi_R(\overline{n}, y)$.

5. Funkcja $g(n) = \ulcorner\neg\exists y\ \psi_R(\overline{n}, y)\urcorner$ jest (całkowitą) funkcją rekurencyjną.

6. Przypominamy, że $\mathbb{T}$ jest zbiorem numerów gödlowskich formuł prawdziwych w modelu standardowym $\mathfrak{N}_0$.

7. Następujące warunki są równoważne, dla dowolnej n:

   (a) $n \in \overline{\mathbb{K}}$

   (b) $\mathfrak{N}_0 \models \neg\exists y\ \psi_R(\overline{n}, y)$

   (c) $g(n) \in \mathbb{T}$.

8. Pokazaliśmy więc, że $\overline{\mathbb{K}} \leqslant_m \mathbb{T}$ (przez funkcję g). Ponieważ $\overline{\mathbb{K}}$ jest produktywny, więc $\mathbb{T}$ też jest produktywny.

9. W konsekwencji, $\mathbb{T}$ nie jest rekurencyjnie przeliczalny.

Podobnie dowodzimy, że zbiór $\mathbb{F}$ jest produktywny, a więc nie jest rekurencyjnie przeliczalny.

Pokażemy, że jeśli PA jest ω-niesprzeczna, to zbiór Tw$_{PA}$ jest twórczy. Można także udowodnić, że jeśli PA jest niesprzeczna, to zbiór Tw$_{PA}$ jest twórczy. Można też udowodnić, że jeśli PA jest niesprzeczna, to zbiór Tw$_{PA}$ jest m-zupełny. W niektórych dowodach korzysta się z faktu, że w PA są słabo reprezentowalne wszystkie zbiory rekurencyjnie przeliczalne. Dowody tych twierdzeń znaleźć można np. w: Bell, Machover 1977, Cutland 1980, Hinman 2005, Odifreddi 1989, Rogers 1967, Soare 1987.

Powtórzmy: zbiór przekątniowy $\mathbb{K}$ jest rekurencyjnie przeliczalny, a zatem istnieje relacja rekurencyjna R taka, że: $x \in \mathbb{K}$ dokładnie wtedy, gdy istnieje y taka, że zachodzi $R(x, y)$. Na mocy Twierdzenia o Reprezentowalności istnieje formuła ψ_R języka PA, która mocno reprezentuje R.

LEMAT 1. *Jeśli $n \in \mathbb{K}$, to $PA \vdash \exists y\ \psi_R(\overline{n}, y)$.*

Niech bowiem $n \in \mathbb{K}$. Wtedy dla pewnej m zachodzi $R(n, m)$. Na mocy mocnej reprezentowalności R przez ψ_R mamy: $PA \vdash \psi_R(\overline{n}, \overline{m})$. Na mocy reguł FOL: $PA \vdash \exists y\ \psi_R(\overline{n}, y)$.

Dowód implikacji w drugą stronę wykorzystuje założenie o ω-niesprzeczności PA:

LEMAT 2. *Załóżmy, że PA jest ω-niesprzeczna. Wtedy: jeśli $PA \vdash \exists y\ \psi_R(\overline{n}, y)$, to $n \in \mathbb{K}$.*

Przypuśćmy bowiem, dla dowodu nie wprost, że $n \notin \mathbb{K}$. Wtedy dla każdej m: *nie* zachodzi $R(n, m)$. Na mocy mocnej reprezentowalności R przez ψ_R mamy, dla wszystkich m: $PA \vdash \neg\psi_R(\overline{n}, \overline{m})$. Na mocy ω-niesprzeczności PA mamy: $PA\ non \vdash \exists y\ \neg\neg\psi_R(\overline{n}, y)$, czyli $PA\ non \vdash \exists y\ \psi_R(\overline{n}, y)$. To daje sprzeczność z założeniem, że $PA \vdash \exists y\ \psi_R(\overline{n}, y)$. Przypuszczenie dowodu nie wprost trzeba więc odrzucić. Ostatecznie, $n \in \mathbb{K}$.

TWIERDZENIE. *Jeśli PA jest ω-niesprzeczna, to zbiór Tw$_{PA}$ numerów gödlowskich twierdzeń PA jest twórczy.*
Zarys dowodu:

1. Zbiór Tw$_{PA}$ jest rekurencyjnie przeliczalny, jak już wiemy.

2. Na mocy lematów 1 i 2 mamy: $n \in \mathbb{K}$ dokładnie wtedy, gdy $PA \vdash \exists y\ \psi_R(\overline{n}, y)$, gdzie relacja R i formuła ψ_R zostały określone powyżej.

3. Niech $h(n) = \ulcorner \exists y\ \psi_R(\overline{n}, y) \urcorner$. Wtedy funkcja h jest rekurencyjna.

4. Ponadto, mamy: $n \in \mathbb{K}$ dokładnie wtedy, gdy $h(n) \in \mathrm{Tw}_{PA}$.

5. Tak więc, zbiór $\mathbb{K}$ jest m-sprowadzalny do Tw_{PA}.

6. Ponieważ $\mathbb{K}$ jest twórczy, więc także Tw_{PA} jest twórczy.

Zbiory produktywne to zbiory, które *nie są rekurencyjnie przeliczalne „w sposób efektywny"*. Jeśli bowiem X jest produktywny, to istnieje funkcja rekurencyjna f taka, że dla każdego z rekurencyjnie przeliczalnych kandydatów W_x na bycie zbiorem X (czyli dla warunku $W_x \subseteq X$) znajdujemy liczbę $g(x)$ taką, że $g(x) \in X - W_x$, czyli element, którym X różni się od W_x.

Zbiory twórcze to zbiory rekurencyjnie przeliczalne, które *nie są rekurencyjne „w sposób efektywny"*. Jeśli bowiem X jest twórczy (a więc jego dopełnienie $\omega - X$ jest produktywne), to — ponieważ $\omega - X$ nie jest rekurencyjnie przeliczalny „w sposób efektywny" – nie ma szans na skorzystanie z Twierdzenia Posta (zbiór A jest rekurencyjny dokładnie wtedy gdy A oraz $\omega - A$ są rekurencyjnie przeliczalne).

Własność twórczości zbioru twierdzeń wykorzystuje się w dowodach nierozstrzygalności teorii.

2.17 Przykłady zdań prawdziwych, acz niedowodliwych w PA

Choć zdanie nierozstrzygalne Gödla podane jest w sposób konstruktywny, to uważa się, iż nie jest ono interesujące dla „normalnej" matematyki, gdyż ma „treść metatmatematyczną", a nie dotyczy problemów, którymi zajmujemy się w „zwykłej" teorii liczb. Jednym z problemów jest zatem poszukiwanie zdań nierozstrzygalnych na gruncie PA, które miałyby niebanalną treść matematyczną. Inny problem to poszukiwanie zdań nierozstrzygalnych metodami semantycznymi (bez odwołania się do procedury arytmetyzacji). Aby wykazać niezupełność PA wystarczy znaleźć zdanie ψ oraz modele $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ dla PA takie, że: $\mathfrak{A} \models \psi$ oraz $\mathfrak{B} \models \neg\psi$.

Dla $X \subseteq \omega$ przez $[X]^n$ oznaczamy rodzinę wszystkich n-elementowych podzbiorów X. *Funkcją kolorującą* nazywamy każdą funkcję $C : [X]^n \to \{0, 1, 2, \ldots, c-1\}$. *Zbiorem jednorodnym* (względem C) nazywamy taki podzbiór $Y \subseteq X$, dla którego funkcja C ma wartość stałą na $[Y]^n$. Zachodzą następujące twierdzenia:

1. NIESKOŃCZONE TWIERDZENIE RAMSEYA. *Niech $n, c > 0$. Dla dowolnej funkcji kolorującej $C : [\omega]^n \to \{0, 1, 2, \ldots, c-1\}$ istnieje nieskończony zbiór jednorodny względem C.* [Ma dowód w teorii mnogości.]

2. SKOŃCZONE TWIERDZENIE RAMSEYA. *Niech $m, c > 0$ oraz $s \geqslant n + 1$. Istnieje liczba $R(s, c, n)$ taka, że dla każdej $r \geqslant R(s, c, n)$, każdego zbioru*

r-elementowego X i każdej funkcji kolorującej $C : [X]^n \to \{0, 1, 2, \ldots, c-1\}$ istnieje zbiór jednorodny względem C o s elementach. [To twierdzenie ma dowód w PA.]

Zbiór $X \subseteq \omega$ jest *względnie duży*, gdy jego moc jest niemniejsza od jego najmniejszego elementu. *Zdanie Parisa-Harringtona* to zdanie φ_0 stwierdzające, że: dla dowolnych s, n, c istnieje liczba $H(s, n, c)$ taka, że dla wszystkich $h \geqslant H(s, n, c)$, dowolnego X o mocy h i dowolnej funkcji kolorującej $C : [X]^n \to \{0, 1, 2, \ldots, c-1\}$ istnieje względnie duży zbiór Y jednorodny względem C, mający co najmniej s elementów.

TWIERDZENIE PARISA-HARRINGTONA.

1. *Zdanie φ_0 jest prawdziwe w modelu standardowym $\mathfrak{N}_0$ (a zatem PA non $\vdash \neg\varphi_0$).*

2. *Zdanie φ_0 jest niezależne od PA, czyli PA non $\vdash \varphi_0$.*

Dowód tego twierdzenia wykracza poza ramy niniejszego wykładu.

Reprezentacją liczby m przy zasadzie n nazywamy przedstawienie liczby m jako sumy potęg liczby n tak, aby użyte wykładniki były mniejsze bądź równe n. *Ciągiem Goodsteina dla liczby m* nazywamy ciąg $(m_k)_{k\in\omega}$ taki, że:

1. $m_0 = m$, $m_k = G_{k+1}(m_{k-1})$ dla $k > 0$, gdzie funkcje $G_n(m)$ definiujemy następująco:

2. jeśli $m = 0$, to $G_n(m) = 0$;

3. jeśli $m \neq 0$, to $G_n(m)$ jest liczbą otrzymaną przez zastąpienie w reprezentacji liczby m przy zasadzie n liczby n przez liczbę $n + 1$ i odjęcie 1.

Rozważmy przykłady:

1. Reprezentacją 35 przy zasadzie 2 jest: $2^{2^2+1} + 2^1 + 2^0$.

2. Reprezentacją 266 przy zasadzie 2 jest: $2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1$.

Ciąg Goodsteina dla liczby 3 wygląda następująco:

1. $m_0 = 3 = 2^1 + 1$

2. $m_1 = G_2(m_0) = (3^1 + 1) - 1 = 3^1$ (zamieniliśmy 2 na 3)

3. $m_2 = G_3(m_1) = 4^1 - 1 = 3$ (zamieniliśmy 3 na 4)

4. $m_3 = G_4(m_2) = 3 - 1 = 2$ (tu nie ma 4, więc nie można zmienić 4 na 5)

5. $m_4 = G_5(m_3) = 2 - 1 = 1$ (tu nie ma 5)

6. $m_5 = G_6(m_4) = 1 - 1 = 0$ (tu nie ma 6)

7. $m_n = 0$ dla wszystkich $n \geqslant 5$.

Tradycyjnie, rozważmy jeszcze liczbę 266:

1. $m_0 = 266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1$

2. $m_1 = G_2(m_0) = (3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3^1) - 1 = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3^1 + 2 \approx 10^{38}$

3. $m_2 = G_3(m_1) = (4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 2) - 1 = 4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1 \approx 10^{616}$

4. $m_3 = G_4(m_2) = (5^{5^{5+1}} + 5^{5+1} + 1) - 1 = 5^{5^{5+1}} + 5^{5+1} \approx 10^{10000}$

5. $\ldots$

Choć ciągi Goodsteina początkowo „rosną bardzo szybko”, to jednak każdy taki ciąg ma od pewnego miejsca wszystkie wyrazy równe 0. Dla $m_0 = 4$ mamy $m_k = 0$ od $k = 3 \cdot 2^{402653211}$.

Zdaniem Parisa-Kirby'ego nazwiemy zdanie φ_1 o postaci: $\forall m \exists k\ m_k \doteq 0$.

Twierdzenie Parisa-Kirby'ego.

1. Zdanie φ_1 jest prawdziwe w modelu standardowym $\mathfrak{N}_0$ (a zatem $PA\ non \vdash \neg\varphi_1$).

2. Zdanie φ_1 jest niezależne od PA, czyli $PA\ non \vdash \varphi_1$.

Funkcja $g(m) = \mu k\ (m_k = 0)$ jest całkowita, ale w PA nie można tego dowieść. Dowód tego twierdzenia również wykracza poza ramy niniejszego wykładu. Zauważmy, że zdania φ_0 i φ_1 mają (niebanalną) treść matematyczną: pierwsze dotyczy kombinatoryki, drugie teorii liczb.

Twierdzenie Kruskala, głoszące, że zbiór drzew skończonych znakowanych symbolami dobrze (częściowo) uporządkowanego alfabetu sam jest dobrze (częściowo) uporządkowany, ma (podaną przez Friedmana) wersję, która nie jest dowodliwa w PA.

Niech $\phi(\overline{n})$ będzie zdaniem (które można wyrazić w języku PA): Istnieje m taka, że jeśli $T_1, \ldots, T_m$ jest skończonym ciągiem drzew, gdzie T_k ma $n+k$ wierzchołków, to dla pewnych i oraz j takich, że $i < j$ mamy: $T_i \sqsubseteq T_j$ (gdzie $\sqsubseteq$ jest stosownie określonym porządkiem na zbiorze drzew). Twierdzenie Kruskala głosi, że:

1. Dla każdej n: $PA \vdash \phi(\overline{n})$.
2. $PA\ non \vdash \forall x\ \phi(x)$.
3. Niech $f(n)$ = długość najkrótszego dowodu $\phi(\overline{n})$ w PA. Wtedy f rośnie szybciej niż funkcja Ackermanna.

Tak więc, mamy przykłady twierdzeń (nie tylko o treści metamatematycznej), o których wiemy, iż są prawdziwe, lecz niedowodliwe w PA. Dowody tych twierdzeń wykorzystują zatem pewne metody niefinitarne. W szczególności, dowody pewnych własności obiektów *finitarnych* (liczby, skończone ciągi liczb) wymagają środków, które istotnie wykraczają poza metody dowodowe arytmetyki PA.

2.18 Niestandardowy model arytmetyki

Skoro arytmetyka nie jest kategoryczna (ani zupełna), to jak wyglądają jej modele różne od modelu standardowego, nieizomorficzne z nim? Postaramy się teraz pokazać przykłady modeli *niestandardowych* PA, czyli nieizomorficznych z modelem standardowym.

PROSTY PRZYKŁAD. Wykorzystamy twierdzenie o zwartości. Dodajemy do języka PA nową stałą c i rozważamy zbiór zdań:

$$\Gamma = \{\neg c \doteq \overline{n} : n \in \omega\},$$

gdzie $\doteq$ jest predykatem identyczności, $\overline{n}$ jest liczebnikiem nazywającym liczbę n, a ω jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych. Wtedy każdy skończony podzbiór tego zbioru ma model: wystarczy jako interpretację stałej c wybrać odpowiednio dużą liczbę. Na mocy twierdzenia o zwartości, cały zbiór Γ również ma model. W modelu tym interpretacja stałej c jest różna od każdej liczby naturalnej, a więc jest to model niestandardowy.

CIEKAWSZY PRZYKŁAD. Słuchacze mogą być zniesmaczeni poprzednim przykładem: to tylko jakieś sztuczki z językiem, wyciągasz z kapelusza jakąś obcą stałą, nie lubimy tego. Podamy teraz nieco bardziej skomplikowaną konstrukcję (będącą szczególnym przypadkiem konstrukcji *ultraproduktu*, pochodzącej od Thoralfa Skolema (1933), Edwina Hewitta (1948) i Jerzego Łosia (1949)). Rezygnujemy przy tym z formalnego, w pełni precyzyjnego jej przedstawienia. Mocno wierzę, że słuchacze potrafią – czyniąc aktywnym ów zmysł percepcji wspomniany na początku wykładu – wyobrazić sobie tę konstrukcję, bez zapełniania czterech tablic skomplikowanymi wzorami. Opieramy się na przedstawieniu konstrukcji modelu niestandardowego w książce Andrzeja Grzegorczyka *Zarys arytmetyki teoretycznej* (Grzegorczyk 1971).

Rozważmy ogół wszystkich funkcji (jednoargumentowych) ze zbioru wszystkich liczb naturalnych ω w ten zbiór. Ze szkoły znasz te funkcje: nazywano je tam *ciągami* (o wartościach będących liczbami naturalnymi). Wybierzmy teraz z tego ogółu *funkcje definiowalne arytmetycznie*, czyli takie funkcje, których definicje można zapisać w arytmetyce elementarnej dodawania i mnożenia. Niech ich ogół to zbiór *df*. Podobnie, niech DF będzie ogółem *zbiorów definiowalnych arytmetycznie*, czyli takich zbiorów (liczb naturalnych, relację należenia do których można zdefiniować w arytmetyce elementarnej dodawania i mnożenia). Zachodzą następujące fakty:

1. Zbiór DF jest *ciałem zbiorów*, czyli zawiera jako swój element całe uniwersum oraz jest domknięty na operacje sumy, przekroju i różnicy.

2. Wszystkie zbiory skończone są elementami DF. W konsekwencji, także wszystkie zbiory *koskończone* (czyli takie, których dopełnienia są skończone) są elementami DF.

3. Przez podstawienie funkcji definiowalnych do formuły arytmetycznej można zdefiniować jedynie zbiory arytmetycznie definiowalne.

4. Zbiór DF jest przeliczalny. Także zbiór *df* jest przeliczalny. A zatem wszystkie funkcje z *df* ustawić można w jeden ciąg $f_0, f_1, f_2, \ldots$ (wykorzystując np. kodowanie formuł definiujących te funkcje).

Filtrem w ciele DF nazywamy każdą rodzinę D zbiorów, spełniającą następujące warunki:

1. Zbiór ω wszystkich liczb naturalnych należy do D.

2. Przekrój dowolnych dwóch zbiorów należących do D również należy do D.

3. Nadzbiór zbioru należącego do D również należy do D.

O filtrze D mówimy, że jest:

1. *właściwy*, gdy zbiór pusty nie jest jego elementem;

2. *niegłówny*, gdy jego przekrój (przekrój wszystkich jego elementów) nie jest jego elementem;

3. *pierwszy*, gdy dla dowolnego zbioru arytmetycznie definiowalnego X, albo X, albo jego dopełnienie jest elementem D.

Filtry pierwsze to filtry *maksymalne* (ze względu na relację inkluzji). Nazywamy je także *ultrafiltrami*. Nie każdy filtr właściwy i niegłówny jest filtrem pierwszym, ale (w danym ciele zbiorów) każdy taki filtr można rozszerzyć do filtru pierwszego.

Intuicyjnie, każdy filtr właściwy i niegłówny to rodzina „dużych" podzbiorów uniwersum. Proszę przeczytać definicję filtru właściwego zastępując słowa „jest elementem filtru" przez „jest dużym podzbiorem uniwersum".

Zachodzą następujące fakty:

1. Rodzina $\mathbb{D}_0$ wszystkich zbiorów koskończonych jest właściwym filtrem niegłównym w ciele DF.

2. Istnieje w ciele DF filtr pierwszy, właściwy i niegłówny $\mathbb{D}$ zawierający rodzinę wszystkich zbiorów koskończonych $\mathbb{D}_0$.

Możemy przystąpić do obiecanej konstrukcji modelu niestandardowego. W zbiorze df określamy relację $\sim$:

$$f \sim g \;\equiv\; \{i \in \omega : f(i) = g(i)\} \in \mathbb{D}.$$

Jest to relacja równoważności. Zbiór jej wszystkich klas abstrakcji oznaczmy przez N^*. Będzie to uniwersum naszego modelu. Tradycyjnie, klasę abstrakcji funkcji f (względem relacji $\sim$) będziemy oznaczali przez $[f]$.

Intuicyjnie, jeśli dwie funkcje różnią się wartościami jedynie na skończonej liczbie argumentów, to zachodzi między nimi relacja $\sim$. A jeśli np. różnią się na argumentach nieparzystych, a są równe na argumentach parzystych? Cóż, wtedy wszystko zależy od tego, czy zbiór wszystkich liczb parzystych należy do (nieefektywnie konstruowanego) ultrafiltru $\mathbb{D}$. Zbiór wszystkich liczb parzystych należy do DF, a więc albo on, albo jego dopełnienie należy do $\mathbb{D}$.

Zdefiniujmy dwa elementy wyróżnione modelu:

1. $0^* = [0']$, gdzie $0'$ jest funkcją stałą, przyjmującą wartość 0 dla każdego argumentu.

2. $1^* = [1']$, gdzie $1'$ jest funkcją stałą, przyjmującą wartość 1 dla każdego argumentu.

Zdefiniujemy operacje dodawania i mnożenia w tym modelu. Najpierw, niech $\oplus$ oraz $\odot$ będą operacjami dodawania funkcji „po współrzędnych", czyli:

1. $(f \oplus g)(n) = f(n) + g(n)$, dla wszystkich n;

2. $(f \odot g)(n) = f(n) \cdot g(n)$, dla wszystkich n.

Wtedy operacje dodawania $+^*$ oraz mnożenia $\cdot^*$ w uniwersum N^* określamy następująco:

1. $[f] +^* [g] = [f \oplus g]$
2. $[f] \cdot^* [g] = [f \odot g]$.

Definicje te są poprawne, tj. nie zależą od wyboru reprezentantów z klas abstrakcji. Operację następnika S^* możemy zdefiniować wykorzystując operację $+^*$ oraz element wyróżniony 1^*: $S^*([f]) = [f] +^* 1^*$. Również ta definicja jest poprawna.

Zachodzi twierdzenie, którego z niecierpliwością wypatrują słuchacze:

- Układ $\mathfrak{N}^* = \langle N^*, S^*, +^*, \cdot^*, 0^* \rangle$ jest niestandardowym modelem arytmetyki PA.

Dowód faktu, że $\mathfrak{N}^*$ jest modelem PA wykorzystuje twierdzenie Łosia. Pokażemy, że model $\mathfrak{N}^*$ jest niestandardowy. *Elementami standardowymi* modelu są klasy abstrakcji funkcji stałych (o tej samej wartości dla *wszystkich* argumentów). Uniwersum N^* zawiera zatem *część standardową*, złożoną z klas $0^* = [0'], 1^* = [1'], 2^* = [2'], 3^* = [3'], \ldots, n^* = [n'], \ldots$, gdzie dla każdej n: $n'(i) = n$ dla wszystkich i.

Niech teraz J będzie funkcją *identycznościową*, czyli $J(i) = i$ dla wszystkich argumentów i. Pokażemy, że element $J^* = [J]$ jest niestandardowy, czyli różny od wszystkich elementów standardowych.

Określamy ciąg funkcji h_n (wyznaczających pewne elementy niestandardowe): $h_n(i) = i \dot{-} n$ (gdzie $\dot{-}$ jest operacją odejmowania liczb naturalnych, określoną w znany sposób). Wprost z definicji otrzymujemy równość:

$$\forall i > n \ (h_n(i) + n'(i) = J(i)).$$

Równość ta implikuje, że:

$$[h_n] +^* [n'] = [J] = J^*.$$

W konsekwencji, w modelu $\mathfrak{N}^*$ prawdziwy jest warunek:

$$\forall n \in \omega \exists X \in N^* \ (J^* = n^* +^* X).$$

Można teraz w naturalny sposób określić relację $\leqslant$:

$$x \leqslant y \ \equiv \ \exists z \in \omega \ (y = x + z).$$

Ma ona swój odpowiednik $\leqslant^*$ w uniwersum modelu niestandardowego $\mathfrak{N}^*$. Z powyższych równości otrzymujemy wtedy:

$$\forall n \in \omega \ (n^* \leqslant^* J^*).$$

A to oznacza, że element J^* jest większy od wszystkich elementów standardowych. Istotnie więc model $\mathfrak{N}^*$ nie jest izomorficzny z modelem standardowym $\mathfrak{N}_0$.

Wszystkie przeliczalne modele niestandardowe arytmetyki PA mają ten sam *typ porządkowy*, a mianowicie typ $\omega + (\omega^* + \omega) \cdot \eta$. Jest to porządek liniowy, w którym najpierw występuje kopia zbioru wszystkich liczb naturalnych, a potem tyle kopii zbioru wszystkich liczb całkowitych, ile jest liczb wymiernych. Zbudowany powyżej model niestandardowy również ma więc ten typ porządkowy. Części standardowej modelu $\mathfrak{N}^*$ nie możemy zdefiniować „wewnątrz" tego modelu, możemy to uczynić jedynie w metajęzyku.

Model standardowy $\mathfrak{N}_0$ jest elementarnie równoważny z modelem niestandardowym $\mathfrak{N}^*$, choć modele te nie są izomorficzne. Tak więc, w ramach logiki pierwszego rzędu, modele te są nieodróżnialne semantycznie.

Dla modeli niestandardowych arytmetyki PA zachodzi następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE TENNENBAUMA. Żaden niestandardowy model arytmetyki PA nie jest rekurencyjny.

Mówiąc w uproszczeniu, model $\mathfrak{M} = \langle M, S^{\mathfrak{M}}, +^{\mathfrak{M}}, \cdot^{\mathfrak{M}}, 0^{\mathfrak{M}} \rangle$ (o tej samej sygnaturze co model standardowy) dla PA jest *rekurencyjny*, jeśli możemy określić w uniwersum modelu standardowego $\mathfrak{N}_0$ funkcje rekurencyjne $S^{\mathfrak{N}_0}, +^{\mathfrak{N}_0}, \cdot^{\mathfrak{N}_0}$ oraz liczbę $0^{\mathfrak{N}_0}$ w taki sposób, że $\mathfrak{M} = \langle M, S^{\mathfrak{M}}, +^{\mathfrak{M}}, \cdot^{\mathfrak{M}}, 0^{\mathfrak{M}} \rangle$ oraz $\mathfrak{N}_0 = \langle \omega, S^{\mathfrak{N}_0}, +^{\mathfrak{N}_0}, \cdot^{\mathfrak{N}_0}, 0^{\mathfrak{N}_0} \rangle$ są izomorficzne. Twierdzenie Tennenbauma głosi zatem, że model standardowy jest wyróżniony ze względu na fakt, iż tylko w nim *obie* operacje — dodawanie i mnożenie — są rekurencyjne. Por. cytowaną monografię Grzegorczyka (s. 262):

> Można ogólnie dowieść, że definicja modelu niestandardowego dla dodawania i mnożenia nie może mieć prostej (rekurencyjnej) postaci arytmetycznej, ale w arytmetycznej definicji modelu musi występować kilka kwantyfikatorów liczbowych.

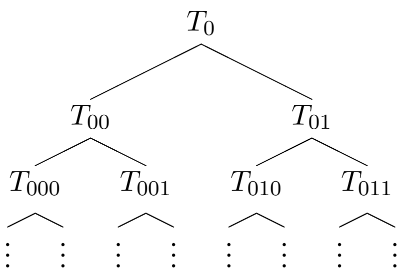
Konstrukcja przedstawiona w tym punkcie może być także uogólniona na całkiem dowolne ciała zbiorów oraz ultrafiltry niegłówne. W istocie, konstrukcja *ultraproduktu* jest jedną z najważniejszych w teorii modeli.

Niestandardowe liczby naturalne pozwalają *kodować* nieskończone zbiory liczb naturalnych. Ponadto, skoro mamy matematyczny odpowiednik wielkości liczbowej *nieskończenie dużej*, to otrzymać możemy także taki odpowiednik dla wielkości liczbowej *nieskończenie małej*, a ten fakt ma podstawowe znaczenie np. w *analizie matematycznej*, gdzie o takich wielkościach mówimy.

Przypomnijmy jeszcze jedną znaną konstrukcję. Zbudujemy kontinuum rozszerzeń arytmetyki PA. Niech $T_0 = PA$ i niech ψ_0 będzie dowolnym zdaniem nierozstrzygalnym w T_0. Przyjmujemy: $T_{00} = PA \cup \{\psi_0\}$ oraz $T_{01} = PA \cup \{\neg\psi_0\}$. Dla dowolnego skończonego ciągu o wyrazach 0 i 1 niech:

1. $T_{\sigma 0} = T_\sigma \cup \{\psi_\sigma\}$
2. $T_{\sigma 1} = T_\sigma \cup \{\neg\psi_\sigma\}$.

Otrzymujemy w ten sposób następujące nieskończone drzewo dwójkowe rozszerzeń PA:



Drzewo to ma kontinuum ($2^{\aleph_0}$) gałęzi. Na mocy TWIERDZENIA O ZWARTOŚCI suma teorii z każdej gałęzi jest niesprzeczna (przy założeniu o niesprzeczności PA). Z kolei, każda z tych sum ma model przeliczalny, na mocy DOLNEGO TWIERDZENIA LÖWENHEIMA-SKOLEMA. Żadne dwa z tych modeli nie są elementarnie równoważne, na mocy konstrukcji powyższego drzewa.

Jeśli rozpoczniemy konstrukcję od zdania ψ_0 równego $Con(PA)$, a kolejne ψ_α też będą wyrażały niesprzeczność T_α, to modelem „najbardziej lewej" gałęzi tego drzewa będzie model standardowy $\mathfrak{N}_0$, pozostałe gałęzie będą miały modele niestandardowe. Każde zdanie o postaci $\neg Con(T_\alpha)$ będzie bowiem miało numer gödlowski, który jest liczbą niestandardową w odnośnym modelu. Tak więc, model standardowy jest tu wyróżniony przez pewną własność *metamatematyczną*.

2.19 Teorie rozstrzygalne i teorie nierozstrzygalne

Rozważamy teorie pierwszego rzędu T w językach takich, że zbiór numerów gödlowskich stałych pozalogicznych T jest rekurencyjny. Język teorii T oznaczamy przez $L(T)$. Definiujemy:

1. Teoria T_2 w języku $L(T_2)$ jest *rozszerzeniem* teorii T_1 w języku $L(T_1)$, gdy każdy aksjomat teorii T_1 jest twierdzeniem teorii T_2. Rozszerzenie takie nazywamy prostym, gdy $L(T_1) = L(T_2)$. Jeśli T_2 jest rozszerzeniem T_1, to T_1 nazywamy *podteorią* T_2.

2. T jest *istotnie nierozstrzygalna*, gdy jest nierozstrzygalna oraz każde jej niesprzeczne rozszerzenie proste jest nierozstrzygalne.

3. T jest *dziedzicznie nierozstrzygalna*, gdy każda jej podteoria T' taka, że $L(T) = L(T')$ jest nierozstrzygalna.

4. Struktura relacyjna $\mathfrak{A}$ jest *mocno nierozstrzygalna*, gdy każda teoria T taka, że $\mathfrak{A} \models T$ jest nierozstrzygalna.

5. T jest *mocno nierozstrzygalna*, gdy jest niesprzeczna i każdy jej model jest mocno nierozstrzygalny.

Poniżej podajemy (bez dowodów) wybrane fakty dotyczące teorii rozstrzygalnych oraz teorii nierozstrzygalnych, korzystając z ich przedstawienia w monografii Murawski 2000:

1. Arytmetyka PA jest istotnie nierozstrzygalna.

2. Każda teoria niesprzeczna, w której mocno reprezentowane są wszystkie zbiory rekurencyjne jest istotnie nierozstrzygalna.

3. Model standardowy PA jest mocno nierozstrzygalny.

4. Arytmetyka PA jest mocno nierozstrzygalna.

5. Jeśli T jest niesprzeczna, zupełna i aksjomatyzowalna, to T jest rozstrzygalna.

6. Jeśli T jest niesprzeczna, aksjomatyzowalna i nierozstrzygalna, to jest niezupełna.

7. Dla każdej teorii rozstrzygalnej i niezupełnej istnieje jej rozszerzenie rozstrzygalne, niesprzeczne i zupełne.

8. Jeśli T jest aksjomatyzowalna, to następujące warunki są równoważne:

   (a) T jest istotnie nierozstrzygalna.

   (b) T jest niesprzeczna i każde jej niesprzeczne i aksjomatyzowalne rozszerzenie jest niezupełne.

(c) T jest niesprzeczna i żadne jej niesprzeczne i zupełne rozszerzenie nie jest aksjomatyzowalne.

9. Jeśli PA jest niesprzeczna, to żadne jej niesprzeczne i zupełne rozszerzenie nie jest aksjomatyzowalne.
10. Struktura $\mathfrak{A}$ jest mocno nierozstrzygalna dokładnie wtedy, gdy jej teoria $Th(\mathfrak{A})$ jest dziedzicznie nierozstrzygalna.
11. Jeśli T ma model nierozstrzygalny, to T jest dziedzicznie nierozstrzygalna.
12. Każda teoria mocno nierozstrzygalna jest dziedzicznie nierozstrzygalna.

2.19.1 Teorie rozstrzygalne: przykłady

Metody dowodzenia rozstrzygalności teorii:

1. metoda eliminacji kwantyfikatorów,
2. metoda teoriomodelowa,
3. metoda interpretacji.

Wykazanie rozstrzygalności teorii wcale nie przesądza o tym, iż przestaje ona być interesująca (w tym sensie, że dowodzenie jej twierdzeń okazuje się czysto mechanicznym procesem). Znane metody rozstrzygania mają dużą złożoność obliczeniową. Jednym z najważniejszych problemów współczesnej informatyki teoretycznej jest problem $P = NP$, czyli pytanie o to, czy klasa funkcji obliczalnych za pomocą wielotaśmowych deterministycznych maszyn Turinga jest równa klasie funkcji obliczalnych za pomocą wielotaśmowych niedeterministycznych maszyn Turinga.

Metodą eliminacji kwantyfikatorów pokazać można, że np. następujące teorie są rozstrzygalne:

1. Teoria struktury $(\omega, s, +, 0)$.
2. Teoria struktury $(\omega, s, 0)$.
3. Teoria struktury $(\omega, s, \cdot, 0)$.
4. Elementarna teoria identyczności.
5. Teoria skończenie wielu zbiorów.

6. Teoria porządku dyskretnego.
7. Teoria porządku liniowego liczb wymiernych.
8. Teoria ciał algebraicznie domkniętych.
9. Teoria algebr Boole'a.
10. Teoria liczb rzeczywistych.

Twierdzenie Łosia-Vaughta głosi, że jeśli teoria T ma tylko modele nieskończone i jest kategoryczna w pewnej mocy nieskończonej, to T jest zupełna. *Metodą teoriomodelową* pokazano, że np. następujące teorie są rozstrzygalne:

1. Teoria przeliczalnego gęstego liniowego porządku bez końców.
2. Teoria ciał algebraicznie domkniętych o danej charakterystyce.
3. Teoria wszystkich ciał skończonych.
4. Teoria ciał domkniętych w sensie rzeczywistym.
5. Teoria zbiorów liniowo uporządkowanych.
6. Teoria grup abelowych.

Metoda interpretacji. Dana jest rozstrzygalna teoria T_1, badamy czy T_2 jest rozstrzygalna. Określamy rekurencyjne odwzorowanie f formuł z $L(T_2)$ na formuły z $L(T_1)$ takie, że: $T_1 \vdash f(\psi)$ dokładnie wtedy, gdy $T_2 \vdash \psi$. To daje metodę rozstrzygania dla T_2. Metodą interpretacji pokazano, że np. następujące teorie są rozstrzygalne:

1. Monadyczna teoria następnika drugiego rzędu.
2. Teoria drugiego rzędu dwóch następników.
3. Teoria zbiorów liniowo uporządkowanych.
4. Monadyczna teoria drugiego rzędu przeliczalnych zbiorów dobrze uporządkowanych.

2.19.2 Teorie nierozstrzygalne: przykłady

Dwie podstawowe metody dowodzenia nierozstrzygalności teorii:

1. wykorzystanie twierdzeń Gödla o niezupełności PA,
2. redukcja zagadnienia rozstrzygalności jednej teorii do (już rozwiązanego) zagadnienia rozstrzygalności innej teorii.

T_2 jest *nieistotnym rozszerzeniem* T_1, gdy każda stała pozalogiczna z $L(T_2)$, która nie występuje w $L(T_1)$ jest stałą indywidualną oraz każde zdanie φ z $L(T_2)$, które jest twierdzeniem T_2 można udowodnić w oparciu o aksjomaty z T_1. T_2 jest *skończonym rozszerzeniem* T_1, gdy T_2 jest rozszerzeniem T_1 oraz istnieje skończony zbiór Φ twierdzeń teorii T_2 taki, że dla dowolnego zdania φ: jeśli $T_2 \vdash \varphi$, to $T_1 \cup \Phi \vdash \varphi$. T_1 i T_2 są *zgodne*, gdy mają wspólne niesprzeczne rozszerzenie. T_2 jest *interpretowalna* w T_1, gdy istnieje teoria T oraz rekurencyjny zbiór Φ zdań, które traktujemy jako aksjomaty teorii T takie, że:

1. T jest wspólnym rozszerzeniem T_1 i T_2
2. każda stała języka $L(T)$ jest stałą $L(T_1)$ lub $L(T_2)$
3. elementy Φ są definicjami na gruncie T_1 stałych pozalogicznych języka $L(T_2)$
4. każda stała pozalogiczna języka $L(T_2)$ występuje w dokładnie jednym zdaniu ze zbioru Φ
5. każde twierdzenie teorii T wynika logicznie ze zbioru zdań, z których każde jest albo twierdzeniem T_1 albo należy do Φ.

T_2 jest *słabo interpretowalna* w T_1, gdy T_2 jest interpretowalna w pewnym niesprzecznym rozszerzeniu prostym teorii T_1. Zakładamy, że słuchacze pamiętają pojęcie relatywizacji $\psi^{(P)}$ formuły ψ do predykatu P. *Relatywizacją* teorii T do predykatu P nazywamy teorię $T^{(P)}$ zdefiniowaną następująco:

1. $L(T^{(P)}) = L(T) \cup \{P\}$
2. φ jest twierdzeniem $T^{(P)}$ dokładnie wtedy, gdy φ wynika logicznie z formuł $\psi^{(P)}$, gdzie ψ jest twierdzeniem teorii T.

Teoria T jest *relatywnie interpretowalna* (*relatywnie słabo interpretowalna*) w teorii T_1, gdy istnieje jednoargumentowy predykat P nie należący do języka $L(T_2)$ taki, że teoria $T_2^{(P)}$ jest interpretowalna (słabo interpretowalna) w teorii T_1. Mamy m.in. następujące wyniki dotyczące nierozstrzygalności teorii:

1. Jeśli T_1 jest niesprzecznym rozszerzeniem T_2 i T_2 jest istotnie nierozstrzygalna, to T_1 jest istotnie nierozstrzygalna.

2. Jeśli T_2 jest nieistotnym rozszerzeniem T_1, to:

   (a) T_1 jest nierozstrzygalna dokładnie wtedy, gdy T_2 jest nierozstrzygalna.

   (b) T_1 jest istotnie nierozstrzygalna dokładnie wtedy, gdy T_2 jest istotnie nierozstrzygalna.

3. Niech T_1 i T_2 będą teoriami w tym samym języku takimi, że T_2 jest skończonym rozszerzeniem T_1. Wtedy: jeśli T_2 jest nierozstrzygalna, to T_1 jest nierozstrzygalna.

4. ($\bigstar$) Niech T_1 i T_2 będą teoriami zgodnymi i niech $L(T_2) \subseteq L(T_1)$. Wtedy: jeśli T_2 jest istotnie nierozstrzygalna i skończenie aksjomatyzowalna, to T_1 jest dziedzicznie nierozstrzygalna.

5. Jeżeli T_2 jest rozszerzeniem definicyjnym T_1 oraz T_2 jest nierozstrzygalna, to T_1 jest nierozstrzygalna.

6. Niech T_1 niesprzeczna, a T_2 interpretowalna w T_1 lub w pewnym nieistotnym rozszerzeniu T_1. Wtedy:

   (a) Jeśli T_2 jest istotnie nierozstrzygalna, to T_1 jest istotnie nierozstrzygalna.

   (b) Jeśli T_2 ma podteorię skończenie aksjomatyzowalną oraz istotnie nierozstrzygalną, to również T_1 ma taką podteorię.

7. Niech T_2 słabo interpretowalna w T_1. Jeśli T_2 jest istotnie nierozstrzygalna i skończenie aksjomatyzowalna, to:

   (a) T_1 jest dziedzicznie nierozstrzygalna

   (b) istnieje skończone rozszerzenie teorii T_1 w tym samym języku co T_1, które jest istotnie nierozstrzygalne.

8. Niech T_2 słabo interpretowalna w pewnym nieistotnym rozszerzeniu teorii T_1. Jeśli T_2 jest istotnie nierozstrzygalna i skończenie aksjomatyzowalna, to:

   (a) T_1 jest dziedzicznie nierozstrzygalna

   (b) istnieje istotnie nierozstrzygalne skończone rozszerzenie teorii T_1.

9. Niech predykat jednoargumentowy P nie należy do $L(T)$. Wtedy:

   (a) Teoria $T^{(P)}$ jest aksjomatyzowalna dokładnie wtedy, gdy T jest aksjomatyzowalna.

   (b) Jeśli w języku $L(T)$ występuje skończenie wiele symboli funkcyjnych, to $T^{(P)}$ jest skończenie aksjomatyzowalna dokładnie wtedy, gdy T jest skończenie aksjomatyzowalna.

10. Niech predykat jednoargumentowy P nie należy do $L(T)$. Wtedy: $T^{(P)}$ jest istotnie nierozstrzygalna dokładnie wtedy, gdy T jest istotnie nierozstrzygalna.

Przypominamy, że Arytmetyka Robinsona Q jest teorią w tym samym języku co PA, której aksjomatami są aksjomaty PA (A1)–(A6) (a więc bez aksjomatu indukcji). Zachodzą następujące fakty:

1. Q jest skończenie aksjomatyzowalna.
2. W Q reprezentowalne sa wszystkie funkcje rekurencyjne.
3. Q jest istotnie nierozstrzygalna.
4. Żadna podteoria Q otrzymana przez usunięcie jednego z aksjomatów (A1)–(A6) nie jest istotnie nierozstrzygalna.

Teoria Q jest zatem w pewnym sensie minimalną teorią istotnie nierozstrzygalną, w której reprezentowalne sa wszystkie funkcje rekurencyjne. Teorię Q wykorzystujemy w dowodach nierozstrzygalności różnych teorii:

1. Teoria modelu standardowego PA jest dziedzicznie nierozstrzygalna.
2. Każda teoria T zgodna z Q i taka, iż każda stała pozalogiczna języka $L(Q)$ jest stałą pozalogiczną języka $L(T)$ jest nierozstrzygalna.
3. Model standardowy $\mathfrak{N}_0$ jest mocno nierozstrzygalny.
4. Teoria Q jest mocno nierozstrzygalna.
5. Arytmetyka PA jest mocno nierozstrzygalna.
6. Teoria Q jest dziedzicznie nierozstrzygalna.
7. Każdy model teorii Q jest mocno nierozstrzygalny.

8. Arytmetyka PA jest dziedzicznie nierozstrzygalna.

Ustalono nierozstrzygalność niektórych ważnych teorii matematycznych:

1. Teoria liczb całkowitych (z dodawaniem i mnożeniem) jest nierozstrzygalna.
2. Teoria liczb całkowitych (z dodawaniem i mnożeniem oraz relacją mniejszości) jest nierozstrzygalna.
3. Istnieją skończenie aksjomatyzowalne podteorie teorii liczb całkowitych (z dodawaniem i mnożeniem), które są istotnie nierozstrzygalne.
4. Istnieją skończenie aksjomatyzowalne podteorie teorii liczb całkowitych (z dodawaniem i mnożeniem oraz relacją mniejszości), które są istotnie nierozstrzygalne.
5. Nierozstrzygalne są elementarne teorie: pierścieni, pierścieni przemiennych, pierścieni całkowitych, pierścieni uporządkowanych, pierścieni uporządkowanych przemiennych, z jedynką lub bez jedynki.
6. Teoria grup jest dziedzicznie nierozstrzygalna. Istnieje skończenie aksjomatyzowalne rozszerzenie teorii grup, które jest istotnie nierozstrzygalne. Teoria grup nie jest istotnie nierozstrzygalna.
7. Teoria grupoidów oraz teoria semigrup (z jedynką lub bez jedynki) są nierozstrzygalne.
8. Teoria liczb wymiernych z dodawaniem i mnożeniem jest dziedzicznie nierozstrzygalna.
9. Teoria krat jest nierozstrzygalna.
10. Teoria krat rozdzielnych jest nierozstrzygalna.
11. Teoria krat modularnych jest nierozstrzygalna.
12. Geometria rzutowa jest nierozstrzygalna.
13. Teoria mnogości ZF jest nierozstrzygalna.

TWIERDZENIE CHURCHA. *Klasyczny Rachunek Predykatów I rzędu (czyli FOL, w oznaczeniach tego wykładu) jest dziedzicznie nierozstrzygalny.*

Zarys dowodu:

1. Arytmetyka Robinsona Q oraz FOL są teoriami zgodnymi.

2. Nadto, każda stała pozalogiczna teorii Q jest oczywiście stałą pozalogiczną FOL.

3. Ponieważ Q jest skończenie aksjomatyzowalna oraz istotnie nierozstrzygalna, więc na mocy twierdzenia ($\bigstar$) FOL jest dziedzicznie nierozstrzygalny.

FOL ma jednak fragmenty rozstrzygalne, jak pokazuje następne twierdzenie.

TWIERDZENIE. *Klasyczny monadyczny rachunek predykatów I rzędu jest rozstrzygalny.*
Zarys dowodu:

1. Niech φ będzie formułą klasycznego monadycznego rachunku predykatów I rzędu i niech $P_1, \ldots, P_n$ będą wszystkimi predykatami występującymi w φ.

2. Wtedy φ jest tezą klasycznego monadycznego rachunku predykatów I rzędu dokładnie wtedy, gdy φ jest prawdziwa w każdej strukturze zawierającej co najwyżej 2^n elementów.

3. Dowód implikacji prostej jest oczywisty.

4. Dla dowodu implikacji odwrotnej, niech $\mathfrak{A}$ będzie dowolną strukturą.

5. Określamy relację równoważności $\sim$ w uniwersum $\mathfrak{A}$ następująco:

   $a \sim b$ dokładnie wtedy, gdy $\mathfrak{A} \models (P_i(x) \equiv P_i(y))[a, b]$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$.

6. Wtedy: $a \sim b$ dokładnie wtedy, gdy następujące warunki są równoważne, dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$:

   (a) $\mathfrak{A} \models P_i(x)[a]$
   (b) $\mathfrak{A} \models P_i(y)[b]$.

7. Niech $\mathfrak{B}$ będzie strukturą ilorazową $\mathfrak{A}/\sim$. Wtedy $\mathfrak{B}$ ma co najwyżej 2^n elementów, gdyż każdy predykat P_i wyznacza dwa elementy w strukturze ilorazowej $\mathfrak{B}$, a mamy n różnych predykatów.

8. Przez indukcję strukturalną po budowie formuły φ łatwo pokazujemy, że $\mathfrak{A} \models \varphi$ dokładnie wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models \varphi$, co kończy dowód.

3 Algebraiczne ujęcie metalogiki

W tym ujęciu bada się – metodami algebraicznymi – klasy operacji konsekwencji. Badania całkiem ogólnych operacji konsekwencji zapoczątkowane zostały przez Alfreda Tarskiego. Przez wiele lat badania te były „polską specjalnością” w logice, dopiero stosunkowo niedawno także logicy innych krajów włączyli się w te rozważania. W pierwszym z niniejszych wykładów wprowadziliśmy pojęcie ogólnej operacji konsekwencji, mówiliśmy o regułach dopuszczalnych oraz wyprowadzalnych, itp. Słuchaczy zainteresowanych głębiej problematyką ogólnych operacji konsekwencji uprzejmie zapraszamy do zajrzenia np. do monografii: Czelakowski 2001, Pogorzelski, Wojtylak 2008, Tarski 2001, Wójcicki 1988. Treść monografii Pogorzelski, Wojtylak 2008 omówiona została w języku polskim w tekście *Dwa paradygmaty metalogiki*, powszechnie dostępnym na stronach Zakładu Logiki Stosowanej UAM:

http://www.logic.amu.edu.pl/images/a/a5/Dwaparadygmaty.pdf

W tym punkcie podajemy jedynie wybrane podstawowe pojęcia i kilka twierdzeń. Ogólne operacje konsekwencji dostarczają algebraicznych metod umożliwiających m.in.:

1. porównywanie logik;
2. formułowanie różnych wersji pełności logik (np. zgodności semantyki z maszynerią inferencyjną);
3. określanie stopnia (nie)zupełności logik, itp.

Niech S będzie zbiorem wszystkich formuł języka (zdaniowego) J. Niech $\mathcal{R}$ będzie dowolną rodziną reguł wnioskowania w J. Niech $\mathcal{N}$ oznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych. Przez *operację konsekwencji w J wyznaczoną przez $\mathcal{R}$* rozumiemy każdą funkcję $C : \wp(S) \to \wp(S)$, zdefiniowaną indukcyjnie następującymi warunkami dla dowolnego zbioru formuł X języka J:

1. $C^0_{\mathcal{R}}(X) = X$
2. $C^{k+1}_{\mathcal{R}}(X) = C^k_{\mathcal{R}}(X) \cup \{\alpha \in S : (\exists R \in \mathcal{R})(\exists P \subseteq C^k_{\mathcal{R}}(X))\ (P, \alpha) \in R\}$
3. $C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup\{C^k_{\mathcal{R}}(X) : k \in \mathcal{N}\}$.

Wyrażenie $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ czytamy: α jest wyprowadzalna z X za pomocą reguł należących do $\mathcal{R}$. Podamy kilka własności tak ogólnie rozumianej operacji konsekwencji. Rozważamy języki postaci $J = \langle S; \{\S_i : i \in I\}\rangle$, gdzie:

1. $\{\S_i : i \in I\}$ jest rodziną funktorów zdaniotwórczych,

2. S jest (przeliczalnym) zbiorem wszystkich formuł (zdefiniowanym induk-cyjnie, w ten sam sposób, jak dla KRZ, wychodząc od zbioru V zmiennych zdaniowych).

Niech $Cld(\mathcal{R}, X)$ oznacza, że zbiór formuł X języka J jest *domknięty na wszystkie reguły ze zbioru* $\mathcal{R}$: $Cld(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\forall R \in \mathcal{R})(\forall P \subseteq S)(\forall \alpha \in S)(((P, \alpha) \in R \wedge P \subseteq X) \Rightarrow \alpha \in X)$.

Niech $e : V \to X$ będzie dowolnym odwzorowaniem ze zbioru V zmiennych zdaniowych w jakiś zbiór formuł X. Funkcję e można jednoznacznie rozszerzyć do homomorfizmu $h^e : S \to S$ w następujący sposób:

1. $h^e(p_i) = e(p_i)$

2. $h^e(\S_j^1(\alpha)) = \S_j^1(h^e(\alpha))$ (dla spójników 1-argumentowych $\S_j^1$)

3. $h^e(\S_j^2(\alpha, \beta)) = \S_j^2(h^e(\alpha), h^e(\beta))$ (dla spójników 2-argumentowych $\S_j^2$).

Regułę *podstawiania za zmienne zdaniowe* można wtedy określić następująco: α_2 powstaje z α_1 przez podstawienie (formuł ze zbioru X za zmienne zdaniowe) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $e : V \to X$ taka, że $\alpha_2 = h^e(\alpha_1)$.

Relacja konsekwencji wyznaczona przez reguły $\mathcal{R}$ ma następujące własności:

1. Jeśli $n < m$, to $C^n_{\mathcal{R}}(X) \subseteq C^m_{\mathcal{R}}(X)$.

2. $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in Y$ dla każdego zbioru Y takiego, że $X \subseteq Y$ oraz $Cld(\mathcal{R}, Y)$.

3. Jeśli $(P, \alpha) \in R$ i $R \in \mathcal{R}$, to $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(P)$.

4. Jeśli $(P, \alpha) \in R$, $R \in \mathcal{R}$ i $P \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$, to $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$.

5. $X \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$ (zwrotność).

6. Jeśli $X \subseteq Y$, to $C_{\mathcal{R}}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}}(Y)$ (monotoniczność).

7. Jeśli $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$, to $C_{\mathcal{R}_1}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}_2}(X)$ (monotoniczność).

8. $C_{\mathcal{R}}(C_{\mathcal{R}}(X)) = C_{\mathcal{R}}(X)$ (idempotencja).

9. $C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup\{C_{\mathcal{R}}(Y) : Y \subseteq X \wedge \overline{\overline{Y}} < \aleph_0\}$ (finitystyczność).

10. $C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup\{C_{\mathcal{R}'}(X) : \mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R} \wedge \overline{\overline{\mathcal{R}'}} < \aleph_0\}$ (finitystyczność).

11. Jeśli dla dowolnych elementów X, Y niepustej rodziny $\mathcal{X}$ zachodzi alternatywa $X \subseteq Y$ lub $Y \subseteq X$, to: $C_{\mathcal{R}}(\bigcup\{X : X \in \mathcal{X}\}) = \bigcup\{C_{\mathcal{R}}(X) : X \in \mathcal{X}\}$.

Z 2. wynika, że $C_{\mathcal{R}}(X)$ jest iloczynem wszystkich zbiorów zawierających X i domkniętych ze względu na reguły z $\mathcal{R}$. Zatem $C_{\mathcal{R}}(X)$ można tak właśnie definiować.

Symbol $\overline{\overline{X}}$ oznacza *moc* (liczbę elementów) zbioru X, a $\aleph_0$ jest mocą zbioru $\mathcal{N}$.

Zbiór $Perm(\mathcal{R}, X)$ wszystkich reguł *dopuszczalnych* ze względu na X i $\mathcal{R}$ definiujemy następująco: $R \in Perm(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $P \subseteq S$ oraz każdej $\alpha \in S$: jeśli $(P, \alpha) \in R$ i $P \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$, to $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X)$. Można wtedy udowodnić, że: $R \in Perm(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C_{\mathcal{R}\cup\{R\}}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$.

Reguła R jest zatem dopuszczalna ze względu na X oraz $\mathcal{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $C_{\mathcal{R}}(X)$ jest domknięty na tę regułę.

Zbiór $Der(\mathcal{R}, X)$ wszystkich reguł *wyprowadzalnych* ze względu na X i $\mathcal{R}$ definiujemy następująco: $R \in Der(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $P \subseteq S$ oraz każdej $\alpha \in S$: jeśli $(P, \alpha) \in R$, to $\alpha \in C_{\mathcal{R}}(X \cup P)$.

Niektóre podstawowe własności tych zbiorów podają następujące twierdzenia:

1. $R \in Der(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru $Y \subseteq S$ oraz każdej rodziny reguł $\mathcal{R}'$: $C_{\mathcal{R}\cup\mathcal{R}'\cup\{R\}}(X \cup Y) \subseteq C_{\mathcal{R}\cup\mathcal{R}'}(X \cup Y)$.

2. $Der(\mathcal{R}, X) \subseteq Perm(\mathcal{R}, X)$.

3. Istnieją: $\mathcal{R}$ oraz X takie, że $Perm(\mathcal{R}, X) - Der(\mathcal{R}, X) \neq \emptyset$.

4. $\mathcal{R} \subseteq Perm(\mathcal{R}, X)$.

5. $Perm(Perm(\mathcal{R}, X), X) = Perm(\mathcal{R}, X)$.

6. $Der(\mathcal{R}, X) = \bigcap\{Perm(\mathcal{R}', X') : \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}' \wedge X \subseteq X'\}$.

Reguła R jest regułą *strukturalną* w S wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego sekwentu $(X, \alpha) \in R$ oraz każdego $e : V \to S$ także sekwent $(h^e[X], h^e(\alpha))$ należy do R. Oznaczamy: $Sb(X) = \{\alpha \in S : \alpha \in h^e[X]$ dla pewnego $e : V \to S\}$.

Reguła strukturalna to zatem, intuicyjnie (i niezbyt precyzyjnie) mówiąc, reguła zawierająca wszelkie sekwenty (X, α) będące podstawieniami jakiegokolwiek sekwentu z tej reguły. Reguły strukturalne można zapisywać schematycznie, np. regułę odrywania w postaci:

$$\frac{\alpha \to \beta,\ \alpha}{\beta}.$$

Można rozważać jeszcze ogólniejsze pojęcie konsekwencji, niezrelatywizowane do zbioru reguł $\mathcal{R}$. Niech $\overline{\overline{S}} \leqslant \aleph_0$. Powiemy, że funkcja $C : \wp(S) \to \wp(S)$ jest (finitystyczną) *operacją konsekwencji* w J, gdy spełnione są następujące warunki, dla dowolnych $X, Y \in \wp(S)$:

(C1) $X \subseteq C(X)$ (zwrotność)

(C2) jeśli $X \subseteq Y$, to $C(X) \subseteq C(Y)$ (monotoniczność)

(C3) $C(C(X)) \subseteq C(X)$ (idempotencja)

(C4) $C(X) \subseteq \bigcup\{C(Y) : Y \subseteq X \wedge \overline{\overline{Y}} < \aleph_0\}$ (finitystyczność).

Ogólna (finitystyczna) *relacja konsekwencji* $\vdash \subseteq \wp(S) \times S$ w S określona jest dla dowolnych $X, Y \subseteq S$ oraz $\alpha \in S$ przez warunki:

($\vdash$ 1) $X \vdash \alpha$ dla każdego $\alpha \in X$

($\vdash$ 2) jeśli $X \vdash \alpha$ i $X \subseteq Y$, to $Y \vdash \alpha$

($\vdash$ 3) jeśli $X \vdash \beta$ dla każdej $\beta \in Y$ oraz $Y \vdash \alpha$, to $X \vdash \alpha$

($\vdash$ 4) jeśli $X \vdash \alpha$, to istnieje Y taki, że: $Y \subseteq X$, $\overline{\overline{Y}} < \aleph_0$ oraz $Y \vdash \alpha$.

Operacje i relacje konsekwencji są wzajemnie przez siebie definiowalne:

$$(\bigstar) \quad X \vdash \alpha \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \alpha \in C(X)$$

(tj. dla każdej $\vdash$ istnieje C taka, że zachodzi ($\bigstar$), a także dla każdej C istnieje $\vdash$ taka, że zachodzi ($\bigstar$)).

Powiemy, że operacja C_2 jest *nadkonsekwencją* operacji C_1 (wtedy mówimy, że C_1 jest *podkonsekwencją* operacji C_2 i piszemy $C_1 \preccurlyeq C_2$), gdy $C_1(X) \subseteq C_2(X)$, dla każdego $X \in \wp(S)$.

Relacja $\preccurlyeq$ jest częściowym porządkiem w zbiorze $\mathcal{C}_S$ wszystkich operacji konsekwencji określonych na S. Jeśli $\{C_t : t \in T\}$ jest dowolną rodziną operacji konsekwencji na S, to określamy *kres dolny* $\bigwedge\{C_t : t \in T\}$ oraz *kres górny* $\bigvee\{C_t : t \in T\}$:

1. $\bigwedge\{C_t : t \in T\}(X) = \bigcap\{C_t(X) : t \in T\}$

2. $\bigvee\{C_t : t \in T\}(X) = \bigcap\limits_{t \in T} \{C(X) : C_t \preccurlyeq C\}$.

Układ $\langle \mathcal{C}_S; \preccurlyeq \rangle$ jest *kratą zupełną*, z zerem i jedynką.

Punkty stałe każdej operacji C, tj. zbiory X, dla których zachodzi równość $C(X) = X$ nazywane są *teoriami operacji* C.

Każda operacja konsekwencji określona warunkami (C1)–(C4) ma następującą własność:

- $C(X) = \bigcap\{Y : X \subseteq Y \wedge C(C(Y)) = Y\}$.

Każda ogólna relacja konsekwencji $\vdash$ określona warunkami ($\vdash$ 1)–($\vdash$ 4) ma własność:

- $X \vdash \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in \bigcap\{Y \in D_\vdash : X \subseteq Y\}$, gdzie $D_\vdash = \{X \subseteq S : \alpha \in X \equiv X \vdash \alpha\}$.

Oto niektóre podstawowe własności mogące przysługiwać operatorom konsekwencji:

1. Konsekwencja C jest *niesprzeczna*, gdy $C(\emptyset) \neq S$.

2. Konsekwencja C jest *zupełna*, gdy $C(\{\alpha\}) = S$ dla każdej $\alpha \notin C(\emptyset)$.

3. Konsekwencja C jest *maksymalna* w rodzinie $\mathcal{C}_S$, gdy nie istnieje niesprzeczna konsekwencja C' taka, że $C \preccurlyeq C'$ oraz $C \neq C'$. Konsekwencje maksymalne to dokładnie wszystkie niesprzeczne konsekwencje zupełne.

4. Konsekwencja C jest *zwarta*, gdy dla dowolnego $X \subseteq S$: jeśli $C(X) = S$, to istnieje skończony zbiórY taki, że $Y \subseteq X$ oraz $C(Y) = S$.

5. Konsekwencja C jest *strukturalna*, gdy dla dowolnego $X \subseteq S$ oraz $e : V \to S$ zachodzi inkluzja: $h^e[C(X)] \subseteq C(h^e[X])$.

6. Konsekwencja C (wyznaczona przez jakiś zbiór reguł) jest *strukturalnie zupełna*, gdy każda reguła strukturalna i dopuszczalna ze względu na C jest wyprowadzalna ze względu na C.

Złożenie $C_1 \circ C_2$ dwóch operatorów konsekwencji określone wzorem $C_1 \circ C_2(X) = C_1(C_2(X))$ nie musi być operatorem konsekwencji. Następujące warunki są równoważne:

1. $C_1 \circ C_2 \in \mathcal{C}_S$

2. $C_1 \circ C_2 = \bigvee\{C_1, C_2\}$

3. $C_1 \circ C_2(C_1 \circ C_2(X)) \subseteq C_1 \circ C_2(X)$

4. $C_2 \circ C_1 \preccurlyeq C_1 \circ C_2$.

Niech C będzie operacją konsekwencji, a $X \subseteq S$ zbiorem formuł. Mówimy, że:

1. X jest C-*sprzeczny*, gdy $C(X) = S$. W przeciwnym przypadku X jest C-*niesprzeczny*.

2. X jest C-*zupełny*, gdy $X = C(X)$ jest maksymalnym zbiorem C-niesprzecznym.

Niech $Th(C) = \{C(X) : X \subseteq S\}$. Dowodzi się, że $\langle Th(C); \sqcap, \sqcup\rangle$ jest kratą (zupełną, z zerem i jedynką), gdzie:

1. $X \sqcap Y = X \cap Y$, $\bigwedge\limits_{i\in I} X_i = \bigcap\limits_{i\in I} X_i$

2. $X \sqcup Y = C(X \cup Y)$, $\bigvee\limits_{i\in I} X_i = C(\bigcup\limits_{i\in I} X_i)$.

Twierdzenie Lindenbauma. Jeśli C jest zwarta, a X jest C-niesprzeczny, to istnieje C-zupełna teoria Y taka, że $X \subseteq Y$.

Tak więc, każdą teorię C-niesprzeczną można rozszerzyć do teorii C-zupełnej (wymaga to jednak zastosowania pewnika wyboru; *równoważność* pewnika wyboru z Twierdzeniem Lindenbauma pokazał Wojciech Dzik). Liczba rozszerzeń zupełnych teorii niesprzecznej jest miarą jej (nie)zupełności.

Niech $\mathfrak{M} = \langle U; \{f_i\}_{i\in I}, D\rangle$ będzie *matrycą logiczną*, gdzie $\langle U; \{f_i\}_{i\in I}\rangle$ jest algebrą *podobną* (=tej samej sygnatury) do algebry języka $J = \langle S; \{\S_i : i \in I\}\rangle$ (ze zbiorem zmiennych zdaniowych V), a D jest podzbiorem U (zbiorem *wartości wyróżnionych* matrycy $\mathfrak{M}$). *Zawartością* (zbiorem *tautologii*) matrycy $\mathfrak{M}$ jest zbiór $E(\mathfrak{M})$ wszystkich formuł α języka J takich, że dla dowolnego $e : V \to U$ mamy $h^e(\alpha) \in D$. Dla przykładu, zawartością matrycy:

$$\mathfrak{B}_2 = \langle\{0, 1\}; \underline{\neg}, \underline{\wedge}, \underline{\vee}, \underline{\rightarrow}, \{1\}\rangle$$

jest zbiór wszystkich tautologii KRZ.

Niech $\mathfrak{M} = \langle U; \{f_i\}_{i\in I}, D\rangle$ będzie matrycą logiczną. Zdefiniujmy funkcję $C_{\mathfrak{M}} : \wp(S) \to (S)$ następująco: $C_{\mathfrak{M}}(X)$ jest zbiorem wszystkich formuł $\alpha \in S$ takich, że dowolnego $e : V \to U$ mamy:

$$\text{jeśli } h^e[X] \subseteq D, \text{ to } h^e(\alpha) \in D.$$

Wtedy $C_{\mathfrak{M}}$ spełnia warunki (C1)–(C4). Zachodzi: $E(\mathfrak{M}) = C_{\mathfrak{M}}(\emptyset)$. Funkcję $C_{\mathfrak{M}}$ nazywamy *konsekwencją matrycową* (wyznaczoną przez matrycę $\mathfrak{M}$). Oznaczana ona bywa także przez $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$.

Operacja konsekwencji $C^A_{\mathcal{R}}$ (wyznaczona przez zbiór reguł $\mathcal{R}$ oraz zbiór aksjomatów A) jest:

1. *pełna* (w sensie silnym) względem matrycy $\mathfrak{M}$, gdy dla dowolnego $X \subseteq S$: $C^A_{\mathcal{R}}(X) = C_{\mathfrak{M}}(X)$;
2. *pełna* (w sensie słabym) względem matrycy $\mathfrak{M}$, gdy: $C^A_{\mathcal{R}}(\emptyset) = C_{\mathfrak{M}}(\emptyset)$;
3. jeśli $C^A_{\mathcal{R}}$ jest pełna względem $\mathfrak{M}$, to $\mathfrak{M}$ jest *adekwatna* względem $C^A_{\mathcal{R}}$.

Konsekwencja aksjomatyczna w KRZ jest pełna (w obu sensach) względem matrycy $\mathfrak{B}_2 = \langle \{0, 1\}; \underline{\neg}, \underline{\wedge}, \underline{\vee}, \underline{\rightarrow}, \{1\}\rangle$.

Operacja konsekwencji C jest *pełna względem klasy matryc* K, gdy jest pełna względem każdej matrycy należącej do K.

Matryca $\mathfrak{M}$ jest *silnie adekwatna* dla C, gdy $C = C_{\mathfrak{M}}$.

Niech C będzie operacją konsekwencji w $J = \langle S, \{\S_i : i \in I\}\rangle$. *Wiązką Lindenbauma* dla C nazywamy klasę matryc $\mathbb{L}_C$:

$$\mathbb{L}_C = \{\langle S; \{\S_i : i \in I\}, C(X)\rangle : X \subseteq S\}.$$

Matrycą Lindenbauma dla operacji $C^A_{\mathcal{R}}$ jest: $\mathfrak{M}^A_{\mathcal{R}} = \langle S, \{\S_i : i \in I\}, C^A_{\mathcal{R}}(\emptyset)\rangle$. Zachodzą następujące fakty:

1. $E(\mathfrak{M}^A_{\mathcal{R}}) = \{\alpha \in S : Sb(\alpha) \subseteq C^A_{\mathcal{R}}(\emptyset)\}$.
2. Jeśli reguła podstawiania jest dopuszczalna dla $C^A_{\mathcal{R}}$, to $E(\mathfrak{M}^A_{\mathcal{R}}) = C^A_{\mathcal{R}}(\emptyset)$.
3. (Wójcicki). Każda konsekwencja strukturalna jest pełna względem swojej wiązki Lindenbauma.

Pełność operacji konsekwencji względem matrycy Lindenbauma (wiązki Lindenbauma) nie rozwiązuje jednak całkowicie problematyki pełności. Jesteśmy zainteresowani pełnością konsekwencji np. względem: klasy matryc skończonych, klasy matryc, których algebry mają jakąś określoną strukturę (algebraiczną, topologiczną, itd.), dokładnie jednej matrycy, itd. Jest nieprzebrane mnóstwo wyników dotyczących pełności logik, np.:

1. Dla systemu modalnego S_5 adekwatna jest (nieskończona) *matryca Wajsberga*.

2. Dla logik (skończenie) wielowartościowych Łukasiewicza mamy pełność względem (skończonych) *matryc Łukasiewicza*.

3. Nieskończenie wielowartościowa logika Łukasiewicza jest pełna względem *nieskończonej* matrycy (o uniwersum $[0, 1]$).

4. Logika intuicjonistyczna jest pełna względem klasy wszystkich *algebr Heytinga*.

5. Istnieją matryce skończone, których zawartość nie jest skończenie *aksjomatyzowalna* (P. Wojtylak, K. Pałasińska).

Niech C będzie operacją konsekwencji. Zdefiniujmy operację C^{-1} konsekwencji *odrzucającej* (wyznaczonej przez C) następująco: $C^{-1}(X) = \{\alpha \in S : X \cap C(\{\alpha\}) \neq \emptyset\}$. Wtedy C^{-1} spełnia warunki (C1)–(C4). W myśl powyższej definicji, α jest formułą odrzuconą na gruncie założeń X wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna formuła z X jest wyprowadzalna z $\{\alpha\}$. Tak więc, formuła α *nie jest* odrzucona na gruncie założeń X wtedy i tylko wtedy, gdy *żadna* formuła z X nie jest wyprowadzalna z $\{\alpha\}$. Konsekwencje odrzucające możemy charakteryzować poprzez *reguły odrzucania* formuł. Dla przykładu, jedną z takich reguł jest *reguła odrzucania przez odrywanie:* jeśli *uznajesz* implikację oraz *odrzucasz* jej następnik, to *odrzuć* jej poprzednik. *Relacje* odrzucania wyrażeń oznaczane są zwykle symbolem $\dashv$. Powyższa reguła ma zatem następujący zapis:

$$\frac{\vdash \alpha \to \beta, \quad \dashv \beta}{\dashv \alpha}.$$

Tak jak reguły charakteryzujące relacje wyprowadzalności $\vdash$ mają, intuicyjnie mówiąc, gwarantować, że są to relacje *zachowujące prawdę*, tak stosowne reguły dla relacji odrzucania $\dashv$ mają gwarantować, że są to relacje *zachowujące fałsz*. *Konsekwencją dualną* do konsekwencji C nazywamy funkcję ∂C określoną następująco:

$$\partial C(X) = \{\alpha \in S : (\exists Y \subseteq X)\ (\overline{\overline{Y}} < \aleph_0 \wedge \bigcap_{\beta \in Y} C(\{\beta\}) \subseteq C(\{\alpha\}))\}.$$

Jeśli $C(\emptyset) \neq \emptyset$, to operacja ∂C spełnia warunki (C1)–(C4). Ponadto, $C^{-1} \preccurlyeq \partial C$, czyli ∂C jest nadkonsekwencją C^{-1}, oraz:

1. $\partial(\partial C)(\emptyset) = \bigcap_{\alpha \in S} C(\{\alpha\})$.

2. $\partial C(\emptyset) = \{\alpha \in S : C(\{\alpha\}) = S\}$.

3. Jeśli $C(\emptyset) \neq \emptyset$, to $\partial(\partial C)(X) = C(X)$.

Niech $\mathfrak{M} = \langle U; \{f_i\}_{i \in I}, D \rangle$ będzie matrycą logiczną, gdzie $\langle U; \{f_i\}_{i \in I} \rangle$ jest algebrą podobną do algebry języka $J = \langle S; \{\S_i : i \in I\} \rangle$, a D jest podzbiorem U (zbiorem wartości wyróżnionych matrycy $\mathfrak{M}$). Przez $\mathfrak{M}^*$ oznaczmy matrycę $\langle U; \{f_i\}_{i \in I}, U - D \rangle$, w której zbiorem wartości wyróżnionych jest $U - D$.

Jeśli $\mathcal{R}$ jest zbiorem reguł *uznawania*, a $\mathcal{R}^*$ zbiorem reguł *odrzucania* formuł, to zachodzenie ciągu równości:

$$C_{\mathcal{R}^*} = C_{\mathfrak{M}^*} = \partial C_{\mathcal{R}} = \partial C_{\mathfrak{M}}$$

moglibyśmy nazywać (silną) *pełnością odrzucającą* konsekwencji $C_{\mathcal{R}}$ i $C_{\mathcal{R}^*}$ względem matryc $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}^*$.

Zabawny, naszym zdaniem, przykład konsekwencji odrzucającej znaleźć można w rozdziale 10 książki Raymonda Smullyana *Alice in Puzzleland*; polskie tłumaczenie jest gotowe, spis treści powszechnie dostępny:

http://www.logic.amu.edu.pl/images/a/ac/Alicepreface.pdf

Operacje konsekwencji (warunki (C1)–(C3)) są szczególnym przypadkiem *operacji domknięcia*, ważnych w wielu działach matematyki:

1. domknięcie *topologiczne*;
2. różne typy domknięć *algebraicznych*;
3. *odpowiedniości Galois*;
4. $\langle \mathbb{R}; [\ ] \rangle$, gdzie $\mathbb{R}$ jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, a funkcja $[\ ]$ zdefiniowana jest wzorem: $[r] =$ najmniejsza liczba całkowita $\geqslant r$;
5. domknięcia związane z *definiowalnością*.

4 Semantyczne ujęcie metalogiki

Tytuł tej części jest może nieco mylący – wszak w poprzednich ujęciach także mówiono o semantyce. Chcemy teraz podkreślić fakt, że omawiane ujęcie wychodzi od *aksjomatycznie* opisywanej relacji spełniania. Alfred Tarski podał *definicję* tej relacji (dla FOL), ale anonsował też możliwość jej aksjomatycznego opisu. Na tej drugiej drodze bada się:

1. *Logiki abstrakcyjne*. Używana tu terminologia zmieniała się: mówiono najpierw o *soft model theory* oraz *abstract logics*, obecnie często używa się terminu *model-theoretic logics*.
2. *Klasy spełniania*. Można podać tak ogólne ujęcie pojęcia spełniania, że klasyczna definicja Tarskiego staje się jego szczególnym przypadkiem.

4.1 Logiki abstrakcyjne

Podamy definicję logiki abstrakcyjnej, wybrane przykłady takich logik oraz krótkie informacje o ważnych twierdzeniach uzyskanych w tym podejściu. Słuchaczy zainteresowanych głębiej tą problematyką uprzejmie zachęcamy do zajrzenia np. do monografii: Barwise, Feferman 1985, Ebbinghaus, Flum, Thomas 1996, Krynicki, Mostowski, Szczerba (eds.) 1995, Shapiro (ed.) 1996, Stegmüller, Varga von Kibéd 1984, Westerståhl 1989. Niektóre informacje w języku polskim znaleźć można we wspomnianym już wyżej tekście *Dwa paradygmaty metalogiki*, powszechnie dostępnym na stronach Zakładu Logiki Stosowanej UAM:

http://www.logic.amu.edu.pl/images/a/a5/Dwaparadygmaty.pdf

W istocie, treść tego punktu niniejszych notatek pokrywa się zasadniczo z drugą częścią tekstu *Dwa paradygmaty metalogiki*.

4.1.1 Logiki abstrakcyjne – definicje

Dla naszych celów wystarczająca będzie następująca definicja logiki abstrakcyjnej (albo: systemu logicznego, w sensie uogólnionym).

Przez *logikę abstrakcyjną* rozumiemy każdą parę uporządkowaną $\mathcal{L} = (L, \models^{\mathcal{L}})$, spełniającą następujące warunki:

- L przyporządkowuje każdej sygnaturze σ zbiór $L(\sigma)$, zwany zbiorem σ-*zdań* logiki $\mathcal{L}$. [Uwaga: w niektórych przypadkach trzeba rozważać *klasy* zamiast zbiorów.]
- Jeśli $\sigma \subseteq \tau$, to $L(\sigma) \subseteq L(\tau)$.
- Jeśli $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \varphi$, to dla pewnego σ mamy: $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$ oraz $\varphi \in L(\sigma)$.
- WARUNEK IZOMORFIZMU. Jeśli $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \varphi$ oraz $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \varphi$.
- WARUNEK REDUKTU. Jeśli $\tau \subseteq \sigma$, $\varphi \in L(\sigma)$ oraz $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$, to $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A} \upharpoonright \tau \models^{\mathcal{L}} \varphi$

Przypominamy, że $\mathfrak{A} \upharpoonright \tau$ jest τ-reduktem struktury $\mathfrak{A}$, czyli strukturą powstającą z $\mathfrak{A}$ poprzez uwzględnienie tylko interpretacji wszystkich symboli z τ (a więc, gdy $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$ oraz $\tau \subseteq \sigma$, to w $\mathfrak{A} \upharpoonright \tau$ uwzględniamy tylko interpretacje symboli z τ, pomijając interpretacje symboli z $\sigma - \tau$).

Dla dowolnej logiki abstrakcyjnej $\mathcal{L}$ oraz $\varphi \in L(\sigma)$ miech:

$$Mod^{\sigma}_{\mathcal{L}}(\varphi) = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \in Str_\sigma \wedge \mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \varphi\}$$

(jeśli σ będzie jasne z kontekstu, będziemy pisać $Mod_{\mathcal{L}}(\varphi)$).

Niech $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ oznacza logikę pierwszego rzędu. W tym przypadku funkcja L przyporządkowuje każdej sygnaturze σ zbiór wszystkich zdań pierwszego rzędu w których występują symbole z σ. Dla logiki $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ będziemy używali relacji $\models$, bez indeksu, pokrywającej się z relacją spełniania znaną z wykładu *Semantyka KRP*.

„Moc wyrażania" poszczególnych logik abstrakcyjnych definiowana jest w terminach semantycznych:

- Piszemy $\mathcal{L}_1 \leqslant \mathcal{L}_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej sygnatury σ oraz każdego $\varphi \in L_1(\sigma)$ istnieje $\psi \in L_2(\sigma)$ taka, że: $Mod^{\sigma}_{\mathcal{L}_1}(\varphi) = Mod^{\sigma}_{\mathcal{L}_2}(\psi)$. Mówimy wtedy, że $\mathcal{L}_1$ ma *moc wyrażania nie większą niż* $\mathcal{L}_2$.

- Gdy zachodzi $\mathcal{L}_1 \leqslant \mathcal{L}_2$, ale nie zachodzi $\mathcal{L}_2 \leqslant \mathcal{L}_1$, to piszemy $\mathcal{L}_1 < \mathcal{L}_2$ i mówimy, że $\mathcal{L}_2$ ma *moc wyrażania większą niż* $\mathcal{L}_1$.

- Gdy zachodzi $\mathcal{L}_1 \leqslant \mathcal{L}_2$ oraz zachodzi $\mathcal{L}_2 \leqslant \mathcal{L}_1$, to piszemy $\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2$ i mówimy, że $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_1$ mają *taką samą moc wyrażania*.

Spośród wszystkich logik abstrakcyjnych wyróżnimy klasę logik regularnych, spełniających pewne naturalne warunki.

Powiemy, że logika $\mathcal{L}$ ma *własność spójników Boolowskich*, gdy:

- Dla każdej σ oraz $\varphi \in L(\sigma)$ istnieje $\chi \in L(\sigma)$ taka, że dla każdej $\mathfrak{A} \in Str_{\sigma}$:

  $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \chi$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \varphi$.

- Dla każdej σ oraz każdych $\varphi, \psi \in L(\sigma)$ istnieje $\chi \in L(\sigma)$ taka, że dla każdej $\mathfrak{A} \in Str_{\sigma}$:

  $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \chi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \varphi$ lub $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$.

Jeśli $\mathcal{L}$ ma własność spójników Boolowskich, to będziemy używać oznaczeń, odpowiednio, $\neg\varphi$ oraz $\varphi \vee \psi$ dla formuły χ, o której mowa powyżej. W podobny sposób określamy też pozostałe spójniki Boolowskie logiki $\mathcal{L}$. Jest to oczywiście uproszczenie notacyjne: dla pełnej poprawności trzeba byłoby używać np. symboli $\neg^{\mathcal{L}}$, $\vee^{\mathcal{L}}$, itd.

Powiemy, że logika $\mathcal{L}$ ma *własność relatywizacji*, gdy dla każdej σ oraz $\varphi \in L(\sigma)$ oraz każdego jednoargumentowego predykatu U istnieje $\psi \in L(\sigma \cup \{U\})$ takie, że: $(\mathfrak{A}, U^A) \models^{\mathcal{L}} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[U^A]^{\mathfrak{A}} \models^{\mathcal{L}} \varphi$, dla wszystkich $\mathfrak{A} \in Str_{\sigma}$ oraz wszystkich σ-domkniętych podzbiorów $U^A \subseteq A = dom(\mathfrak{A})$. Tutaj $[U^A]^{\mathfrak{A}}$ jest podstrukturą $\mathfrak{A}$ o uniwersum U^A. Jeśli $\mathcal{L}$ ma własność relatywizacji, to niech φ^U oznacza formułę ψ, o której mowa w powyższej definicji.

* * *

Przed sformułowaniem następnej własności logik abstrakcyjnych potrzebne będzie przypomnienie pewnych faktów z semantyki KRP.

Przypomnijmy, że dla dowolnej σ, dowolnego zbioru zdań Φ z $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ oraz symboli: n-argumentowego predykatu P, n-argumentowego symbolu funkcyjnego F oraz stałej indywidualnej c takich, że $P \notin \sigma$, $F \notin \sigma$ oraz $c \notin \sigma$ mówimy, że:

- formuła $\forall v_0 \ldots \forall v_{n-1}(P(v_0, \ldots, v_{n-1}) \equiv \varphi(v_0, \ldots, v_{n-1}))$ jest σ-definicją P w Φ;

- formuła $\forall v_0 \ldots \forall v_{n-1} \forall v_n(F(v_0, \ldots, v_{n-1}) = v_n \equiv \varphi(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n))$ jest σ-definicją F w Φ, gdy $\Phi \models \exists! v_n \varphi(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n)$;

- formuła $\forall v_0(c = v_0 \equiv \varphi(v_0))$ jest σ-definicją c w Φ, gdy $\Phi \models \exists! v_0 \varphi(v_0)$.

Jeśli Δ jest zbiorem σ-definicji dla predykatów $P \in \tau - \sigma$, symboli funkcyjnych $F \in \tau - \sigma$ oraz stałych indywidualnych $c \in \tau - \sigma$, to dla każdej $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$ takiej, że $\mathfrak{A} \models \Phi$ istnieje dokładnie jedna struktura $\mathfrak{A}^\Delta \in Str_{\tau-\sigma}$ taka, że $\mathfrak{A}^\Delta \upharpoonright \sigma = \mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{A}^\Delta \models \Delta$.

Rozważamy teraz sygnatury σ^Δ takie, że $\sigma \subseteq \sigma^\Delta$ oraz Δ jest zbiorem σ-definicji symboli z $\sigma^\Delta - \sigma$.

Niech Φ będzie zbiorem zdań sygnatury σ. Wtedy każdej formule ψ o n zmiennych wolnych można przyporządkować formułę ψ^Δ taką, że:

- Jeśli $\mathfrak{A} \in Str_\sigma, \mathfrak{A} \models \Phi$ oraz $a_0, \ldots, a_{n-1} \in dom(\mathfrak{A})$, to: $\mathfrak{A}^\Delta \models \psi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A} \models \psi^\Delta[a_0, \ldots, a_{n-1}]$.

- $\Phi \cup \Delta \models \psi \equiv \psi^\Delta$.

W konsekwencji, jeśli $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A}^\Delta \equiv \mathfrak{B}^\Delta$.

Powyższe fakty pozwalają na przejście od dowolnych sygnatur do sygnatur czysto relacyjnych, tj. takich, które zawierają jedynie predykaty. Inaczej mówiąc, możemy każdy n-argumentowy symbol funkcyjny f zamienić na $n{+}1$-argumentowy symbol relacyjny (predykat) F oraz każdą stałą indywidualną c zastąpić jednoargumentowym predykatem C. Niech σ^r oznacza sygnaturę w ten sposób utworzoną z sygnatury σ. Każdej strukturze $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$ przyporządkowujemy wtedy strukturę $\mathfrak{A}^r$ określoną w sposób następujący:

- $A^r = dom(\mathfrak{A}^r) = A = dom(\mathfrak{A})$;

- dla predykatów $P \in \sigma$ niech: interpretacja P w $\mathfrak{A}^r$ będzie identyczna z interpretacją P w $\mathfrak{A}$;

- dla n-argumentowego symbolu funkcyjnego $f \in \sigma$ niech $F^{\mathfrak{A}^r}$ będzie wykresem funkcji $f^{\mathfrak{A}}$, czyli $F^{\mathfrak{A}^r}(a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = a_n$;
- dla stałej indywidualnej $c \in \sigma$, niech $C^{\mathfrak{A}^r}(a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c^{\mathfrak{A}} = a$.

Dla każdej formuły ψ o n zmiennych wolnych w języku o sygnaturze σ istnieje wtedy formuła ψ^r w języku o sygnaturze σ^r taka, że dla wszystkich $\mathfrak{A}$ oraz wszystkich $a_0, \ldots, a_{n-1} \in dom(\mathfrak{A})$: $\mathfrak{A} \models \psi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A}^r \models \psi^r[a_0, \ldots, a_{n-1}]$.

W konsekwencji, dla dowolnych $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A}^r \equiv \mathfrak{B}^r$.

Te wiadomości wystarczają do sformułowania następnej własności logik abstrakcyjnych.

* * *

Powiemy, że logika $\mathcal{L}$ *dopuszcza zastąpienie symboli funkcyjnych oraz stałych indywidualnych poprzez symbole relacyjne*, gdy dla dowolnej σ:

- dla każdej $\varphi \in L(\sigma)$ istnieje $\psi \in L(\sigma^r)$ taka, że dla wszystkich $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$: $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A}^r \models_{\mathcal{L}} \psi$.

Jeśli logika $\mathcal{L}$ ma powyższą własność, to formułę ψ istniejącą na mocy definicji wyżej będziemy oznaczać przez φ^r.

Powiemy, że logika $\mathcal{L}$ jest *regularna*, gdy:

- $\mathcal{L}$ ma własność spójników Boolowskich;
- $\mathcal{L}$ ma własność relatywizacji;
- $\mathcal{L}$ dopuszcza zastąpienie symboli funkcyjnych oraz stałych indywidualnych poprzez symbole relacyjne.

Następujące pojęcia przenosimy z KRP na wypadek logik abstrakcyjnych:

- zdanie $\varphi \in L(\sigma)$ nazywamy *spełnialnym* w logice $\mathcal{L}$, gdy $Mod^\sigma_{\mathcal{L}} \neq \emptyset$;
- zbiór $\Phi \subseteq L(\sigma)$ nazywamy *spełnialnym* w logice $\mathcal{L}$, gdy $\bigcap\limits_{\varphi \in \Phi} Mod^\sigma_{\mathcal{L}} \neq \emptyset$;
- zdanie $\varphi \in L(\sigma)$ nazywamy *prawdziwym* w logice $\mathcal{L}$, gdy $Mod^\sigma_{\mathcal{L}} = Str_\sigma$;

- piszemy $\Phi \models^{\mathcal{L}} \varphi$, gdy każdy $\mathcal{L}$-model wszystkich zdań z Φ jest także $\mathcal{L}$-modelem φ (czyli gdy $Mod(\Phi) = \bigcap\{Mod(\psi) : \psi \in \Phi\} \subseteq Mod(\varphi)$).

Mówimy, że logika $\mathcal{L}$ ma własność:

- *Löwenheima-Skolema*, gdy każde zdanie $\mathcal{L}$-spełnialne ma model przeliczalny.
- *zwartości*, gdy dla dowolnego $\Phi \subseteq L(\sigma)$, jeśli każdy skończony podzbiór zbioru Φ jest $\mathcal{L}$-spełnialny, to Φ jest $\mathcal{L}$-spełnialny.

Algebraiczna charakteryzacja elementarnej równoważności

Jest rzeczą ważną (oraz interesującą), że pojęcia semantyczne możemy charakteryzować w terminach matematycznych. W szczególności, okazuje się, że podstawowe pojęcia semantyczne mogą zostać scharakteryzowane w (prostych) terminach algebraicznych.

Niech $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$. Mówimy, że f jest *częściowym izomorfizmem* $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$, gdy:

- f jest injekcją o dziedzinie $dom(f)$ zawartej w $dom(\mathfrak{A})$ oraz zbiorze wartości $rng(f)$ zawartym w $dom(\mathfrak{B})$
- dla dowolnego n-argumentowego predykatu $P \in \sigma$ oraz dowolnych elementów $a_0, \ldots, a_{n-1} \in dom(f)$: $P^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P^{\mathfrak{B}}(f(a_0), \ldots, f(a_{n-1}))$;
- dla dowolnego n-argumentowego symbolu funkcyjnego $F \in \sigma$ oraz dowolnych $a_0, \ldots, a_{n-1} \in dom(f)$: $F^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $F^{\mathfrak{B}}(f(a_0), \ldots, f(a_{n-1})) = f(a)$;
- dla dowolnej stałej indywidualnej $c \in \sigma$ oraz $a \in dom(f)$: $c^{\mathfrak{A}} = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c^{\mathfrak{B}} = f(a)$.

Przez $Part(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ będziemy oznaczać rodzinę wszystkich częściowych izomorfizmów z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$.

Gdy σ jest czysto relacyjna oraz $a_0, \ldots, a_{n-1} \in dom(\mathfrak{A})$, $b_0, \ldots, b_{n-1} \in dom(\mathfrak{B})$, oraz $f \in Part(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ jest taki, że $f(a_i) = b_i$ dla wszystkich $i < n$, to dla każdej formuły atomowej ψ o n zmiennych wolnych zachodzi: $\mathfrak{A} \models \psi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models \psi[b_0, \ldots, b_{n-1}]$.

Pojedyncze częściowe izomorfizmy nie zachowują jednak (w powyższym sensie) *dowolnych* formuł. Jak się okaże, dopiero pewne *rodziny* częściowych izomorfizmów pozwalają o takim zachowywaniu dowolnych formuł przesądzać, a tym samym rodziny takie pozwalają scharakteryzować elementarną równoważność struktur relacyjnych.

Będziemy identyfikować odwzorowania z ich (teorio-mnogościowymi) wykresami, czyli odwzorowanie f identyfikujemy z wykresem $\{(x, f(x)) : x \in dom(f)\}$.

Powiemy, że $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są *skończenie izomorficzne*, gdy istnieje ciąg $(I_n)_{n\in\omega}$ o następujących własnościach:

- Każdy I_n jest niepustym zbiorem częściowych izomorfizmów z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$.
- Jeśli $f \in I_{n+1}$ oraz $a \in dom(\mathfrak{A})$, to istnieje $g \in I_n$ taki, że $f \subseteq g$ oraz $a \in dom(g)$.
- Jeśli $f \in I_{n+1}$ oraz $b \in dom(\mathfrak{B})$, to istnieje $g \in I_n$ taki, że $f \subseteq g$ oraz $b \in rng(g)$.

Jeśli rodzina $(I_n)_{n\in\omega}$ ma powyższe własności, to piszemy: $(I_n)_{n\in\omega} : \mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$. Jeśli $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są skończenie izomorficzne, to piszemy $\mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$.

Powiemy, że $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są *częściowo izomorficzne*, gdy istnieje zbiór I taki, że:

- I jest niepustym zbiorem częściowych izomorfizmów z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$.
- Jeśli $f \in I$ oraz $a \in dom(\mathfrak{A})$, to istnieje $g \in I$ taki, że $f \subseteq g$ oraz $a \in dom(g)$.
- Jeśli $f \in I$ oraz $b \in dom(\mathfrak{A})$, to istnieje $g \in I$ taki, że $f \subseteq g$ oraz $b \in rng(g)$.

Jeśli rodzina I ma powyższe własności, to piszemy: $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$. Jeśli $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są skończenie izomorficzne, to piszemy $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.

Zachodzą następujące fakty:

- Jeśli $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.
- Jeśli $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$.
- Jeśli $\mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$ oraz $\mathfrak{A}$ jest skończona, to $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.
- Jeśli $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$ oraz $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są co najwyżej przeliczalne, to $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Charakterystykę elementarnej równoważności, która nie odwołuje się do własności języka podaje TWIERDZENIE FRAÏSSÉ'GO:

- Dla dowolnej skończonej σ oraz $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$.

Przypomnijmy pojęcie *kwantyfikatorowego rzędu formuły*:

- $qr(\varphi) = 0$, gdy φ jest atomowa;
- $qr(\neg\varphi) = qr(\varphi)$
- $qr(\varphi \vee \psi) = \max\{qr(\varphi), qr(\psi)\}$ (podobnie dla innych funktorów dwuargumentowych);
- $qr(\exists x\varphi) = qr(\varphi) + 1$.

Powiemy, że struktury $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są m*-izomorficzne*, gdy istnieje ciąg $I_0, \ldots, I_m$ niepustych zbiorów częściowych izomorfizmów z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$ taki, że:

- Jeśli $n + 1 \leqslant m$, $f \in I_{n+1}$ oraz $a \in dom(\mathfrak{A})$, to istnieje $g \in I_n$ taki, że $f \subseteq g$ oraz $a \in dom(g)$.
- Jeśli $n + 1 \leqslant m$, $f \in I_{n+1}$ oraz $b \in dom(\mathfrak{B})$, to istnieje $g \in I_n$ taki, że $f \subseteq g$ oraz $b \in rng(g)$.

Jeśli $I_0, \ldots, I_m$ jest ciągiem o powyższych własnościach, to piszemy $(I_n)_{n\leqslant m} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$. Jeśli $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są m-izomorficzne, to piszemy $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$.

W dowodzie twierdzenia Fraïssé'go wykorzystujemy następujące fakty:

- Niech $(I_n)_{n\in\omega} : \mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$. Wtedy dla każdej formuły φ o k zmiennych wolnych: jeśli $qr(\varphi) \leqslant n$, $f \in I_n$ oraz $a_0, \ldots a_{k-1} \in dom(f)$:

  $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots a_{k-1}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models \varphi[f(a_0), \ldots f(a_{k-1})]$.
- Jeśli $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ spełniają te same zdania o rzędzie kwantyfikatorowym $\leqslant m$.
- Dla każdych n i r istnieje tylko skończenie wiele klas równoważności względem relacji równoważności logicznej w zbiorze wszystkich formuł o r zmiennych wolnych i o rzędzie kwantyfikatorowym $\leqslant n$.
- Jeśli $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$.
- Jeśli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ spełniają te same zdania o rzędzie kwantyfikatorowym $\leqslant m$, to $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$.
- Niech σ będzie skończona i czysto relacyjna. Wtedy dla każdych struktur $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$ następujące warunki są równoważne:

  1. $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$
  2. $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ spełniają te same zdania o rzędzie kwantyfikatorowym $\leqslant m$.

4.1.2 Twierdzenia Lindströma

W tym punkcie rozważamy logiki regularne $\mathcal{L}$ takie, że $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leqslant \mathcal{L}$. Pokażemy m.in., że $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ jest $\leqslant$-maksymalną logiką o wybranych naturalnych własnościach.

Jeśli φ jest zdaniem $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ sygnatury σ, to przez φ^* będziemy oznaczać zdanie z $\mathcal{L}$ o tych samych modelach, co φ, czyli takie, że $Mod^{\sigma}_{\mathcal{L}_{\omega\omega}} = Mod^{\sigma}_{\mathcal{L}}(\varphi^*)$. Dla zbioru Φ zdań języka $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ (ustalonej sygnatury σ) niech $\Phi^* = \{\varphi^* : \varphi \in \Phi\}$.

Zanim przejdziemy do dowodu twierdzenia Lindströma udowodnimy kilka lematów potrzebnych w tym dowodzie. Dowód twierdzenia Lindströma nie jest całkiem prosty — można go rozłożyć na części i śledzić uważnie każdą z tych części, a potem uświadomić sobie, jak składają się one w całość.

LEMAT 1.

Jeśli $\mathcal{L}$ jest zwarta oraz $\Phi \cup \{\varphi\}$ jest zbiorem zdań logiki $\mathcal{L}$ sygnatury σ takim, że $\Phi \models^{\mathcal{L}} \varphi$, to istnieje skończony zbiór $\Phi_0 \subseteq \Phi$ taki, że $\Phi_0 \models^{\mathcal{L}} \varphi$.

DOWÓD.

Niech $\mathcal{L}$ będzie zwarta. Ponieważ $\mathcal{L}$ ma własność spójników Boolowskich, istnieje formuła $\neg\varphi$. Dokładniej, powinniśmy pisać np.: $\neg_{\mathcal{L}}\varphi$, ale ponieważ istotne dalej będą jedynie własności semantyczne logiki, upraszczamy ten pedantyczny zapis.

Skoro $\Phi \models^{\mathcal{L}} \varphi$, to zbiór $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ nie jest spełnialny. Na mocy zwartości $\mathcal{L}$, istnieje skończony podzbiór $\Phi_0 \subseteq$ taki, że $\Phi_0 \cup \{\neg\varphi\}$ nie jest spełnialny. Wtedy jednak $\Phi_0 \models^{\mathcal{L}} \varphi$, co kończy dowód lematu 1.

LEMAT 2.

Niech $\mathcal{L}$ będzie zwarta oraz $\psi \in L(\sigma)$. Wtedy istnieje skończony zbiór $\sigma_0 \subseteq \sigma$ taki, że dla wszystkich $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_{\sigma}$: jeśli $\mathfrak{A} \upharpoonright \sigma_0 \cong \mathfrak{B} \upharpoonright \sigma_0$, to $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \psi$.

DOWÓD.

Ograniczymy się do przypadku, gdy σ jest czysto relacyjna (tylko taki przypadek będzie nam później potrzebny).

Wybierzmy nowe symbole jednoargumentowe (predykaty): U, V oraz jednoargumentowy symbol funkcyjny f. Zbudujemy teraz zbiór Φ zdań w sygnaturze $\sigma \cup \{U, V, f\}$, „mówiących”, że f jest izomorfizmem podstruktury generowanej przez U w podstrukturę generowaną przez V. Elementami Φ są:

- $\exists x\, U(x)$
- $\exists x\, V(x)$

- $\forall x\ (U(x) \to V(f(x)))$
- $\forall y\ (V(y) \to \exists x\ (U(x) \land f(x) = y))$
- $\forall x \forall y\ ((U(x) \land V(y) \land f(x) = f(y)) \to x = y)$
- $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ ((U(x_1) \land \ldots \land U(x_n)) \to (R(x_1, \ldots, x_n) \equiv R(f(x_1), \ldots, f(x_n)))$

(ostatni z warunków zapisujemy dla każdego n-argumentowego predykatu $R \in \sigma$). Używamy tu symbolu $=$ dla *predykatu* identyczności; nie należy go oczywiście mylić z symbolem $=$ używanym dla *relacji* identyczności w metajęzyku.

Wtedy zachodzi:
(1) $\Phi^* \models^{\mathcal{L}} (\psi^U \equiv \psi^V)$.

Udowodnimy (1). Jeśli $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$ jest taka, że $(\mathfrak{A}, U^A, V^A, f^A) \models^{\mathcal{L}} \Phi^*$ (czyli $(\mathfrak{A}, U^A, V^A, f^A) \models \Phi$), to: U^A oraz V^A są niepuste, a $f^A \restriction U^A$ jest izomorfizmem $[U^A]^{\mathfrak{A}}$ na $[V^A]^{\mathfrak{A}}$. Przypominamy, że stosujemy następujące konwencje notacyjne:

- A oznacza $dom(\mathfrak{A})$
- U^A oznacza interpretację predykatu U w A
- $[U^A]^{\mathfrak{A}}$ oznacza podstrukturę struktury $\mathfrak{A}$, której uniwersum jest zbiór U^A i której relacje otrzymujemy z relacji w $\mathfrak{A}$, ograniczając je do U^A.

Na mocy własności izomorfizmu (zobacz: definicja logik abstrakcyjnych) mamy: $[U^A]^{\mathfrak{A}} \models^{\mathcal{L}} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[V^A]^{\mathfrak{A}} \models^{\mathcal{L}} \psi$. Ponieważ $\mathcal{L}$ ma własność relatywizacji (zobacz: definicja logik regularnych), więc: $(\mathfrak{A}, U^A) \models^{\mathcal{L}} \psi^U$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\mathfrak{A}, V^A) \models^{\mathcal{L}} \psi^V$. Ponieważ $\mathcal{L}$ ma własność spójników Boolowskich (zobacz: definicja logik regularnych) oraz własność reduktów (zobacz: definicja logik abstrakcyjnych), więc: $(\mathfrak{A}, U^A, V^A, f^A) \models^{\mathcal{L}} \psi^U \equiv \psi^V$. To kończy dowód warunku (1).

Na mocy zwartości $\mathcal{L}$ otrzymujemy skończony zbiór $\Phi_0 \subseteq \Phi$ taki, że:
(2) $\Phi_0^* \models^{\mathcal{L}} (\psi^U \equiv \psi^V)$.

Ponieważ Φ składa się ze zdań pierwszego rzędu, możemy wybrać skończony zbiór $\sigma_0 \subseteq \sigma$ taki, że Φ_0 składa się z σ_0-zdań (czyli zdań z języka o sygnaturze σ_0). Pokażemy, że σ_0 spełnia tezę lematu 2.

Niech $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$ i niech $\pi : \mathfrak{A} \restriction \sigma_0 \cong \mathfrak{B} \restriction \sigma_0$. Możemy założyć, że dziedziny tych struktur, czyli A i B są rozłączne: $A \cap B = \emptyset$. Gdyby tak nie było, to wzięlibyśmy izomorficzną kopię $\mathfrak{B}$ o uniwersum rozłącznym zA, korzystając z własności izomorfizmu (zobacz: definicja logik abstrakcyjnych).

Zdefiniujemy strukturę $(\mathfrak{C}, U^C, V^C, f^C) \in Str_{\sigma \cup \{U,V,f\}}$. Uniwersum tej struktury to $C = A \cup B$. Jej relacje (i jedną funkcję) definiujemy następująco:

- $R^C = R^A \cup R^B$ dla $R \in \sigma$ [uwaga: σ jest czysto relacyjna]
- $U^C = A$
- $V^C = B$
- f^C definiujemy tak, aby $f^C \upharpoonright U^C = \pi$.

Wtedy $(\mathfrak{C}, U^C, V^C, f^C)$ jest modelem Φ_0, a więc mamy także:

$$(\mathfrak{C}, U^C, V^C, f^C) \models^{\mathcal{L}} \Phi_0^*.$$

Na mocy (2) dostajemy: $(\mathfrak{C}, U^C, V^C, f^C) \models^{\mathcal{L}} (\psi^U \equiv \psi^V)$.

Ponieważ $[U^C]^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{A}$ oraz $[V^C]^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{B}$, więc (skoro $\mathcal{L}$ ma własność spójników Boolowskich oraz relatywizacji): $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \psi$. To kończy dowód lematu 2.

Niech $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$. Powiemy, że $\mathfrak{A}$ jest *$\mathcal{L}$-równoważna* z $\mathfrak{B}$, gdy dla każdego σ-zdania ψ z $\mathcal{L}$: $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \psi$. Jeśli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są $\mathcal{L}$-równoważne, to piszemy $\mathfrak{A} \equiv_{\mathcal{L}} \mathfrak{B}$. Relacja elementarnej równoważności pokrywa się z relacją $\mathcal{L}_{\omega\omega}$-równoważności i będzie, jak dotychczas oznaczana przez $\equiv$.

LEMAT 3.

Niech $\mathcal{L}$ będzie zwarta. Jeśli każde dwie elementarnie równoważne struktury są także $\mathcal{L}$-równoważne, to $\mathcal{L} \sim \mathcal{L}_{\omega\omega}$.

DOWÓD.

Ponieważ $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leqslant \mathcal{L}$ (co zakładaliśmy na początku rozważań w całym tym punkcie), więc musimy pokazać, że $\mathcal{L} \leqslant \mathcal{L}_{\omega\omega}$, czyli że dla każdego σ oraz każdego zdania $\psi \in L(\sigma)$ istnieje σ-zdanie pierwszego rzędu φ takie, że $Mod_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(\varphi) = Mod_{\mathcal{L}}(\psi)$.

Niech ψ będzie zdaniem spełnialnym. W przeciwnym przypadku możemy wziąć za φ np. zdanie $\forall x\ \neg x = x$ i teza lematu będzie trywialnie spełniona.

Twierdzimy, że:

(1) Dla każdej $\mathfrak{A} \in Mod_{\mathcal{L}}(\psi)$ istnieje σ-zdanie $\varphi_{\mathfrak{A}} \in L(\sigma)$ takie, że $\mathfrak{A} \models \varphi_{\mathfrak{A}}$ oraz $\varphi_{\mathfrak{A}}^* \models \psi$.

Dowód (1) przeprowadzimy metodą wprost. Niech $\mathfrak{A} \in Mod_{\mathcal{L}}(\psi)$. Wtedy zachodzi: $Th(\mathfrak{A})^* \models^{\mathcal{L}} \psi$. Jest tak, ponieważ jeśli $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} Th(\mathfrak{A})^*$, czyli $\mathfrak{B} \models Th(\mathfrak{A})$, to $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Z założenia mamy $\mathfrak{A} \equiv_{\mathcal{L}} \mathfrak{B}$, a więc $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \psi$.

Na mocy zwartości $\mathcal{L}$ istnieje liczba r oraz zdania $\varphi_0, \ldots, \varphi_r \in Th(\mathfrak{A})$ takie, że $\{\varphi_0^*, \ldots, \varphi_r^*\} \models^{\mathcal{L}} \psi$. Niech $\varphi_{\mathfrak{A}}$ będzie koniunkcją $\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_r$. Wtedy $\varphi_{\mathfrak{A}} \in Th(\mathfrak{A})$, czyli $\mathfrak{A} \models \varphi_{\mathfrak{A}}$ oraz $\varphi_{\mathfrak{A}}^* \models^{\mathcal{L}} \psi$. To kończy dowód (1).

Na mocy (1) otrzymujemy teraz:

(2) $\quad Mod_{\mathcal{L}}(\psi) = \bigcup_{\mathfrak{A} \in Mod_{\mathcal{L}}(\psi)} Mod_{\mathcal{L}}(\varphi^*_{\mathfrak{A}})$.

Pokażemy, że istnieją $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n \in Mod_{\mathcal{L}}(\psi)$ takie, iż:

(3) $\quad Mod_{\mathcal{L}}(\psi) = Mod_{\mathcal{L}}(\varphi^*_{\mathfrak{A}_0}) \cup \ldots \cup Mod_{\mathcal{L}}(\varphi^*_{\mathfrak{A}_0})$.

W przeciwnym przypadku (tj. gdyby (3) miało nie zachodzić), dla każdej skończonej liczby modeli $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n \in Mod_{\mathcal{L}}(\psi)$ mielibyśmy:

$Mod_{\mathcal{L}}(\varphi^*_{\mathfrak{A}_0}) \cup \ldots \cup Mod_{\mathcal{L}}(\varphi^*_{\mathfrak{A}_0}) \subsetneqq Mod_{\mathcal{L}}(\psi)$.

Wtedy każdy skończony podzbiór zbioru $\{\neg\psi\} \cup \{\neg\varphi^*_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \in Mod_{\mathcal{L}}(\psi)\}$ byłby spełnialny, a więc na mocy zwartości $\mathcal{L}$ cały ten zbiór byłby spełnialny, co daje sprzeczność z (2).

Na mocy (3) otrzymujemy:

$Mod_{\mathcal{L}}(\psi) = Mod_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(\varphi_{\mathfrak{A}_0}) \cup \ldots \cup Mod_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(\varphi_{\mathfrak{A}_n}) = Mod_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(\varphi_{\mathfrak{A}_0} \vee \ldots \vee \varphi_{\mathfrak{A}_n})$.

Dla φ o postaci $\varphi_{\mathfrak{A}_0} \vee \ldots \vee \varphi_{\mathfrak{A}_n}$ zachodzi zatem $Mod_{\mathcal{L}_{\omega\omega}} = Mod_{\mathcal{L}}(\psi)$. To kończy dowód lematu 3.

I TWIERDZENIE LINDSTRÖMA.

Niech $\mathcal{L}$ będzie regularna i $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leqslant \mathcal{L}$. Jeśli $\mathcal{L}$ jest zwarta i ma własność Löwenheima-Skolema, to $\mathcal{L} \sim \mathcal{L}_{\omega\omega}$.

DOWÓD.

Wystarczy pokazać, że $\mathcal{L} \leqslant \mathcal{L}_{\omega\omega}$.

Ponadto, na mocy lematu 3 wystarczy pokazać, że dla wszystkich σ:

($\bigstar$) $\quad$ Dla wszystkich $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_{\sigma}$, jeśli $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} \equiv_{\mathcal{L}} \mathfrak{B}$.

Możemy przy tym ograniczyć się do sygnatur relacyjnych σ, z następującego powodu. Jeśli ($\bigstar$) zachodzi dla sygnatur relacyjnych σ, to gdy $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ przechodzimy do σ^r, $\mathfrak{A}^r$ oraz $\mathfrak{B}^r$ i otrzymujemy $\mathfrak{A}^r \equiv \mathfrak{B}^r$. Teraz ($\bigstar$) zachodzi dla sygnatur relacyjnych σ^r i mamy: $\mathfrak{A}^r \equiv_{\mathcal{L}} \mathfrak{B}^r$. Na mocy własności zamiany symboli funkcyjnych i stałych indywidualnych na predykaty (zobacz: definicja logiki regularnej), dla dowolnego $\psi \in L(\sigma)$ następujące warunki są równoważne:

- $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$
- $\mathfrak{A}^r \models^{\mathcal{L}} \psi^r$
- $\mathfrak{B}^r \models^{\mathcal{L}} \psi^r$ (ponieważ $\mathfrak{A}^r \equiv_{\mathcal{L}} \mathfrak{B}^r$)
- $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \psi$,

a zatem zachodzi $\mathfrak{A} \equiv_{\mathcal{L}} \mathfrak{B}$.

Dowód ($\bigstar$) dla sygnatur relacyjnych σ poprowadzimy nie wprost. Przypuśćmy, że dla pewnych $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_{\sigma}$ oraz pewnej $\psi \in L(\sigma)$:

(1) $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$ oraz $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \neg\psi$
(jak pamiętamy, powinniśmy właściwie pisać np. $\neg_{\mathcal{L}}$; korzystamy z tego, że $\mathcal{L}$ ma własność spójników Boolowskich).

Wybieramy ψ spełniającą (1) oraz (na mocy lematu 2) skończoną sygnaturę $\sigma_0 \subseteq \sigma$. Wtedy „znaczenie ψ zależy tylko od skończenie wielu symboli".

Skoro $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, to oczywiście także $\mathfrak{A} \upharpoonright \sigma_0 \equiv \mathfrak{B} \upharpoonright \sigma_0$, więc na mocy twierdzenia Fraïssé'go struktury $\mathfrak{A} \upharpoonright \sigma_0$ oraz $\mathfrak{B} \upharpoonright \sigma_0$ są skończenie izomorficzne. Otrzymujemy zatem, dla *odpowiedniego* $(I_n)_{n\in\omega}$:

(2) $(I_n)_{n\in\omega} : \mathfrak{A} \upharpoonright \sigma_0 \cong_e \mathfrak{B} \upharpoonright \sigma_0, \mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi, \mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \neg\psi.$

Istota dowodu zasadza się w tym, aby otrzymać teraz (na mocy własności zwartości oraz własności Löwenheima-Skolema) struktury *przeliczalne* $\mathfrak{A}'$ oraz $\mathfrak{B}'$ takie, że:

(3) $\mathfrak{A}' \upharpoonright \sigma_0 \cong_p \mathfrak{B}' \upharpoonright \sigma_0, \mathfrak{A}' \models^{\mathcal{L}} \psi, \mathfrak{B}' \models^{\mathcal{L}} \neg\psi.$

Gdy otrzymamy (3), to twierdzenie będzie udowodnione: ponieważ przeliczalne częściowo izomorficzne struktury $\mathfrak{A}' \upharpoonright \sigma_0$ oraz $\mathfrak{B}' \upharpoonright \sigma_0$ są izomorficzne, a zatem, na mocy wyboru σ_0 mamy: $\mathfrak{A}' \models^{\mathcal{L}} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B}' \models^{\mathcal{L}} \psi$, a to jest sprzeczność z (3). Trzeba zatem odrzucić przypuszczenie dowodu nie wprost warunku ($\bigstar$) i twierdzenie zachodzi.

Trzeba więc jedynie udowodnić (3). Dowód może sprawiać wrażenie nieco zawiłego. Będziemy, intuicyjnie mówiąc, podawać „opis" warunku (2) w logice $\mathcal{L}$.

Możemy założyć, że A i B, czyli dziedziny struktur $\mathfrak{A}$ i, odpowiednio, $\mathfrak{B}$, są rozłączne. Pamiętajmy także, że sygnatura σ jest czysto relacyjna.

Tworzymy sygnaturę σ^+ dodając do σ nowe symbole:

- jednoargumentowy symbol funkcyjny f
- jednoargumentowe predykaty P, U, V
- dwuargumentowe predykaty $<, I$
- trójargumentowy predykat G.

Zbudujemy strukturę $\mathfrak{C} \in Str_{\sigma^+}$, której uniwersum C będzie zawierało uniwersa struktur $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$, a także (jako elementy) wszystkie częściowe izomorfizmy I_n. W ten sposób $\mathcal{L}$ „opisze" skończoną izomorficzność $(I_n)_{n\in\omega} : \mathfrak{A} \upharpoonright \sigma_0 \cong_e \mathfrak{B} \upharpoonright \sigma_0$.

Niech zatem:

- (a) $C = A \cup B \cup \omega \cup \bigcup\limits_{n\in\omega} I_n$

- (b) $U^C = A$ oraz $[U^C]^{\mathfrak{C}\upharpoonright\sigma_0} = \mathfrak{A}$
- (c) $V^C = B$ oraz $[V^C]^{\mathfrak{C}\upharpoonright\sigma_0} = \mathfrak{B}$
- (d) $<^C$ jest naturalnym porządkiem w ω, a $f^C \upharpoonright \omega$ jest funkcją poprzednika, czyli $f^C(n+1) = n$, a $f^C(0) = 0$
- (e) $P^C = \bigcup_{n\in\omega} I_n$
- (f) $I^C(n, p)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n \in \omega$ oraz $p \in I_n$
- (g) $G^C(p, a, b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P^C(p)$, $a \in dom(p)$ oraz $p(a) = b$.

Teraz zbudujemy koniunkcję χ skończenie wielu poniższych zdań (i)–(viii) z $L(\sigma^+)$, dla której $\mathfrak{C}$ będzie modelem.

- (i) $\forall p\ (P(p) \to \forall x \forall y\ (G(p, x, y) \to (U(x) \wedge V(y))))$
- (ii) $\forall p\ (P(p) \to \forall x \forall y \forall u \forall v\ ((G(p, x, y) \wedge G(p, u, v)) \to (x = u \wedge y = v)))$
- (iii) $\forall p\ (P(p) \to \forall x_1 \ldots x_n \forall y_1 \ldots y_n\ ((G(p, x_1, y_1) \wedge \ldots \wedge G(p, x_n, y_n)) \to (R(x_1, \ldots, x_n) \equiv R(y_1, \ldots y_n))))$

  dla każdego n-argumentowego predykatu $R \in \sigma_0$
- (iv) aksjomaty częściowego porządku dla $<$ oraz fakt,że pole $<$ jest uporządkowane przez $<$ wraz z funkcją poprzednika f:

  $\forall x\ (\exists y\ (y < x) \to (f(x) < x \wedge \neg\exists z\ (f(x) < z \wedge z < x)))$
- (v) $\forall x\ (\exists y\ (x < y \vee y < x) \to \exists p\ (P(p) \wedge I(x, p)))$

  (czyli: jeśli x jest w polu $<$, to $I_x = \{p : P(p) \wedge I(x, p)\} \neq \emptyset$)
- (vi) $\forall x \forall p \forall u\ ((f(x) < x \wedge I(x, p) \wedge U(u)) \to \exists q \exists v\ (I(f(x), q) \wedge G(q, u, v) \wedge \forall x' \forall y'\ (G(p, x', y') \to G(q, x', y'))))$

  (to jest, jak widać, własność rozszerzania częściowych izomorfizmów „w przód")
- (vii) $\forall x \forall p \forall v\ ((f(x) < x \wedge I(x, p) \wedge V(v)) \to \exists q \exists u\ (I(f(x), q) \wedge G(q, u, v) \wedge \forall x' \forall y'\ (G(p, x', y') \to G(q, x', y'))))$

  (to jest, jak widać, własność rozszerzania częściowych izomorfizmów „w tył")

- (viii) $\exists x\, U(x) \wedge \exists y\, V(y) \wedge \psi^U \wedge (\neg\psi)^V$
  (pamiętamy, że $U^C = A$, $V^C = B$ oraz $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$ i $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \neg\psi$).

Uwaga: tu (i wcześniej) używamy predykatu identyczności $=$, którego nie należy mylić z (metajezykowym) symbolem relacji identyczności $=$.

Na mocy (i)–(iii), G opisuje wykres częściowego izomorfizmu z σ_0-podstruktury generowanej przez U w σ_0-podstrukturę generowaną przez V.

Wybieramy nową stałą indywidualną c. Termy $c, f(c), f(f(c)), \ldots$ będziemy oznaczać $f^0c, f^1c, f^2c, \ldots$. Niech $\Psi = \{\chi\} \cup \{f^{n+1}c < f^n; n \in \omega\}$. Każdy skończony podzbiór zbioru Ψ ma model, a mianowicie model $\mathfrak{C}' = (\mathfrak{C}, c^{C'})$, gdzie $c^{C'}$ jest wystarczająco dużą liczbą naturalną. Na mocy zwartości logiki $\mathcal{L}$ istnieje model $(\mathfrak{D}, c^D)$ dla całego zbioru Ψ. Zbiór D zawiera nieskończony ciąg $<^D$-zstępujący, a mianowicie: $\ldots (f^2c)^D <^D (f^1c)^D <^D c^D$. Potrzebujemy *przeliczalnego* modelu o tej własności. Nie możemy jednak skorzystać bezpośrednio z własności Löwenheima-Skolema, bo dotyczy ona tylko *pojedynczych* zdań, a zbiór Ψ jest *nieskończonym* zbiorem zdań.

Rozszerzamy teraz sygnaturę $\sigma^+ \cup \{c\}$ o nowy jednoargumentowy predykat Q. Niech ϑ będzie $(\sigma^+ \cup \{c, Q\})$-zdaniem:

$$Q(c) \wedge \forall x\, (Q(x) \to (f(x) < x \wedge Q(f(x))))$$

(widać, że Q jest podzbiorem pola $<$: Q zawiera c i każdy element Q ma bezpośredni poprzednik, który także należy do Q).

Niech $Q^D = \{(f^nc)^D : n \in \omega\}$. Wtedy $(\mathfrak{D}, c^D, Q^D) \models^{\mathcal{L}} \chi \wedge \vartheta$.

Ponieważ $\chi \wedge \vartheta$ jest spełnialna, więc na mocy własności Löwenheima-Skolema istnieje (co najwyżej) przeliczalny model $(\mathfrak{E}, c^E, Q^E)$ dla $\chi \wedge \vartheta$.

Skoro w $\mathfrak{E}$ zachodzi (viii), to $U^E \neq \emptyset$ oraz $V^E \neq \emptyset$. Ponieważ σ jest relacyjna, więc U^E oraz V^E są uniwersami podstruktur. Niech:

- $\mathfrak{A}' = [U^E]^{\mathfrak{E}\restriction\sigma}$
- $\mathfrak{B}' = [V^E]^{\mathfrak{E}\restriction\sigma}$.

Pokażemy, że (co najwyżej) przeliczalne struktury $\mathfrak{A}'$ oraz $\mathfrak{B}'$ spełniają (3).

Na mocy (viii) mamy: $\mathfrak{E} \models^{\mathcal{L}} \psi^U$ oraz $\mathfrak{E} \models^{\mathcal{L}} (\neg\psi)^V$, a stąd otrzymujemy (na mocy własności relatywizacji):

(4) $\quad \mathfrak{A}' \models^{\mathcal{L}} \psi, \quad \mathfrak{B}' \models^{\mathcal{L}} \neg\psi.$

Z warunków (i)–(iii) wiemy, że każdy $p \in P^E$ odpowiada częściowemu izomorfizmowi z $\mathfrak{A}' \restriction \sigma_0$ w $\mathfrak{B}' \restriction \sigma_0$ (będziemy każdy taki częściowy izomorfizm oznaczać przez p).

Ponieważ $(\mathfrak{E}, c^E, Q^E) \models \vartheta$, więc dla każdego $n \in \omega$ element $e_n = (f^n c)^E$ należy do Q^E oraz elementy e_n tworzą ciąg zstępujący:

$$\ldots e_3 <^E e_2 <^E e_1 <^E e_0.$$

Niech $I = \{p :$ istnieje n taka, że $I^E(e_n, p)\}$. Na mocy (v) otrzymujemy, że $I \neq \emptyset$. Na mocy (vi) oraz (vii) otrzymujemy, że I ma własność rozszerzania w przód i w tył.

Dostajemy zatem:

$(5) \quad I : \mathfrak{A}' \restriction \sigma_0 \cong_p \mathfrak{B}' \restriction \sigma_0.$

Teraz (4) i (5) dają łącznie (3). Tym samym, dowód I twierdzenia Lindströma jest zakończony.

Udowodnimy jeszcze dwa lematy, który będą potrzebne w dowodzie II twierdzenia Lindströma.

LEMAT 4.

Niech $\mathcal{L}$ będzie logiką regularną, $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leqslant \mathcal{L}$. Niech $\mathcal{L}$ będzie zwarta i niech ma własność Löwenheima-Skolema. Niech wreszcie σ_0 będzie skończoną sygnaturą czysto relacyjną, c stałą indywidualną spoza σ_0 oraz ψ niech będzie σ_0-zdaniem logiki $\mathcal{L}$. Niech dla każdego $m \in \omega$ istnieją struktury $\mathfrak{A}_m$, $\mathfrak{B}_m$ takie, że:

$(\bigstar) \quad \mathfrak{A}_m \cong_m \mathfrak{B}_m, \mathfrak{A}_m \models^{\mathcal{L}} \psi, \mathfrak{B}_m \models^{\mathcal{L}} \neg\psi.$

Wtedy istnieje σ_1-zdanie χ_1, gdzie $\sigma_0 \cup \{<, c\} \subseteq \sigma_1$ oraz σ_1 jest skończona, takie, że:

- (a) Jeśli $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \chi_1$, to $(A, <^A)$ jest częściowym porządkiem, a c^A elementem A o skończonej liczbie $<^A$-poprzedników.
- (b) Dla każdego $m \in \omega$ istnieje $\mathfrak{A}$ taka, że $\mathfrak{A} \models \chi_1$ oraz c^A ma co najmniej m $<^A$-poprzedników.

DOWÓD.

W oznaczeniach poprzedniego dowodu, niech $\sigma = \sigma_0$, $\sigma_1 = \sigma^+ \cup \{c\}$ oraz χ_1 niech będzie koniunkcją χ i zdania stwierdzającego, że c leży w polu $<$.

Najpierw udowodnimy (b). Niech dla danego $m \in \omega$ struktury $\mathfrak{A}_m$, $\mathfrak{B}_m$ spełniają $(\bigstar)$ oraz niech $(I_n)_{n \leqslant m} : \mathfrak{A}_m \cong \mathfrak{B}_m$.

Definiujemy $\mathfrak{C}$ tak, jak w dowodzie I twierdzenia Lindströma, z następującymi modyfikacjami:

- (i) $<^C$ jest naturalnym porządkiem na $\{0, 1, \ldots, m\}$

- (ii) $P^C = \bigcup_{n \leqslant m} I_n$.

Niech $c^C = m$. Wtedy $(\mathfrak{C}, c^C)$ spełnia (b).

Dla dowodu (nie wprost) (a), przypuśćmy, że istnieje model $(\mathfrak{D}, c^D)$ dla χ_1, w którym c^D ma nieskończenie wiele $<^D$-poprzedników. Tak jak w dowodzie I twierdzenia Lindströma, z $(\mathfrak{D}, c^D)$ otrzymujemy dwie *izomorficzne* struktury $\mathfrak{A}'$ i $\mathfrak{B}'$ takie, że: $\mathfrak{A}' \models^{\mathcal{L}} \psi$ oraz $\mathfrak{B}' \models^{\mathcal{L}} \neg\psi$. To daje sprzeczność (izomorficzne modele muszą spełniać dokładnie te same zdania), a więc przypuszczenie dowodu nie wprost trzeba odrzucić. Tym samym dowód (a) oraz całego lematu jest zakończony.

LEMAT 5.

Niech $\mathcal{L}$ będzie logiką regularną, $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leqslant \mathcal{L}$. Niech σ będzie skończoną sygnaturą czysto relacyjną. Jeśli dla $\psi \in L(\sigma)$ nie istnieje zdanie pierwszego rzędu o tych samych modelach, co ψ, to dla każdego $m \in \omega$ istnieją struktury $\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_m \in Str_\sigma$ takie, że:

($\bigstar$) $\quad \mathfrak{A}_m \cong_m \mathfrak{B}_m, \mathfrak{A}_m \models^{\mathcal{L}} \psi$ oraz $\mathfrak{B}_m \models^{\mathcal{L}} \neg\psi$.

DOWÓD.

Załóżmy, że ψ jest spełnialna. W przeciwnym przypadku, teza lematu spełniona jest trywialnie: $Mod_{\mathcal{L}}(\psi) = Mod_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(\exists v\, \neg v = v)$.

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Przypuśćmy, że dla pewnego $m \in \omega$ oraz wszystkich struktur $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$:

(1) $\quad$ jeśli $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \psi$.

Niech $\varphi_0, \ldots, \varphi_k$ będą wszystkimi nierównoważnymi logicznie zdaniami pierwszego rzędu o rzędzie kwantyfikatorowym $\leqslant m$. Pamiętamy, że jeśli σ będzie skończoną sygnaturą czysto relacyjną, to istnieje tylko skończenie wiele takich nierównoważnych logicznie formuł (dowodzimy tego faktu w KRP, przez indukcję po złożoności formuł). Wtedy:

(2) $\quad \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $0 \leqslant i \leqslant k$ mamy: $\mathfrak{A} \models \varphi_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models \varphi_i$.

Dla $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$ niech $\varphi_{\mathfrak{A}}$ będzie koniunkcją wszystkich zdań ze zbioru:

$$\{\varphi_i : 0 \leqslant i \leqslant k \wedge \mathfrak{A} \models \varphi_i\} \cup \{\neg\varphi_i : 0 \leqslant i \leqslant k \wedge \mathfrak{A} \models \neg\varphi_i\}.$$

Na mocy (2) mamy wtedy, dla dowolnej $\mathfrak{B}$:

(3) $\quad \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}}$.

Niech φ będzie alternatywą (skończenie wielu!) zdań $\varphi_{\mathfrak{A}}$, dla których zachodzi $\mathfrak{A} \models \psi$, czyli φ jest zdaniem:

(4) $\quad \bigvee\{\varphi_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \in Str_\sigma \wedge \mathfrak{A} \models \psi\}$.

Pokażemy, że:

(5) $\quad Mod_{\mathcal{L}}(\psi) = Mod_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(\varphi)$
i uzyskamy sprzeczność z przypuszczeniem dowodu nie wprost.

Jeśli $\mathfrak{B}$ jest modelem ψ, to $\varphi_{\mathfrak{B}}$ należy do alternatywy (4) (jest jednym z jej członów). Ponieważ $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{B}}$, więc $\mathfrak{B} \models \varphi$.

Jeśli, z drugiej strony, $\mathfrak{B} \models \varphi$, to (na mocy (4)) istnieje $\mathfrak{A}$ taka, że $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \psi$ oraz $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}}$. Na mocy (3) mamy wtedy $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$, a na mocy (1) mamy $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \psi$.

Mamy stąd sprzeczność, gdyż równoważność: $\mathfrak{B} \models^{\mathcal{L}} \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models \varphi$ oznacza, że $Mod_{\mathcal{L}}(\psi) = Mod_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(varphi)$. Tak więc, przypuszczenie dowodu nie wprost musimy odrzucić, co kończy dowód lematu 5.

Przed sformułowaniem II twierdzenia Lindströma trzeba wprowadzić kilka pojęć, których twierdzenie to dotyczy. Zakładamy, że czytelnik ma podstawowe wiadomości dotyczące elementarnej teorii rekursji, a więc że zna np. pojęcie zbioru rekurencyjnego, zbioru rekurencyjnie przeliczalnego, funkcji rekurencyjnej, itp.

Powiemy, że logika $\mathcal{L}$ jest *efektywna*, gdy dla każdej rekurencyjnej sygnatury σ zbiór $L(\sigma)$ jest rekurencyjny oraz dla każdego zdania $\psi \in L(\sigma)$ istnieje skończona $\sigma_0 \subseteq \sigma$ taka, że $\psi \in L(\sigma_0)$.

Niech logiki $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}'$ będą efektywne. Piszemy:

- (a) $\mathcal{L} \leqslant_{eff} \mathcal{L}'$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja rekurencyjna F taka, że dla każdego $\psi \in L(\sigma)$ mamy: $F(\psi) \in L'(\sigma)$ oraz $Mod^{\sigma}_{\mathcal{L}}(\psi) = Mod^{\sigma}_{\mathcal{L}'}(F(\psi))$.

- (b) $\mathcal{L} \sim_{eff} \mathcal{L}'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{L} \leqslant_{eff} \mathcal{L}'$ oraz $\mathcal{L}' \leqslant_{eff} \mathcal{L}$. Jeśli $\mathcal{L} \sim_{eff} \mathcal{L}'$, to mówimy, że $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}'$ są *efektywnie równoważne*.

Dla przykładu:

- $\mathcal{L}_{\omega\omega}$, logika drugiego rzędu $\mathcal{L}^2$, słaba logika drugiego rzędu $\mathcal{L}^{w2}$, logika $\mathcal{L}(Q_1)$ (czyli logika z kwantyfikatorem „istnieje nieprzeliczalnie wiele") są efektywne
- $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ nie jest efektywna
- $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leqslant_{eff} \mathcal{L}^{w2}$
- $\mathcal{L}^{w2} \leqslant_{eff} \mathcal{L}^2$.

Mówimy, że logika $\mathcal{L}$ jest *efektywnie regularna*, gdy $\mathcal{L}$ jest efektywna oraz dla każdej rekurencyjnej sygnatury σ zachodzą następujące warunki:

- (i) istnieją funkcje rekurencyjne $\varphi \mapsto \neg\varphi$ oraz $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \vee \psi$ (i podobnie dla pozostałych spójników)

- (ii) dla każdego jednoargumentowego predykatu U istnieje funkcja rekurencyjna $\varphi \mapsto \varphi^U$

- (iii) istnieje funkcja rekurencyjna $\varphi \mapsto \varphi^r$ (przy tym sygnatura σ^r musi być rekurencyjna).

Niech logika $\mathcal{L}$ będzie efektywna. Mówimy, że zbiór zdań prawdziwych logiki $\mathcal{L}$ jest *rekurencyjnie przeliczalny*, gdy dla każdej rekurencyjnej sygnatury σ zbiór $\{\varphi \in L(\sigma) : \emptyset \models^{\mathcal{L}} \varphi\}$ jest rekurencyjnie przeliczalny. Mówiąc, że ten ostatni zbiór jest rekurencyjnie przeliczalny mamy oczywiście na myśli to, że zbiór kodów jego elementów (uzyskanych przez jakąś funkcję rekurencyjną, czyli np. przez numerację Gödlowską) jest rekurencyjnie przeliczalny.

II TWIERDZENIE LINDSTRÖMA

Niech $\mathcal{L}$ będzie efektywnie regularna i $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leqslant_{eff} \mathcal{L}$. Jeśli $\mathcal{L}$ ma własność Löwenheima-Skolema oraz zbiór zdań prawdziwych logiki $\mathcal{L}$ jest rekurencyjnie przeliczalny, to $\mathcal{L}_{\omega\omega} \sim_{eff} \mathcal{L}$.

DOWÓD.

Niech $\mathcal{L}$ spełnia założenia twierdzenia. Pokażemy, że $\mathcal{L} \leqslant_{eff} \mathcal{L}_{\omega\omega}$ w dwóch krokach:

- $(*)$ Najpierw pokażemy, że spełniony jest następujący warunek:

  $(\bigstar)$ Dla każdej rekurencyjnej sygnatury σ oraz każdego $\psi \in L(\sigma)$ istnieje $\varphi \in L_{\omega\omega}(\sigma)$ takie, że $Mod_{\mathcal{L}}(\psi) = Mod(\varphi)$.

- $(**)$ Potem pokażemy, że przejście od ψ do ϕ jest efektywne.

Ponieważ $\mathcal{L}$ jest efektywna, więc wystarczy rozważać skończone sygnatury rekurencyjne. Ponieważ dla $\mathcal{L}$ istnieje efektywny odpowiednik własności zastępowania symboli funkcyjnych i stałych indywidualnych przez predykaty, możemy ograniczyć się do sygnatur σ czysto relacyjnych.

Niech zatem σ będzie: rekurencyjna, skończona i relacyjna.

Poprowadzimy dowód kroku $(*)$ metodą nie wprost, korzystając z lematów 4 i 5 oraz z Twierdzenia Traktenbrota.

Przypuszczamy zatem, że $(\bigstar)$ nie zachodzi, czyli że $\psi \in L(\sigma)$ oraz że żadne zdanie pierwszego rzędu nie ma dokładnie tych samych modeli co ψ.

Na mocy lematu 5, dla każdej m istnieją $\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_m \in Str_\sigma$ takie, że:

- $\mathfrak{A}_m \cong_m \mathfrak{B}_m$

- $\mathfrak{A}_m \models^{\mathcal{L}} \psi$

- $\mathfrak{B}_m \models^{\mathcal{L}} \neg\psi$.

Spełnione są więc założenia lematu 4. Istnieją zatem: sygnatura σ_1 oraz zdanie χ_1 z tezy tego lematu.

Rozszerzamy σ_1 przez dodanie jednoargumentowego predykatu W i rozważamy zdanie $\vartheta \in L(\sigma_1 \cup \{W\})$ o następującej postaci:

$$\chi_1 \wedge \exists x\, W(x) \wedge \forall x\, (W(x) \to x < c).$$

Na mocy własności zdania χ_1 mamy wtedy:

- (a) Jeśli $\mathfrak{A} \in Str_{\sigma_1 \cup \{W\}}$ oraz $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \vartheta$, to zbiór W^A jest niepusty i skończony.
- (b) Dla każdej $m \geqslant 1$ istnieje $\mathfrak{A}$ taka, że $\mathfrak{A} \models \vartheta$ oraz W^A ma dokładnie m elementów.

Tak więc, jeśli $\mathfrak{A}$ przebiega wszystkie modele ϑ, to W^A przebiega wszystkie (niepuste) zbiory skończone (pamiętajmy, że wszystkie rozważane logiki mają własność izomorfizmu).

Z powyższych warunków (a) i (b) otrzymamy sprzeczność z przypuszczeniem dowodu nie wprost.

Na mocy twierdzenia Traktenbrota istnieje rekurencyjna i skończona sygnatura σ_2 taka, że zbiór wszystkich σ_2-zdań prawdziwych we wszystkich strukturach skończonych (tej sygnatury) nie jest zbiorem rekurencyjnie przeliczalnym.

Możemy założyć, że σ_2 jest czysto relacyjna i rozłączna z $\sigma_1 \cup \{W\}$.

Niech F będzie odwzorowaniem rekurencyjnym $\varphi \mapsto F(\varphi)$, ze zbioru $L(\sigma_2)$ w $L(\sigma_2)$ taką, że $Mod(\varphi) = Mod(F(\varphi))$. Wtedy dla wszystkich zdań $\varphi \in L(\sigma_2)$:

- ($\blacklozenge$) φ jest prawdziwe we wszystkich strukturach skończonych (sygnatury σ_2) wtedy i tylko wtedy, gdy $\models^{\mathcal{L}} \vartheta \to (F(\varphi))^W$.

Aby udowodnić równoważność ($\blacklozenge$), trzeba dowieść implikacji prostej oraz odwrotnej.

$\Rightarrow$ Niech φ będzie prawdziwe we wszystkich strukturach skończonych oraz $\mathfrak{A} \in Str_{\sigma_1 \cup \{W\} \cup \sigma_2}$ będzie taka, że $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \vartheta$. Na mocy (a), W^A jest niepusty i skończony, a więc $[W^A]^{\mathfrak{A}\restriction\sigma_2} \models^{\mathcal{L}} \varphi$, a stąd $[W^A]^{\mathfrak{A}\restriction\sigma_2} \models^{\mathcal{L}} F(\varphi)$. Wtedy $\mathfrak{A} \restriction \sigma_2 \models^{\mathcal{L}} (F(\varphi))^W$.

$\Leftarrow$ Na mocy (b), dla każdej $m \geqslant 1$ istnieje $\mathfrak{A}$ taka, że $\mathfrak{A} \models \vartheta$ i W^A ma dokładnie m elementów. Stąd $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} (F(\varphi))^W$, czyli $\mathfrak{A} \models^{\mathcal{L}} \varphi^W$. W konsekwencji, $[^A]^{\mathfrak{A}\restriction\sigma_2} \models \varphi$.

To kończy dowód ($\blacklozenge$), a tym samym dowód kroku $(*)$.

Przechodzimy do dowodu kroku $(**)$. Niech $g^\sigma_\mathcal{L}$ będzie funkcją rekurencyjną, przypisującą numery (np. numery Gödlowskie) zdaniom logiki $\mathcal{L}$, czyli zdaniom ustalonej sygnatury rekurencyjnej σ. Na mocy faktu, że zbiór zdań prawdziwych logiki $\mathcal{L}$ jest rekurencyjnie przeliczalny, dla każdej rekurencyjnej sygnatury σ istnieje dwuargumentowa relacja rekurencyjna, powiedzmy R, taka, że dla wszystkich zdań $\varphi \in L(\sigma)$:

- $\models^\mathcal{L} \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists m\ R(m, g^\sigma_\mathcal{L}(\varphi))$.

Ustalmy wyliczenie $\langle \psi_n : n \in \omega \rangle$ wszystkich σ-zdań logiki $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ takie, że przyporządkowanie $n \mapsto g^\sigma_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(\psi_n)$ jest rekurencyjne. Niech G będzie funkcją rekurencyjną taką, że dla σ-zdań logiki $\mathcal{L}$:

- $G(g^\sigma_\mathcal{L}(\varphi)) = ((\mu\langle m, n\rangle)R(m, g^\sigma_\mathcal{L}(\varphi \equiv_\mathcal{L} (\psi_n)^\mathcal{L})))_1$

(tu $\langle\rangle$ jest np. pierwotnie rekurencyjną funkcją kodującą (pary) Cantora, a $()_1$ jest pierwotnie rekurencyjną funkcją rzutu, na pierwszy argument pary; $\mu\ x\ [\ldots]$ jest efektywnym μ-operatorem, czytanym: „najmniejsze x takie, że $[\ldots]$"). Powyżej zaznaczyliśmy wyraźnie, że bierzemy spójnik równoważności z logiki $\mathcal{L}$ oraz, że rozważamy „przekład" formuły ψ_n na stosowne zdanie logiki $\mathcal{L}$.

Niech φ^* będzie formułą $\psi_{G(g^\sigma_\mathcal{L}(\varphi))}$. Wtedy rekurencyjne odwzorowanie $\varphi \mapsto \varphi^*$ poświadcza, że $\mathcal{L} \leqslant_{eff} \mathcal{L}_{\omega\omega}$.

Dowód II twierdzenia Lindströma został tym samym zakończony.

Przypomnijmy jeszcze sformułowanie twierdzenia Traktenbrota, na które powołujemy się w powyższym dowodzie (jego dowód podajemy w *Preliminariach matematycznych*, w dziale dotyczącym matematycznych modeli obliczalności).

> TWIERDZENIE TRAKTENBROTA. Istnieje skończona sygnatura σ taka, że zbiór wszystkich zdań (języka KRP o sygnaturze σ) prawdziwych we wszystkich strukturach skończonych należących do Str_σ nie jest rekurencyjnie przeliczalny.

Oprócz powyższych twierdzeń Lindströma, znaleziono cały szereg innych jeszcze twierdzeń, charakteryzujących logiki abstrakcyjne maksymalne jeśli chodzi o wybrane zestawy własności. Twierdzenia te dotyczą zarówno logik z uogólnionymi kwantyfikatorami, jak i logik infinitarnych. Także logiki wyższych rzędów mogą być oczywiście traktowane jako logiki abstrakcyjne w omówionym wyżej sensie.

4.1.3 Logiki z uogólnionymi kwantyfikatorami

Mostowski rozważał tzw. *kwantyfikatory numeryczne* Q_α, gdzie α jest liczbą porządkową. Znaczenie formuły $Q_\alpha x\varphi(x)$ określa się następująco:

- $\mathfrak{M} \models Q_\alpha x\varphi(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{a \in dom(\mathfrak{M}) : \mathfrak{M} \models \varphi(x)[a]\}$ ma moc nie mniejszą od $\aleph_\alpha$.

W szczególności, Q_0 jest kwantyfikatorem, za pomocą którego wyrazić można pojęcia: *nieskończenie wiele* oraz *skończenie wiele*, ponieważ formuła $Q_0x\varphi(x)$ jest spełniona w strukturze $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy w $dom(\mathfrak{M})$ istnieje co najmniej $\aleph_0$ obiektów, spełniających formułę $\varphi(x)$. Jak pamiętamy z elementarnego kursu logiki, pojęć tych nie można wyrazić w klasycznej logice pierwszego rzędu.

Mostowski formułuje pewne warunki, które muszą być spełnione, aby tak wprowadzone pojęcie miało porządną (i zamierzoną) semantykę. Do warunków takich należy to, że jeśli $\mathfrak{M} \models Q_\alpha x\varphi(x)$ oraz struktury $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ są izomorficzne, to zachodzi również $\mathfrak{N} \models Q_\alpha x\varphi(x)$. Odpowiada to intuicjom związanym z kwantyfikatorem (numerycznym): ma on charakteryzować jedynie *liczbę* obiektów, nie przesądzając niczego o ich jakości.

Kwantyfikatory numeryczne Mostowskiego rozumieć można w sposób relacyjny: kwantyfikatorem (jednoargumentowym) jest rodzina Q par zbiorów (U, X), gdzie $X \subseteq U$ oraz jeśli $(U, X) \in Q$ i $|X| = |Y|$, $|U - X| = |V - Y|$, to $(V, Y) \in Q$. Symbol $|X|$ oznacza, przypomnijmy, moc zbioru X. Dla przykładu:

$$Q_0 = \{(U, X) : |X| \geqslant \aleph_0\}.$$

Kwantyfikatory tak rozumiane mogą być traktowane jako operacje Q spełniające następujące warunki:

- Jeśli $\varphi(x, \overrightarrow{y})$ jest formułą, to formułą jest również $Qx\varphi(x, \overrightarrow{y})$.
- $\mathfrak{M} \models Qx\varphi(x, \overrightarrow{y})[b, \overrightarrow{a}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(dom(\mathfrak{M}), \{b : \mathfrak{M} \models \varphi(x, \overrightarrow{y})[b, \overrightarrow{a}]\}) \in Q.$$

Jeśli $L_{\omega\omega}$ oznacza klasyczną logikę pierwszego rzędu, to niech $L_{\omega\omega}(Q)$ oznacza jej rozszerzenie otrzymane przez dodanie tak rozumianego kwantyfikatora Q.

Mostowski udowodnił, że $L_{\omega\omega}(Q_0)$ nie jest (efektywnie) aksjomatyzowalna. Niech θ będzie zdaniem:

$$\forall x \neg Q_0 y\ (y < x)$$

języka $L_{\omega\omega}(Q_0)$ i niech Π będzie aksjomatyką arytmetyki Peana (w języku $L_{\omega\omega}$), a $\mathfrak{N}_0$ modelem standardowym tej arytmetyki. Wtedy dla każdego zdania ϕ języka $L_{\omega\omega}$ mamy:

- $\mathfrak{N}_0 \models \phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\mathfrak{M}$, jeśli $\mathfrak{M} \models \Pi$, to $\mathfrak{M} \models (\theta \to \phi)$.

Ponieważ, jak wiadomo, nie ma efektywnej procedury arytmetycznej dla rozstrzygania lewej strony tej równoważności, więc nie istnieje pełna metoda dowodowa dla $L_{\omega\omega}(Q_0)$.

Postawiony przez Mostowskiego problem, czy $L_{\omega\omega}(Q_1)$ jest aksjomatyzowalna został rozwiązany przez Keislera.

Mostowski podał także teorio-modelową charakterystykę kwantyfikatorów pierwszego rzędu: dowolne rozszerzenie logiki pierwszego rzędu otrzymane przez dodanie jednoargumentowego kwantyfikatora, które spełnia warunek:

- każde zdanie, które ma model nieskończony, ma też model każdej mocy nieskończonej

jest równoważne z logiką pierwwszego rzędu.

Ujęcie Mostowskiego doczekało się wkrótce uogólnienia, w pracach Lindströma (1969), gdzie rozważa się nie tylko kwantyfikatory jednoargumentowe, lecz również wieloargumentowe. Takimi są, dla przykładu:

- KWANTYFIKATOR HÄRTIGA. $I = \{(U, X, Y) : |X| = |Y|\}$
- KWANTYFIKATOR RESCHERA. $R = \{(U, X, Y) : |X| \leqslant |Y|\}$.

Te kwantyfikatory nie mogą zostać wyrażone w formalizmie Mostowskiego. Definicja Lindströma ma, w uproszczeniu, postać następującą:

(Lokalnym) *kwantyfikatorem uogólnionym na M typu* $\langle k_1, \ldots, k_n\rangle$ nazywamy dowolną n-arną relację pomiędzy podzbiorami $M^{k_1}, \ldots, M^{k_n}$.

Uogólnionym kwantyfikatorom poświęciliśmy osobny wykład. W większości przypadków była mowa o tzw. kwantyfikatorach uogólnionych *monadycznych* binarnych, czyli typu $\langle 1, 1\rangle$.

Kwantyfikatory rozważane przez Mostowskiego były typu $\langle 1\rangle$, kwantyfikatory Härtiga i Reschera są typu $\langle 1, 1\rangle$.

W 1959 roku Henkin rozważał inne rodzaje kwantyfikatorów, różne od kwantyfikatorów numerycznych Mostowskiego.

Pamiętamy, że przy tworzeniu prefiksowej postaci normalnej formuły języka rachunku predykatów wszystkie kwantyfikatory poprzedzają matrycę formuły. Przy skolemizacji takiej formuły eliminujemy kwantyfikatory egzystencjalne, wprowadzając nowe symbole funkcyjne (dla funkcji Skolema).

Symbol funkcyjny f wprowadzony przez eliminację kwantyfikatora $\exists$ z prefiksu kwantyfikatorowego $Q_1Q_2\ldots Q_n$ (gdzie Q_i są kwantyfikatorami klasycznymi: $\forall$ oraz $\exists$) ma tyle argumentów, ile kwantyfikatorów ogólnych poprzedza ów eliminowany kwantyfikator $\exists$ w prefiksie $Q_1Q_2\ldots Q_n$. Powstaje problem, czy ta procedura dobrze opisuje sytuacje, w których dokonujemy *wyborów niezależnych*. Henkin wprowadził uogólnienie tej procedury, dopuszczając prefiksy częściowo uporządkowane lub inaczej prefiksy rozgałęzione, za pomocą których można wyrazić zależności, których nie można przedstawić w sposób liniowy. Kwantyfikator Henkina ma postać następującą:

$$\begin{matrix} \forall x \text{——} \exists y \\ \forall u \text{——} \exists v \end{matrix} \Big> \phi(x,y,u,v)$$

Częściowy porządek prefiksu ma oddawać sytuację, gdy dokonujemy wyborów niezależnych. Semantykę dla tego kwantyfikatora ustala się następująco:

Kwantyfikator Henkina to kwantyfikator typu $\langle 4 \rangle$ taki, że:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} \quad = \quad & \{R \subseteq M^4 : \textit{istnieją funkcje } f, g \textit{ na } M \textit{ takie,że} \\ & \textit{dla dowolnych } a, b \in M \quad (a, f(a), b, f(b)) \in R\}. \end{aligned}$$

Język z kwantyfikatorem Henkina ma moc wyrażania istotnie większą niż język klasycznego rachunku predykatów. Można pokazać, że kwantyfikator Q_0 Mostowskiego jest definiowalny przez kwantyfikator Henkina. Pojęcie „mocy wyrażania” języka było objaśnione wcześniej

Dalszych uogólnień dokonał w latach siedemdziesiatych XX wieku Barwise. Rozważał m.in. rozgałęzione prefiksy, w których występowały uogólnione kwantyfikatory (w sensie Lindströma).

Oto jeszcze kilka dalszych kwantyfikatorów uogólnionych:

$$\forall_M = \{M\},$$

$$\exists_M = \{X \subseteq M : X \neq \emptyset\},$$

$$(\exists_{\geq n})_M = \{X \subseteq M : |X| \geq n\},$$

$$(\boldsymbol{Q}_\alpha)_M = \{X \subseteq M : |X| \geq \aleph_\alpha\},$$

$$(\boldsymbol{Q}_R)_M = \{X \subseteq M : |X| > |M - X|\}, \quad \text{(Kwantyfikator Reschera)},$$

$$(\boldsymbol{Q}_R)_M = \{X \subseteq M : |X| = |M|\}, \quad \text{(Kwantyfikator Changa)}.$$

Widać zatem, że również „zwykłe” kwantyfikatory można uważać za kwantyfikatory uogólnione (co jest dość oczywiste — dobre uogólnienie powinno uwzględniać przypadki wyjściowe).

Przez L_Q oznaczać teraz będziemy język KRP z kwantyfikatorem Q. Interpretacje L_Q wyznaczone będą przez semantyczną charakterystykę Q. Dla języka L_Q z ustaloną interpretacją semantyczną Q będziemy też używać terminu „logika L_Q". Niech $\aleph_\alpha$ będzie α-tą mocą nieskończoną (gdzie α jest liczbą porządkową). Zamiast $\aleph_0$ piszemy czasem ω. Jeśli κ, λ są nieskończonymi liczbami kardynalnymi, to przez $L_{\kappa\lambda}$ rozumiemy język w którym dopuszczalne są koniunkcje i alternatywy długości mniejszej niż κ oraz prefiksy kwantyfikatorowe długości mniejszej niż λ. Tak więc, $L_{\omega\omega}$ to język KRP, klasycznej logiki pierwszego rzędu. Przez $L_{\infty\lambda}$ rozumiemy język, w którym dopuszczalne są koniunkcje i alternatywy dowolnej długości oraz prefiksy kwantyfikatorowe długości mniejszej niż λ.

KWANTYFIKATOR „ISTNIEJE NIESKOŃCZENIE WIELE"

Wyrażenie $Q_0 x\ \alpha(x)$ czytamy: istnieje nieskończenie wiele x takich, że $\alpha(x)$.

Semantyka Q_0 wyznaczona jest przez warunek:

$\mathfrak{A} \models Q_0 x\ \alpha(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha[a]\}$ jest nieskończony.

Oto niektóre własności L_{Q_0}:

- Standardowy model arytmetyki PA można scharakteryzować w L_{Q_0} z dokładnością do izomorfizmu.

  Wystarczy do aksjomatów dyskretnego liniowego porządku $<$ dodać aksjomat: $\forall x \neg Q_0 y\ y < x$.

- W L_{Q_0} nie zachodzi górne twierdzenie Löwenheima-Skolema.

- L_{Q_0} nie jest aksjomatyzowalna.

- W L_{Q_0} nie zachodzi twierdzenie o zwartości.

- W L_{Q_0} zachodzi dolne twierdzenie Löwenheima-Skolema.

- Pełność (systemu dowodowego z nieskończonymi dowodami) dla L_{Q_0} można otrzymać przez dodanie reguły infinitarnej:

$$\frac{\exists^{\geqslant 1} x\ \alpha(x), \exists^{\geqslant 2} x\ \alpha(x), \ldots}{Q_0 x\ \alpha(x)}.$$

- Dowolna przeliczalna $\aleph_0$-kategoryczna teoria w L_{Q_0} bez modeli skończonych jest zupełna.

- Teoria gęstych liniowych porządków jest zupełna w L_{Q_0}.

- L_{Q_0} jest fragmentem $L_{\omega_1\omega}$, co widać z równoważności:

$$Q_0 x\, \alpha(x) \equiv \bigwedge_{n<\omega} \exists^{\geqslant n} x\, \alpha(x).$$

KWANTYFIKATOR „ISTNIEJE NIEPRZELICZALNIE WIELE”

Wyrażenie $Q_1 x \;\; \alpha(x)$ czytamy: istnieje nieprzeliczalnie wiele x takich, że $\alpha(x)$.

Semantyka Q_1 wyznaczona jest przez warunek:

$\mathfrak{A} \models Q_1 x\ \alpha(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha[a]\}$ jest nieprzeliczalny.

Ograniczamy się do interpretacji nieprzeliczalnych.

Tak jak w L_{Q_0} definiowalne jest pojęcie skończoności, tak w L_{Q_1} definiowalne jest pojęcie przeliczalności.

Oto niektóre własności L_{Q_1}:

- Teoria gęstych liniowych porządków nie jest zupełna w L_{Q_1}.
- Górne twierdzenie Löwenheima-Skolema nie zachodzi w L_{Q_1}. Dolne twierdzenie LS zachodzi w następującej wersji: jeśli teoria w L_{Q_1} (mocy co najwyżej $\aleph_1$) ma model, to ma model mocy $\aleph_1$.
- Każda $\aleph_1$-kategoryczna teoria w L_{Q_1} (mocy co najwyżej $\aleph_1$) jest zupełna.
- Teoria ciał algebraicznie domkniętych charakterystyki zero jest zupełna w L_{Q_1}.
- L_{Q_1} jest (!) aksjomatyzowalna.

KWANTYFIKATOR CHANGA

Wyrażenie $Q_c x\ \alpha(x)$ czytamy: istnieje tyle x takich, że $\alpha(x)$ ile jest obiektów w całym uniwersum.

Semantyka Q_c wyznaczona jest przez warunek:

$\mathfrak{A} \models Q_c x\ \alpha(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha[a]\}$ ma taką samą moc, jak zbiór $dom(\mathfrak{A})$.

Oto niektóre własności L_{Q_c}:

- W modelach mocy $\aleph_1$ kwantyfikator Q_c ma taką samą interpretację, jak kwantyfikator Q_1.
- Teoria gęstych porządków liniowych nie jest zupełna w L_{Q_c}.

- Teoria ciał algebraicznie domkniętych charakterystyki zero jest zupełna w L_{Q_c}. [Teoria ta dopuszcza eliminację kwantyfikatorów $\exists$ i Q_c.]

- Jeśli przeliczalna teoria w L_{Q_c} ma model, którego moc jest liczbą kardynalną następnikową, to ma model mocy $\aleph_1$.

- Jeśli przeliczalna teoria w L_{Q_c} ma model mocy $\aleph_0$, to ma modele każdej mocy nieskończonej.

- Niech Val_1 będzie zbiorem wszystkich zdań L_{Q_c} prawdziwych w modelach mocy $\aleph_1$ i niech Val_ω będzie zbiorem wszystkich zdań L_{Q_c} prawdziwych w modelach mocy $\aleph_\omega$. Wtedy (przy założeniu uogólnionej hipotezy kontinuum):

   1. Val_1 oraz Val_ω są rekurencyjnie przeliczalne.
   2. $Val_1 \cap Val_\omega$ jest zbiorem wszystkich L_{Q_c}-tautologii.

KWANTYFIKATOR „JEST WIĘCEJ A NIŻ B”

Wyrażenie $Q_M x\, \alpha(x)\beta(x)$ czytamy: jest więcej x takich, że $\alpha(x)$ niż x takich, że $\beta(x)$.

Semantyka Q_M wyznaczona jest przez warunek:

$\mathfrak{A} \models Q_M x\ \alpha(x)\beta(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy moc zbioru $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha[a]\}$ jest większa od mocy zbioru $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \beta[a]\}$.

Oto niektóre własności L_{Q_M}:

- Standardowy model arytmetyki PA można scharakteryzować w L_{Q_M} z dokładnością do izomorfizmu.

- L_{Q_M} nie jest aksjomatyzowalna.

- W L_{Q_M} nie zachodzi: ani dolne ani górne twierdzenie Löwenheima-Skolema, ani twierdzenie o zwartości.

- Q_0 oraz Q_c są definiowalne w L_{Q_M}.

- L_{Q_M} jest logiką o znacznej „mocy wyrażania”: można w niej sformułować np. zdanie, które ma model wtedy i tylko wtedy, gdy fałszywa jest uogólniona hipoteza kontinuum.

KWANTYFIKATOR HENKINA

Wyrażenie $Q_H(x, y, u, v)\alpha(x, y, u, v)$ jest skrótem dla formuły z następującym częściowo uporządkowanym prefiksem kwantyfikatorowym:

$$\begin{array}{l} \forall x \text{——} \exists y \\ \forall u \text{——} \exists v \end{array} \Big> \alpha(x,y,u,v)$$

Semantyka dla tego kwantyfikatora wyznaczona jest przez warunek:

$\mathfrak{A} \models Q_H xyuv\, \alpha(x,y,u,v)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją funkcje f oraz g (określone na $dom(\mathfrak{A})$ i o wartościach w $dom(\mathfrak{A})$) takie, że $\mathfrak{A} \models \alpha(x, f(x), u, g(u))$.

Oto niektóre własności L_{Q_H}:

- Kwantyfikatory Q_0, Q_c oraz Q_M są definiowalne w L_{Q_H}.
- L_{Q_H} nie jest aksjomatyzowalna.
- W L_{Q_H} nie zachodzi twierdzenie o zwartości.
- W L_{Q_H} nie zachodzi ani dolne, ani górne twierdzenie Löwenheima-Skolema.

Widzimy więc, że również L_{Q_H} ma znaczną „moc wyrażania".

* * *

Niektóre z wymienionych wyżej logik (z uogólnionymi kwantyfikatorami) są uporządkowane następująco pod względem mocy wyrażania (strzałka oznacza zachodzenie relacji $\prec$):

$$\begin{array}{ccccccccc} & & L_{Q_0} & \rightarrow & L_I & & & & \\ & \nearrow & & & & \searrow & & & \\ L_{\omega\omega} & & & & & & L_{Q_M} & \rightarrow & L_H \\ & \searrow & & & & \nearrow & & & \\ & & L_{Q_R} & \rightarrow & L_{Q_w} & & & & \end{array}$$

(tu I jest kwantyfikatorem Härtiga, a Q_w jest kwantyfikatorem większości **most**: $Q_w x \alpha(x) \beta(x)$ ma semantykę odpowiadającą warunkowi, że *większość* obiektów, które spełniają $\alpha(x)$, spełnia $\beta(x)$).

4.1.4 Logika drugiego rzędu

W ogólności, rozważa się dwa rodzaje semantyk dla logiki drugiego rzędu: w jednej z nich dopuszcza się, aby zmienne drugiego rzędu przebiegały cały zbiór potęgowy wszystkich skończonych iloczynów kartezjańskich uniwersum modelu, w drugiej ogranicza się ten zakres do pewnej podrodziny tego zbioru potęgowego.

W tzw. *słabej logice drugiego rzędu* dopuszcza się kwantyfikację po jedynie skończonych podzbiorach uniwersum modelu. Z kolei, w *monadycznej logice drugiego rzędu* posługujemy się jedynie predykatami jednoargumentowymi (czyli możemy kwantyfikować jedynie po podzbiorach uniwersum, a nie po podzbiorach iloczynów kartezjańskich uniwersum).

Składnia logiki drugiego rzędu jest bardzo podobna do tej dla logiki rzędu pierwszego. Niech L będzie językiem pierwszego rzędu. Aby otrzymać język drugiego rzędu, dodajemy zbiór nowych zmiennych $\{X_n : n \in \omega\}$. Rozważmy teraz dwa przypadki:

- język L^{2m} monadycznej logiki drugiego rzędu
- język L^2 pełnej logiki drugiego rzędu.

W przypadku monadycznym zbiór *termów* L^{2m} jest taki sam jak zbiór termów L. *Formuły atomowe* L^{2m} obejmują formuły atomowe L oraz dodatkowo wszelkie wyrażenia o postaci $X_n(t)$, gdzie t jest termem, a X_n zmienną drugiego rzędu.

Indukcyjna definicja *formuły* języka monadycznej logiki drugiego rzędu wymaga dodania warunku:

- Jeśli ψ jest formułą, to formułami są również $\exists R\ \psi$ oraz $\forall R\ \psi$, dla dowolnego predykatu R z sygnatury rozważanego języka.

Struktury (interpretacje) dla L^{2m} są takie same jak dla L. *Wartościowaniem* w $\mathfrak{A}$ jest teraz para funkcji (α, β), gdzie α przyporządkowuje zmiennym indywidualnym (pierwszego rzędu) elementy uniwersum struktury $\mathfrak{A}$, natomiast β przyporządkowuje zmiennym drugiego rzędu podzbiory uniwersum struktury $\mathfrak{A}$. Wartość $t^{\mathfrak{A}}[\alpha, \beta]$ termu t w strukturze $\mathfrak{A}$ przy wartościowaniu (α, β) jest identyczna z wartością termu t w strukturze $\mathfrak{A}$ przy wartościowaniu α. Definicję spełniania formuły w strukturze przez wartościowanie trzeba rozszerzyć o warunki:

- $\mathfrak{A} \models X_n(t)[\alpha, \beta]$, gdy $t^{\mathfrak{A}}[\alpha] \in \beta(X_n)$;
- $\mathfrak{A} \models \exists X_n\ \psi[\alpha, \beta]$, gdy istnieje $B \subseteq dom(\mathfrak{A})$ taki, że $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha, \beta^B_{X_n}]$, gdzie $\beta^B_{X_n}$ jest wartościowaniem różniącym się od β co najwyżej tym, iż zmiennej X_n przyporządkowuje zbiór B;
- $\mathfrak{A} \models \forall X_n\ \psi[\alpha, \beta]$, gdy dla wszystkich $B \subseteq dom(\mathfrak{A})$ taki, że $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha, \beta^B_{X_n}]$, gdzie $\beta^B_{X_n}$ jest wartościowaniem różniącym się od β co najwyżej tym, iż zmiennej X_n przyporządkowuje zbiór B.

W pełnej logice drugiego rzędu L^2 do języka dodajemy dwie nieskończone rodziny zbiorów zmiennych (drugiego rzędu):

- $\{R^k_n : n \in \omega\}$ zmienne dla predykatów k-argumentowych, dla każdej $k \in \omega$;
- $\{F^k_n : n \in \omega\}$ zmienne dla symboli funkcyjnych k-argumentowych, dla każdej $k \in \omega$.

Tworzenie formuł języka tej logiki jest oczywiste. Strukturami dla tego języka są struktury dla L. *Wartościowania* w strukturze $\mathfrak{A}$ to pary funkcji (α, β) takich, że:

- α przyporządkowuje każdej zmiennej R^k_n pewną k-argumentową relację między elementami uniwersum struktury $\mathfrak{A}$
- β przyporządkowuje każdej zmiennej F^k_n pewną k-argumentową funkcję określoną na uniwersum struktury $\mathfrak{A}$.

Definicje *wartości termu w strukturze przy danym wartościowaniu* oraz *spełniania formuły w strukturze przez wartościowanie* definiujemy w oczywisty sposób, dla przykładu:

- $(F^k_n(t_1, \ldots, t_k))^{\mathfrak{A}}[\alpha, \beta] = \beta(F^k_n)(t^{\mathfrak{A}}_1[\alpha, \beta], \ldots, t^{\mathfrak{A}}_1[\alpha, \beta])$
- $\mathfrak{A} \models R^k_n(t_1, \ldots, t_k)[\alpha, \beta]$ dokładnie wtedy, gdy $(t^{\mathfrak{A}}_1[\alpha, \beta], \ldots, t^{\mathfrak{A}}_k[\alpha, \beta]) \in \beta(R^k_n)$
- $\mathfrak{A} \models \exists F^k_n\ \psi[\alpha, \beta]$ dokładnie wtedy, gdy istnieje funkcja k-argumentowa f określona na uniwersum struktury $\mathfrak{A}$ taka, że $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha, \beta^f_{F^k_n}]$
- $\mathfrak{A} \models \forall R^k_n\ \psi[\alpha, \beta]$ dokładnie wtedy, gdy dla każdej relacji k-argumentowej $r \subseteq (dom(\mathfrak{A}))^k$ zachodzi $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha, \beta^r_{R^k_n}]$.

W podobny sposób określa się podstawowe pojęcia składniowe i semantyczne dla logik jeszcze wyższych rzędów (trzeciego, czwartego, itd.). Wreszcie, możemy też określić język *teorii typów*, zawierający w sobie wszystkie języki logik wyższych rzędów i w odpowiedni sposób podać dlań definicje pojęć składniowych i semantycznych.

W niniejszym punkcie podamy jeszcze jedynie, dla ilustracji, dwie rzeczy:

- przykłady zdań logik L^{2m} oraz L^2, wyrażających ważne pojęcia matematyczne (niewyrażalne w logice pierwszego rzędu);
- kilka uwag o własnościach metalogicznych L^{2m} oraz L^2.

Rozważmy więc następujące zdania:

1. Niech ψ_1 w języku z jednym predykatem dwuargumentowym $\prec$ będzie koniunkcją zdań:

- zdania stwierdzającego, że $\prec$ jest ostrym porządkiem liniowym oraz zdania
- $\forall X\ (\exists y\ X(y) \to \exists y\ (X(y) \wedge \neg \exists z\ (X(z) \wedge z \prec y)))$.

Wtedy struktura $\mathfrak{A} = (A, \prec^{\mathfrak{A}})$ dla rozważanego języka spełnia zdanie ψ_1 dokładnie wtedy, gdy $\prec^{\mathfrak{A}}$ jest dobrym porządkiem jej uniwersum.

2. Niech ψ_2 będzie aksjomatem indukcji (w języku ze stałą 0 zero oraz symbolem funkcyjnym s następnika), jak w oryginalnym sformułowaniu Peana. Wtedy modelami zdania ψ_2 są dokładnie te struktury $\mathfrak{A}$, dla których: $dom(\mathfrak{A}) = \{\overline{n}^{\mathfrak{A}} : n \in \omega\}$, gdzie $\overline{n}$ jest liczebnikiem nazywającym liczbę n.

3. Niech ψ_3 będzie koniunkcją następujących zdań:

- ψ_1
- $\forall x\ (\exists y\ y \prec x \to \exists y\ (y \prec x \wedge \forall z\ (z \prec x \to (z \prec y \vee z \doteq y))))$.

Drugie z tych zdań stwierdza, że element, który ma jakikolwiek poprzednik ma też bezpośredni poprzednik (względem porządku $\prec$). Jeśli $\mathfrak{A}$ spełnia zdanie ψ_3, to $\prec^{\mathfrak{A}}$ jest dobrym porządkiem w jej uniwersum, który jest albo skończony, albo ma typ porządkowy ω. Tak więc, zdanie ψ_3 ma modele skończone oraz przeliczalnie nieskończone, ale nie ma modeli nieprzeliczalnych.

4. Przyjmijmy naturalne oznaczenie: $x \preceq y$ dla $x \prec y \vee x \doteq y$. Niech ψ_4 będzie koniunkcją następujących zdań:

- zdania stwierdzającego, że $\prec$ jest gęstym porządkiem liniowym bez końców (zobacz rozdział 2)
- $\forall X\ (\exists y\ (X(y) \wedge \exists z \forall y\ (X(y) \to y \preceq z)) \to \exists z\ (\forall y\ (X(y) \to y \preceq z) \wedge \forall w\ (\forall y\ \ (X(y) \to y \preceq w) \to (z \preceq w))))$.

Drugie z tych zdań wyraża zupełność porządku. Tak więc, modelami ψ_4 są te struktury $\mathfrak{A}$, w których $\prec$ jest interpretowany jako (gęsty liniowy bez końców) porządek zupełny: każdy niepusty zbiór ograniczony z góry ma kres górny. Dla takich struktur $\mathfrak{A}$ istnieje włożenie zbioru liczb rzeczywistych z ich naturalnym porządkiem w $\mathfrak{A}$. Wynika stąd, że zdanie ψ_4 ma modele mocy co najmniej $2^{\aleph_0}$, ale nie ma modeli mocy mniejszych.

5. Niech ψ_5 będzie zdaniem stwierdzającym, iż każda injekcja jest surjekcją:

- $\forall F\ (\forall x \forall y\ (F(x) \doteq F(y) \rightarrow x \doteq y) \rightarrow \forall y \exists x\ F(x) \doteq y)$.

Wtedy jedynymi strukturami, które spełniają zdanie ψ_5 są struktury skończone.

6. Niech ψ_6 będzie zdaniem $\exists R\ \psi_3$, gdzie w ψ_3 zastępujemy wszystkie wystąpienia $\prec$ przez dwuargumentowy predykat R. Struktura $\mathfrak{A}$ spełnia zdanie ψ_6 dokładnie wtedy, gdy na jej uniwersum istnieje dobry porządek bez elementów granicznych, a zatem dokładnie wtedy, gdy jest ona przeliczalna.

7. Niech ψ_7 będzie zdaniem stwierdzającym, iż istnieje dobry porządek uniwersum taki, że każdy jego segment początkowy jest przeliczalny. Struktura $\mathfrak{A}$ spełnia zdanie ψ_7 dokładnie wtedy, gdy jej moc jest niewiększa od $\aleph_1$.

8. W logice drugiego rzędu można skonstruować zdanie, które jest prawdziwe (zachodzi we wszystkich strukturach) dokładnie wtedy, gdy prawdziwa jest Hipoteza Kontinuum. Wykorzystamy w tym celu zdania: $\psi_8(Y)$, stwierdzające, że zbiór Y jest co najwyżej przeliczalny oraz ψ_4 (stwierdzające, że uniwersum ma moc kontinuum). Zdanie $\psi_8(Y)$ otrzymujemy ze zdania ψ_3, ograniczając wszystkie kwantyfikatory pierwszego rzędu do Y, w znany sposób. Zdanie, którego szukamy, ma wyrażać własność: jeśli uniwersum jest równoliczne ze zbiorem liczb rzeczywistych, to każdy jego podzbiór jest albo co najwyżej przeliczalny, albo równoliczny z uniwersum (nie jest więc żadnej mocy pośredniej między $\aleph_0$ a $2^{\aleph_0}$). Niech ψ_9 będzie zdaniem:

- $\psi_4 \rightarrow \forall Y\ (\psi_8(Y) \vee \exists G\ (\forall x\ Y(G(x)) \wedge \forall x \forall y\ (G(x) \doteq G(y) \rightarrow x \doteq y) \wedge \forall y\ (Y(y) \rightarrow \exists x\ G(x) \doteq y)))$.

Wtedy zdanie ψ_9 jest prawdziwe dokładnie wtedy, gdy zachodzi Hipoteza Kontinuum. Przykład ten pokazuje, jak silna jest semantyka pełnej logiki drugiego rzędu. Nie należy się zatem spodziewać, iż pełna logika drugiego rzędu może zostać wyposażona w jakikolwiek efektywny, finitystyczny system dowodowy.

Z podanych wyżej przykładów wynikają pewne własności metalogiczne logiki drugiego rzędu. W szczególności, jest widoczne, że w monadycznej logice drugiego rzędu nie zachodzą twierdzenia:

- o zwartości,
- dolne twierdzenie Löwenheima-Skolema,
- górne twierdzenie Löwenheima-Skolema.

Dla dowolnych logik abstrakcyjnych (patrz niżej, 25.3 oraz wykłady 4–5) rozważa się pewne uogólnienia pojęć związanych ze zwartością, spełnianiem twierdzeń Löwenheima-Skolema itd. Podamy, bez dowodów, kilka faktów dotyczących tej problematyki.

Niech $\mathcal{L}$ będzie logiką abstrakcyjną, a κ i λ liczbami kardynalnymi. Mówimy, że:

- logika $\mathcal{L}$ jest $(\kappa, \lambda) - zwarta$, gdy dla dowolnego zbioru Δ zdań z $\mathcal{L}$ mocy niewiększej od κ, jeśli każdy podzbiór mocy mniejszej od λ zbioru Δ ma model, to Δ ma model;
- logika $\mathcal{L}$ ma własność *Löwenheima-Skolema* (κ, λ)*-w dół*, gdy dla dowolnego zbioru Δ zdań z $\mathcal{L}$ mocy niewiększej od κ, jeśli Δ ma model, to Δ ma model mocy co najwyżej λ;
- logika $\mathcal{L}$ ma własność *Löwenheima-Skolema* (κ, λ)*-w górę*, gdy dla dowolnego zbioru Δ zdań z $\mathcal{L}$ mocy niewiększej od κ oraz każdej liczby kardynalnej $\mu < \lambda$, jeśli Δ ma model mocy co najmniej μ, to dla każdej liczby kardynalnej $\nu \geqslant \lambda$, Δ ma model mocy co najmniej ν.

Jeśli w powyższych własnościach κ jest dowolnie duża, to używamy symbolu ∞; dla przykładu, logika pierwszego rzędu:

- jest (∞, ω)-zwarta,
- ma własność Löwenheima-Skolema (κ, κ)-w dół,
- ma własność Löwenheima-Skolema (∞, ω)-w górę.

Z wymienionymi własnościami możemy stowarzyszyć pewne liczby kardynalne, charakteryzujące logiki. Dla dowolnej logiki abstrakcyjnej $\mathcal{L}$ oraz liczby kardynalnej κ niech:

- $t_\kappa(\mathcal{L})$ będzie najmniejszą λ taką, że $\mathcal{L}$ jest (κ, λ)-zwarta;
- $\ell_\kappa(\mathcal{L})$ będzie najmniejszą λ taką, że $\mathcal{L}$ ma własność Löwenheima-Skolema (κ, λ)-w dół,
- $h_\kappa(\mathcal{L})$ będzie najmniejszą λ taką, że $\mathcal{L}$ ma własność Löwenheima-Skolema (κ, λ)-w górę.

Wtedy, dla niektórych κ, używamy następującej terminologii:

- $t(\mathcal{L})$ równa z definicji $t_{infty}(\mathcal{L})$ nazywana jest *liczbą Tarskiego* logiki $\mathcal{L}$;
- $\ell(\mathcal{L})$ równa z definicji $\ell_1(\mathcal{L})$ nazywana jest *liczbą Löwenheima* logiki $\mathcal{L}$;
- $h(\mathcal{L})$ równa z definicji $h_1(\mathcal{L})$ nazywana jest *liczbą Hanfa* logiki $\mathcal{L}$.

Dla klasycznej logiki pierwszego rzędu $\mathcal{L}$ zachodzą równości:

- $t(\mathcal{L}) = \ell(\mathcal{L}) = h(\mathcal{L}) = \omega$
- Dla każdej nieskończonej κ mamy: $\ell_\kappa(\mathcal{L}) = \kappa$ oraz $h_\kappa(\mathcal{L}) = \omega$.

Dla monadycznej logiki drugiego rzędu mamy wtedy oszacowania:

- $\ell(\mathcal{L}^{2m}) \geqslant 2^{\aleph_0}$
- $h(\mathcal{L}^{2m}) > \aleph_1$
- $t(\mathcal{L}^{2m}) > \aleph_1$.

Oszacowania te można uczynić dokładniejszymi z pomocą następującego pojęcia. Definiujemy przez indukcję liczby *beth*:

- $\beth_0 = \aleph_0$
- $\beth_{\sigma+1} = 2^{\beth_\sigma}$
- $\beth_\lambda = \sup\{\beth_\sigma : \sigma < \lambda\}$ dla granicznych λ.

Zauważmy, że Uogólniona Hipoteza Kontinuum jest równoważna ze stwierdzeniem, że $\aleph_\sigma = \beth_\sigma$ dla wszystkich σ. Wprowadźmy teraz oznaczenia:

- $\kappa_0 = \aleph_1$
- $\kappa_{n+1} = \beth_{\kappa_n}$
- $\kappa_\omega = \sup\{\kappa_n : n \in \omega\}$.

Wtedy κ_ω jest najmniejszą liczbą kardynalną λ taką, że $\lambda = \beth_\lambda$. Ponadto:

- $h(\mathcal{L}^{2m}) \geqslant \kappa_\omega$
- $t(\mathcal{L}^{2m}) \geqslant \kappa_\omega$
- $\ell(\mathcal{L}^{2m}) \geqslant \kappa_\omega$.

W logice pierwszego rzędu zbiór (numerów gödlowskich) wszystkich konsekwencji logicznych dowolnego rekurencyjnego zbioru (numerów gödlowskich) zdań jest rekurencyjnie przeliczalny. W monadycznej logice drugiego rzędu, a więc tym bardziej w pełnej logice drugiego rzędu, zbiór zdań logicznie prawdziwych nie jest rekurencyjnie przeliczalny. Nadto, ponieważ istnienie finitarnego systemu dedukcji pełnego względem konsekwencji logicznej w danej logice abstrakcyjnej pociąga za sobą (∞, ω)-zwartość tej logiki, więc ani w monadycznej, ani w pełnej logice drugiego rzędu taki system nie istnieje. Można także pokazać, że nie istnieją dla tych logik pełne systemy dedukcji z pewnego rodzaju infinitarnymi regułami wnioskowania.

4.1.5 Logiki infinitarne

Kiedy logikę uznajemy za infinitarną? W części pierwszej (zwłaszcza w rozdziałach poświęconych typom elementów i teorii) spotykaliśmy się często z językami *nieprzeliczalnymi*, które miały nieprzeliczalną właśnie liczbę stałych indywidualnych. Pracowaliśmy jednak w dalszym ciągu w ramach finitarnej logiki pierwszego rzędu. Logika jest infinitarna, gdy:

- dopuszczamy w jej języku infinitarne konstrukcje składniowe (infinitarne — np. przeliczalne — koniunkcje i alternatywy formuł),
- dopuszczamy wśród jej reguł wnioskowania reguły infinitarne (np. ω-regułę), co w konsekwencji prowadzi do infinitarnych dowodów.

W językach $L_{\kappa\lambda}$, gdzie κ i λ są nieskończonymi liczbami kardynalnymi ($\lambda \leqslant \kappa$) dopuszczalne są koniunkcje i alternatywy długości mniejszej od κ oraz kwantyfikacje na ciągach zmiennych długości mniejszej od λ. W języku $L_{\kappa\lambda}$ mamy następujące symbole:

- symbole języka pierwszego rzędu L (ustalonej sygnatury);
- zbiór zmiennych zdaniowych Var mocy κ;
- symbol operacji $\bigwedge$ (nieskończonej koniunkcji).

Zbiór formuł języka $L_{\kappa\lambda}$ określamy w dwóch etapach.
Zbiór *preformuł* języka $L_{\kappa\lambda}$ określamy indukcyjnie:

- każda formuła L jest preformułą;
- jeśli φ i ψ są preformułami, to $\varphi \wedge \psi$ oraz $\neg\psi$ są preformułami;
- jeśli Φ jest zbiorem preformuł mocy mniejszej od κ, to $\bigwedge \Phi$ jest preformułą;
- jeśli ψ jest preformułą, a $V \subseteq Var$ jest zbiorem zmiennych mocy mniejszej od λ, to $\exists X\ \psi$ jest preformułą;
- każda preformuła jest otrzymana przez powyższe warunki.

Pozostałe funktory prawdziwościowe wprowadzamy w zwykły sposób. Nadto:

- $\bigvee \Phi$ oznacza $\neg \bigwedge\{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\}$
- $\forall X\ \psi$ oznacza $\neg\exists X\ \neg\psi$.

Przez *formułę* języka $L_{\kappa\lambda}$ rozumiemy preformułę zawierającą mniej niż λ zmiennych wolnych.

Pojęcia semantyczne dla $L_{\kappa\lambda}$ definiujemy tak jak dla L, z dodatkowymi warunkami:

- $\mathfrak{A}$ spełnia $\bigwedge \Phi$ przy wartościowaniu w wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A}$ spełnia φ przy wartościowaniu w, dla wszystkich $\varphi \in \Phi$;
- $\mathfrak{A}$ spełnia $\exists X\ \ \psi$ przy wartościowaniu w wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $\overrightarrow{a}$ elementów $dom(\mathfrak{A})$ spełniający ψ oraz bijekcja między X i $\overrightarrow{a}$.

Pozostałe pojęcia semantyczne (prawdziwości, wynikania logicznego, itd.) definiujemy w standardowy sposób.

Języki $L_{\kappa\lambda}$, gdzie $\lambda \geqslant \omega_1$ „zachowują się" podobnie jak języki drugiego rzędu.

Przez $L_{\infty\omega}$ rozumiemy język z koniunkcjami i alternatywami *dowolnej* długości oraz skończonymi prefiksami kwantyfikatorowymi.

Języki infinitarne mają, rzecz jasna, moc wyrażania większą od języka pierwszego rzędu. Mamy np.:

- Zdanie $Q_0x\ \ \psi(x)$ języka L_{Q_0} (istnieje nieskończenie wiele x o własności ψ) ma te same modele co następujące zdanie z $L_{\omega_1\omega}$:

  $\neg \bigvee\limits_{n\in\omega} \exists x_1 \ldots \exists x_n \forall x\ (\psi(x) \to (x = x_1 \vee \ldots \vee x = x_n))$.

- Pojęcie dobrego porządku nie jest definiowalne w $L_{\omega_1\omega}$, jest natomiast definiowalne w $L_{\omega_1\omega_1}$ przez koniunkcję zdania charakteryzującego porządki liniowe i zdania:

  $(\forall x_n)_{n\in\omega} \exists x\ (\bigvee\limits_{n\in\omega} (x = x_n) \wedge \bigwedge\limits_{n\in\omega} (x \leqslant x_n))$.

- Predykat prawdziwości formuł języka o przeliczalnej liczbie symboli jest definiowalny w $L_{\omega_1\omega}$.
- W $L_{\omega_1\omega}$ dowolną przeliczalną strukturę z przeliczalną liczbą relacji można scharakteryzować z dokładnością do izomorfizmu (Twierdzenie Scotta).
- Teoria uporządkowanych ciał archimedesowych jest w $L_{\omega_1\omega}$ skończenie aksjomatyzowalna.

- Własności semantyczne modeli dla logik $L_{\kappa\lambda}$ i $L_{\infty\omega}$ (np. elementarną równoważność) można charakteryzować metodami algebraicznymi (twierdzenie Karp o częściowych izomorfizmach).

Do niektórych różnic we własnościach logicznych między logiką pierwszego rzędu a logikami infinitarnymi należą np.:

- Dolne twierdzenie Löwenheima-Skolema ma swój odpowiednik w $L_{\omega_1\omega}$ oraz właściwie we wszystkich logikach infinitarnych. Natomiast górne twierdzenie Löwenheima-Skolema-Tarskiego w swojej zwykłej formie nie zachodzi w tych logikach; dokonuje się jednak podobnych do niego ustaleń, wykorzystując tzw. liczby Hanfa.

- W $L_{\omega_1\omega}$ zachodzi twierdzenie o pełności, gdy na infinitarną regułę wnioskowania pozwalającą wywnioskować koniunkcję $\bigwedge \Phi$ ze zbioru przesłanek Φ narzucimy warunek, aby Φ był przeliczalny.

- Ani w $L_{\omega_1\omega}$, ani w żadnej z logik $L_{\kappa\lambda}$, gdzie $\kappa \geqslant \aleph_1$, nie zachodzi twierdzenie o zwartości. Rozważano jednak stosowne modyfikacje tego twierdzenia i wykazano, iż zachodzenie tych uogólnionych wersji twierdzenia o zwartości powiązane jest z istnieniem dużych liczb kardynalnych.

- W $L_{\omega_1\omega}$ zachodzi Lemat Interpolacyjny Craiga (nie zachodzi on w żadnej innej logice infinitarnej).

Można pokazać, że dla logik infinitarnych zachodzą następujące twierdzenia:

- $L_{\omega_1\omega}$ nie jest $(\omega., \omega)$-zwarta.

- $t(L_{\omega_1\omega}) \geqslant \aleph_1$.

- $h(L_{\omega_1\omega}) \geqslant \aleph_1$.

- Jeśli κ jest dowolną liczbą kardynalną nieskończoną, to:

  1. $\ell(L_{\kappa^+\omega}) \geqslant \kappa$
  2. $h(L_{\kappa^+\omega}) > \kappa^+$
  3. $t(L_{\kappa^+\omega}) > \kappa^+$
  4. $L_{\kappa^+\omega}$ nie jest (κ^+, κ^+)-zwarta.

- Jeśli κ jest dowolną liczbą kardynalną graniczną, to:

1. $\ell(L_{\kappa\omega}) \geqslant \kappa$
2. $h(L_{\kappa\omega}) \geqslant \kappa$
3. $t(L_{\kappa\omega}) \geqslant \kappa$.

Ponieważ w logikach infinitarnych zachodzi (stosownie sformułowane) dolne twierdzenie Löwenheima-Skolema, więc dla każdej nieskończonej liczby kardynalnej κ mamy: $\ell(L_{\kappa^+\omega}) = \kappa$.

Wersje zwartości języków infinitarnych wiążą się z istnieniem dużych liczb kardynalnych. Powiemy mianowicie, że nieskończona liczba kardynalna κ jest:

- *słabo zwarta*, gdy logika $L_{\kappa\omega}$ jest (κ, κ)-zwarta;
- *mocno zwarta*, gdy logika $L_{\kappa\omega}$ jest (∞, κ)-zwarta.

Zachodzą wtedy następujące fakty:

- Każda liczba słabo zwarta jest słabo nieosiągalna.
- Każda liczba mocno zwarta jest mocno nieosiągalna.

Ponadto, stosownie określone systemy dedukcji dla logik infinitarnych $L_{\kappa\omega}$ nie mogą być pełne, jeśli κ nie jest liczbą mocno zwartą. Można jednak określić pewne słabsze pojęcia pełności dla takich logik. Jak już wspomniano, w szczególności logika $L_{\omega_1\omega}$ może zostać wyposażona w tak rozumiany pełny system dedukcyjny.

4.2 Klasy spełniania

Ograniczymy się jedynie do kilku informacji, w celu uświadomienia słuchaczom – filologom i językoznawcom – jak złożone są podstawowe pojęcia semantyczne. Słuchacze zainteresowani dalszymi szczegółami zechcą zajrzeć np. do pracy Murawski 1995.

Wyniki Gödla i Tarskiego ukazały istotną różnicę między dwoma pojęciami: dowodliwości oraz prawdziwości. Jednym z aspektów tej różnicy jest złożoność definicyjna tych pojęć. Dla ustalenia uwagi, przyjmijmy, że interesuje nas dowodliwość w arytmetyce Peana pierwszego rzędu PA oraz prawdziwość w jej modelu standardowym. Wtedy:

1. Własność bycia twierdzeniem PA definiowana jest z użyciem jednego *nieograniczonego* kwantyfikatora egzystencjalnego: ψ jest twierdzeniem PA wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w PA dowód dla ψ. W tzw. *hierarchii arytmetycznej* jest to własność klasy Σ_1. „Być twierdzeniem PA” to własność *rekurencyjnie przeliczalna*.

2. Własność bycia zdaniem prawdziwym w modelu standardowym PA nie może zostać zdefiniowana w języku samej PA za pomocą formuły z jakąkolwiek skończoną liczbą kwantyfikatorów. Własność ta pozostaje *poza* całą nieskończoną hierarchią arytmetyczną.

4.2.1 Hierarchia arytmetyczna

Wiemy już, że operacje używające kwantyfikatorów ograniczonych prowadzą od relacji rekurencyjnych do relacji rekurencyjnych. Kwantyfikatory nieograniczone już nie mają tej własności – istotnie zwiększają stopień skomplikowania pojęć. Można dokonać logicznej klasyfikacji pojęć uwzględniającej liczbę kwantyfikatorów nieograniczonych potrzebnych w ich definicjach. Klasyfikacja ta przyjmuje postać różnych hierarchii, których każde piętro ma nieskończenie wiele stopni. Szczególnie istotne są dwie hierarchie, nazywane:

1. *hierarchią arytmetyczną* (kwantyfikujemy tylko zmienne indywidualne);
2. *hierarchią analityczną* (kwantyfikujemy zmienne przebiegające podzbiory uniwersum).

DEFINICJA HIERARCHII ARYTMETYCZNEJ:

1. $\Sigma^0_0 = \Pi^0_0 =$ zbiór relacji rekurencyjnych;
2. Relacja $R \subseteq \omega^k$ jest klasy Σ^0_{n+1} wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje relacja $Q \subseteq \omega^{k+1}$ klasy Π^0_n taka, że $R(a_1, \ldots, a_k) \equiv \exists x\ Q(a_1, \ldots, a_k, x)$.
3. Relacja $R \subseteq \omega^k$ jest klasy Π^0_{n+1} wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje relacja $Q \subseteq \omega^{k+1}$ klasy Σ^0_n taka, że $R(a_1, \ldots, a_k) \equiv \forall x\ Q(a_1, \ldots, a_k, x)$.

Zachodzą następujące fakty:

1. Relacje klasy Σ^0_1 to dokładnie relacje rekurencyjnie przeliczalne.
2. Relacja R jest rekurencyjna wtedy i tylko wtedy, gdy R oraz $\neg R$ są rekurencyjnie przeliczalne.
3. Jeżeli relacja R jest klasy Σ^0_n (odpowiednio, Π^0_n) zaś $f_1, \ldots, f_k$ są funkcjami rekurencyjnymi, to relacja P określona wzorem:

$$P(\vec{a}) \equiv R(f_1(\vec{a}), \ldots, f_k(\vec{a}))$$

jest również klasy Σ^0_n (odpowiednio, Π^0_n).

4. Każda klasa hierarchii arytmetycznej jest zamknięta ze względu na koniunkcję i alternatywę.

Tu (i dalej) $\vec{a}$ oznacza ciąg argumentów o takiej długości, ile argumentów ma rozważana relacja lub funkcja.

Dla dowolnego zbioru X relacji przez zbiór *uzupełnień* relacji z X rozumiemy zbiór $\mathcal{C}X$ zdefiniowany następująco: $R \in \mathcal{C}X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall \vec{a}\ (R(\vec{a}) \equiv \neg P(\vec{a}))$ dla pewnej relacji $P \in X$.

Zachodzą następujące fakty:

1. Klasa Σ^0_n jest identyczna z klasą uzupełnień relacji z klasy Π^0_n i *vice versa*.
2. Operacja kwantyfikatora ogólnego nie wyprowadza poza klasę Π^0_n (dla $n > 0$).
3. Operacja kwantyfikatora egzystencjalnego nie wyprowadza poza klasę Σ^0_n (dla $n > 0$).

Prawdziwe są następujące (właściwe) inkluzje:

1. $\Pi^0_n \subset \Sigma^0_{n+1}$,
2. $\Sigma^0_n \subset \Pi^0_{n+1}$,
3. $\Pi^0_n \subset \Pi^0_{n+1}$,
4. $\Sigma^0_n \subset \Sigma^0_{n+1}$.

Mamy ponadto:

1. Dla każdej klasy Σ^0_n (odpowiednio, Π^0_n) $(n > 0)$ istnieje w Σ^0_n (odpowiednio, Π^0_n) relacja uniwersalna dla wszystkich relacji tej klasy.
2. Dla każdego $n > 0$: $\Pi^0_n \neq \Sigma^0_n$.
3. Dla każdego n: $\Sigma^0_n \neq \Sigma^0_{n+1}$ oraz $\Pi^0_n \neq \Pi^0_{n+1}$.
4. Dla $n > 0$ relacja uniwersalna dla klasy Σ^0_n należy do Σ^0_n, ale nie należy ani do Π^0_n ani do Σ^0_{n-1}.
5. Dla $n > 0$ relacja uniwersalna dla klasy Π^0_n należy do Π^0_n, ale nie należy ani do Σ^0_n ani do Π^0_{n-1}.
6. Jeżeli relacja uniwersalna dla relacji klasy X sama należy do X, to $\mathcal{C}X \neq X$.

Na koniec, przyjrzyjmy się kilku przykładom:

1. *Przykład*. Pojęcie granicy ciągu jest pojęciem klasy Π^0_3 (i nie jest pojęciem ani klasy Σ^0_3 ani Σ^0_2 ani Π^0_2:

$$a = \lim a_n \equiv \forall k \exists m \forall n \ (n > m \to |a_n - a| < \frac{1}{k+1}).$$

2. *Przykład*. Jak widzieliśmy, zbiór twierdzeń Arytmetyki Peana jest klasy Σ^0_1, czyli jest rekurencyjnie przeliczalny (ale **nie** jest rekurencyjny!).

3. *Przykład*. Pojęcie *prawdy arytmetycznej* nie może zostać scharakteryzowane na żadnym piętrze hierarchii arytmetycznej.

4. *Przykład*. Również definicja pojęcia *dobrego porządku* wykracza poza hierarchię arytmetyczną.

4.2.2 Klasy spełniania

Twierdzenie Tarskiego o niedefiniowalności predykatu prawdy arytmetycznej w aksjomatycznej arytmetyce pierwszego rzędu nie wyklucza oczywiście, że predykat ów nie jest *w żaden sposób* definiowalny. Można zasadnie pytać, jak silnych środków wymaga podanie jego definicji oraz jakie różne postacie mogą przybierać takie definicje. Wreszcie, można także pytać o ewentualne związki między definiowalnością predykatu prawdziwości a np. dowodliwością niesprzeczności teorii.

Interesujące nas pojęcie omówimy przytaczając, w dużym uproszczeniu, definicje podane w monografii Romana Murawskiego *Recursive Functions and Metamathematics. Problems of Completeness and Decidability. Gödel's Theorems* (strony 173–175).

Można precyzyjnie zdefiniować funkcje $F : \omega \to \omega$ oraz $val : \omega \times \omega \to \omega$ takie, że:

1. Jeśli α jest termem, to $F(\ulcorner\alpha\urcorner)$ jest najmniejszą liczbą i taką, że $j < i$ dla każdej zmiennej x_j występującej w α; podobnie określamy $F(\ulcorner\psi\urcorner)$, gdy ψ jest formułą. Tu $\ulcorner u\urcorner$ jest numerem gödlowskim wyrażenia u.

2. Jeśli $t = \ulcorner\alpha\urcorner$ jest numerem gödlowskim termu α, to $val(t, v)$ jest wartością termu α dla wartościowania, które zmiennej x_i przyporządkowuje liczbę $(v)_i$, gdzie $(\ )_i$ jest znaną funkcją rzutu (występującą w definicji funkcji β Gödla).

Funkcje F i val są pierwotnie rekurencyjne, a więc są reprezentowalne w PA. Podamy teraz trzy znaczenia, przy których dwuargumentowy predykat S teorii T, gdzie $PA \subseteq T$, nazywany jest *predykatem spełniania*. Przyjmujemy konwencję, że jeśli R jest relacją (funkcją) rekurencyjną, to wyprostowany symbol R oznacza formułę języka $L(PA)$ mocno reprezentującą R w PA. Jeśli ψ reprezentuje w PA funkcję f, to piszemy $y = \mathrm{f}(x)$ w miejsce $\forall z\ (\psi(x,z) \equiv z = y)$. Symbol $v \upharpoonright i$ oznacza segment początkowy ciągu kodowanego przez v (do miejsca i). Symbol $\overline{n}$ oznacza liczebnik nazywający liczbę n. $\langle\ \rangle$ jest funkcją kodującą ciągi, Seq to zbiór jej wartości, lh jest funkcją podającą długość ciągu. Formuły: Form, Term, mocno reprezentują w PA zbiory numerów gödlowskich, odpowiednio, formuł i termów, Fr mocno reprezentuje w PA relację zachodzącą między a i b wtedy, gdy b jest numerem gödlowskim zmiennej występującej jako wolna w formule o numerze gödlowskim a. Funkcja SN to przypisanie symbolom języka $L(PA)$ ustalonych kodów. Wszystkie definicje znajdzie czytelnik w cytowanej monografii Romana Murawskiego.

DEFINICJA (A). Dwuargumentowy predykat $\underline{S}$ języka $L(T)$ nazywamy *predykatem spełniania* dla PA w sensie (A), gdy dla każdej formuły ψ języka $L(PA)$, której wszystkie zmienne wolne są wśród $x_1, \ldots, x_n$ oraz dla dowolnych liczb naturalnych $k_1, \ldots, k_n$ zachodzi:

$$T \vdash \psi(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}) \equiv \underline{S}(\ulcorner\psi\urcorner, \overline{\langle k_1, \ldots, k_n\rangle}).$$

DEFINICJA (B). Dwuargumentowy predykat $\underline{S}$ języka $L(T)$ nazywamy *predykatem spełniania* dla PA w sensie (B), gdy dla każdej formuły ψ języka $L(PA)$, której wszystkie zmienne wolne są wśród $x_1, \ldots, x_n$:

$$T \vdash \forall x\ ((\mathrm{Seq}(x) \wedge \mathrm{lh}(x) = \overline{n}) \rightarrow (\psi((x)_1, \ldots, (x)_n) \equiv \underline{S}(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}, x))).$$

DEFINICJA (C). Dwuargumentowy predykat $\underline{S}$ języka $L(T)$ nazywamy *predykatem spełniania* dla PA w sensie (C), gdy w T są dowodliwe następujące formuły:

1. $\underline{S}(u,v) \rightarrow (\mathrm{Form}(u) \wedge \mathrm{Seq}(v) \wedge \mathrm{lh}(v) = \mathrm{F}(u))$,
2. $(\mathrm{Term}(t_1) \wedge \mathrm{Term}(t_2) \wedge u = \langle\overline{SN(=)}, t_1, t_2\rangle) \rightarrow$
   $\rightarrow (\underline{S}(u,v) \equiv \mathrm{val}(t_1, v|\mathrm{F}(t_1)) = \mathrm{val}(t_2, v|\mathrm{F}(t_2)))$,
3. $(u = \langle\overline{SN(\neg)}, u_1\rangle \wedge \mathrm{Form}(u_1)) \rightarrow (\underline{S}(u,v) \equiv \neg\underline{S}(u_1, v))$
4. $(u = \langle\overline{SN(\vee)}, u_1, u_2\rangle \wedge \mathrm{Form}(u_1) \wedge \mathrm{Form}(u_2)) \rightarrow$
   $\rightarrow (\underline{S}(u,v) \equiv (\underline{S}(u_1, v \upharpoonright \mathrm{F}(u_1)) \vee \underline{S}(u_2, v \upharpoonright \mathrm{F}(u_2))))$,

5. $(u = \langle\overline{SN(\exists)}, \overline{\ulcorner x_k \urcorner}, u_1\rangle \wedge \text{Form}(u_1) \wedge \neg\text{Fr}(u_1, 2k)) \to (\underline{S}(u, v) \equiv \underline{S}(u_1))$,
6. $(u = \langle\overline{SN(\exists)}, \overline{\ulcorner x_k \urcorner}, u_1\rangle \wedge \text{Form}(u_1) \wedge \text{Fr}(u_1, 2k)) \to$
$\to (\underline{S}(u, v) \equiv \exists x\ \underline{S}(u_1, v * [k, x]))$.

Występujący w ostatnim warunku symbol $v * [k, x]$ oznacza liczbę w taką, że:

1. $lh(w) = \max(lh(v), k)$,
2. $\forall i < lh(v)\ (i \neq k \to (w)_i = (v)_i)$,
3. $(w)_k = x$,
4. $\forall i\ (lh(v) < i < k \to (w)_i = 0)$.

W każdej z tych definicji wyrażeniu $\underline{S}(u, v)$ nadajemy więc znaczenie: formuła o numerze gödlowskim u jest spełniona przez wartościowanie v. Jeśli $\underline{S}$ jest predykatem spełniania w znaczeniu (C), to jest też takim predykatem w znaczeniu (B), a jeśli $\underline{S}$ jest predykatem spełniania w znaczeniu (B), to jest też takim predykatem w znaczeniu (A). Twierdzenie Tarskiego dotyczyło znaczenia (A). Ponieważ nie istnieje definiowalny w PA predykat spełniania w znaczeniu (A), więc nie istnieje też taki predykat w znaczeniach (B) lub (C).

Jeśli $\underline{S}$ jest predykatem spełniania, to jego interpretację S w modelu $\mathfrak{M}$ nazywamy *klasą spełniania* nad modelem $\mathfrak{M}$.

Zbiór formuł języka (niestandardowego), w którym formuły kodowane są nie tylko standardowymi liczbami naturalnymi, lecz także liczbami niestandardowymi z modelu $\mathfrak{M}$ oznaczamy przez $For(\mathfrak{M})$. Klasa spełniania S nad modelem $\mathfrak{M}$ jest:

1. *pełna*, gdy dla dowolnej formuły $\psi \in For(\mathfrak{M})$ i dowolnego wartościowania a w modelu $\mathfrak{M}$: albo $S(\psi, a)$, albo $S(\neg\psi, a)$;

2. *induktywna*, gdy $(\mathfrak{M}, S)$ jest modelem dla teorii, której aksjomatami są: aksjomaty PA, schemat indukcji dla formuł z języka $L(PA) \cup \{\underline{S}\}$ oraz zdania orzekające, że S jest klasą spełniania. Uwaga: we wcześniejszej terminologii induktywne klasy spełniania nazywane były *substitutable satisfaction classes*.

Klasy spełniania S_1 i S_2 nad modelem $\mathfrak{M}$ są *sprzeczne na zdaniach*, gdy istnieje (niestandardowe) zdanie ψ w $For(\mathfrak{M})$ takie, że: $S_1(\psi, \emptyset)$ oraz $S_2(\neg\psi, \emptyset)$ lub $S_2(\psi, \emptyset)$ oraz $S_1(\neg\psi, \emptyset)$.

Okazuje się, że klasy spełniania mają pewne „dziwne", a czasem nawet „patologiczne" własności. Nie nad każdym modelem istnieją klasy spełniania o „porządnych" własnościach. Czasem są one bardzo niejednoznaczne – istnieje ich np.

kontinuum. Zdarza się, że odpowiednio długa alternatywa zdań prawdziwych (w sensie rozważanej klasy spełniania) okazuje się fałszywa. Zaiste, Prawda jest pojęciem wielce tajemniczym.

5 Dodatek A: Indeksy

Pokażemy teraz, że funkcje rekurencyjne można kodować, przypisując im liczby naturalne jako kody. W konsekwencji otrzymujemy szereg ważnych twierdzeń elementarnej teorii rekursji. Indeksowanie funkcji rekurencyjnych pozwala również na sformułowanie pewnych ważnych twierdzeń metalogicznych (dotyczących niezupełności, nierozstrzygalności, itd.) w terminach dotyczących różnych rodzajów zbiorów (produktywnych, twórczych i innych). Jest wiele metod przyporządkowywania funkcjom indeksów, zależnych od używanych funkcji kodujących. Podstawą prezentacji w tym punkcie są monografie: Hinman, P. 2005. *Fundamentals of Mathematical Logic*, A K Peters, Ltd., Wellesley oraz Odifreddi, P.G. 1989. *Classical recursion theory.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam. Współczesna teoria rekursji to bardzo zaawansowana teoria matematyczna, poniżej podajemy jedynie kilka bardzo elementarnych faktów.

5.1 Systemy indukcyjne

Systemem indukcyjnym nazywamy każdy układ postaci $\mathcal{X} = (X, X_0, \mathcal{H})$ taki, że:

1. $X \neq \emptyset$
2. $X_0 \subseteq X$
3. $\mathcal{H}$ jest rodziną skończenie argumentowych funkcji, tj. dla każdego $H \in \mathcal{H}$ istnieje k_H taka, że $H : X^{k_H} \to X$.

Jeśli $\mathcal{X} = (X, X_0, \mathcal{H})$ jest systemem indukcyjnym, to niech:

$$X_{n+1} = X_n \cup \{H(x_0, \ldots, x_{k_H - 1}) : \ H \in \mathcal{H} \wedge x_0, \ldots, x_{k_H - 1} \in X_n\}$$

$$\overline{\mathcal{X}} = \bigcup_{n \in \omega} X_n.$$

Niech $\mathcal{X} = (X, X_0, \mathcal{H})$ będzie systemem indukcyjnym. Zbiór $Y \subseteq X$ nazywamy *$\mathcal{X}$-domkniętym*, gdy: $X_0 \subseteq Y$ oraz dla wszystkich $H \in \mathcal{H}$ i $x_0, \ldots, x_{k_H} \in Y$ mamy: $H(x_0, \ldots, x_{k_H}) \in Y$.

Dla dowolnego systemu indukcyjnego $\mathcal{X} = (X, X_0, \mathcal{H})$:

1. $\overline{\mathcal{X}}$ jest $\subseteq$-najmniejszym zbiorem $\mathcal{X}$-domkniętym.
2. $\mathcal{X} = \bigcap\{Y \subseteq X : Y \text{ jest } \mathcal{X}\text{-domknięty}\}$.

Przez *$\mathcal{X}$-derywację* rozumiemy każdy niepusty skończony ciąg $(x_0, \ldots, x_n)$ elementów X taki, że dla dowolnych $i \leqslant n$ zachodzi alternatywa:

1. $x_i \in X_0$ lub
2. dla pewnej $H \in \mathcal{H}$ oraz pewnych $j_0, \ldots, j_{k_H-1} < i$ mamy: $x_i = H(j_0, \ldots, j_{k_H-1})$.

$\mathcal{X}$-derywacja $(x_0, \ldots, x_n)$ jest $\mathcal{X}$*-derywacją* elementu x_n.

Klasyczne definicje przez rekursję wykorzystują następujące dobrze znane twierdzenie: *Dla dowolnego zbioru Z, dowolnego $z_0 \in Z$ oraz dowolnej funkcji $G : Z \times \omega \to Z$ istnieje dokładnie jedna funkcja $F : \omega \to Z$ taka, że $F(0) = z_0$ oraz dla wszystkich $n \in \omega$ mamy: $F(n+1) = G(F(n), n)$.*

Mówimy, że system indukcyjny $\mathcal{X} = (X, X_0, \mathcal{H})$ jest *jednoznacznie czytelny*, gdy:

1. zbiory wartości wszystkich funkcji $H \in \mathcal{H}$ są parami rozłączne oraz rozłączne ze zbiorem X_0
2. wszystkie funkcje $H \in \mathcal{H}$ są injekcjami.

TWIERDZENIE. *O definiowaniu przez rekursję.* Niech $\mathcal{X} = (X, X_0, \mathcal{H})$ będzie jednoznacznie czytelnym systemem indukcyjnym. Dla dowolnego zbioru Z, dowolnej funkcji $F_0 : X_0 \to Z$ oraz dowolnej rodziny funkcji $(G_H : H \in \mathcal{H})$ takiej, że $G_H : Z^{k_H} \times X^{k_H} \to Z$ dla wszystkich $H \in \mathcal{H}$ istnieje dokładnie jedna funkcja $F : \overline{\mathcal{X}} \to Z$, która rozszerza F_0 i taka, że dla każdej $H \in \mathcal{H}$ oraz wszystkich $x_0, \ldots, x_{k_H-1} \in \overline{\mathcal{X}}$:

$$F(H(x_0, \ldots, x_{k_H-1})) = G_H(F(x_0), \ldots, F(x_{k_H-1}), x_0, \ldots, x_{k_H-1}).$$

Dla ustalonego systemu indukcyjnego $\mathcal{X}$ zastosowania tego twierdzenia nazywamy definicjami przez $\mathcal{X}$*-rekursję*.

Umówmy się, że w tym punkcie stosujemy (pierwotnie rekurencyjne) kodowanie określone przez rekursję prostą:

1. $\langle\rangle^0 = 1$
2. $\langle m_0, \ldots, m_k\rangle^{k+1} = p_0^{m_0+1} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k+1}$

(potem można opuszczać indeks k i pisać po prostu $\langle m_0, \ldots, m_k\rangle$). „Odkodowanie” daje funkcja: $(s)_i = \mu m < s[\neg div(s, p_i^{m+2})]$. Tu: p_i jest i-tą liczbą pierwszą, symbol „$div(a, b)$” oznacza „b dzieli bez reszty a”. W zwykły sposób definiujemy też:

1. $lg(s)$ funkcję *długości* $lg(s) = \mu k < s\ (\neg div(s, p_k))$

2. $Sq(s)$ zbiór *numerów* $Sq(s) \equiv \forall i < s\ (div(s, p_i) \rightarrow i < lg(s))$

3. operację $*$ *konkatenacji*: $s * t = s \times p_{lg(s)}^{(t)_0+1} \times \ldots \times p_{lg(s)+lg(t)-1}^{(t)_{lg(t)-1}+1}$.

Rozważmy dowolny system indukcyjny $\mathcal{X} = (\omega, X_0, \mathcal{H})$. Wtedy:

1. Jeśli X_0 jest (pierwotnie) rekurencyjny, a $\mathcal{H}$ jest skończonym zbiorem funkcji (pierwotnie) rekurencyjnych, to $\overline{\mathcal{X}}$ jest rekurencyjnie przeliczalny.

2. Jeśli w dodatku każda $H \in \mathcal{H}$ jest rosnąca (względem każdego argumentu), to $\overline{\mathcal{X}}$ jest (pierwotnie) rekurencyjny.

Definiujemy:

1. $Der_{\mathcal{X}} = \{s :\ ((s)_0, \ldots, (s)_{lg(s)-1})$ jest $\mathcal{X}$-derywacją$\}$

2. $Derof_{\mathcal{X}} = \{(s, m) :\ Der_{\mathcal{X}}(s) \wedge (s)_{lg(s)-1} = m\}$

3. $m \in \overline{\mathcal{X}} \equiv \exists s\ Derof_{\mathcal{X}}(s, m)$.

5.2 Indeksy pierwotnie rekurencyjne

Zbiór PRI *indeksów pierwotnie rekurencyjnych* jest najmniejszym zbiorem liczb naturalnych takim, że dla wszystkich k:

1. dla wszystkich n oraz $i < k$: $\langle 0, k, n\rangle, \langle 1, k, i\rangle, \langle 2, k, i\rangle \in PRI$

2. dla wszystkich l, jeśli $b, c_0, \ldots, c_{l-1} \in PRI$, to $\langle 3, k, b, c_0, \ldots, c_{l-1}\rangle \in PRI$

3. jeśli $b, c \in PRI$, to $\langle 4, k+1, b, c\rangle \in PRI$.

Z kolei, przyporządkujemy indeksom pierwotnie rekurencyjnym funkcje pierwotnie rekurencyjne. Funkcjami prostymi są: funkcje stałe równe n, rzuty oraz funkcje następnika względem i-tego argumentu. Operacje na funkcjach to: złożenie i schemat rekursji prostej.

Dygresja. Indeksy pierwotnie rekurencyjne można traktować jako kody obliczeń. Obliczenia mają, jak wiadomo, strukturę drzew.

Funkcja $a \mapsto [a]$ ze zbioru PRI w zbiór wszystkich funkcji pierwotnie rekurencyjnych jest zdefiniowana warunkami:

1. $[\langle 0, k, n\rangle]$ jest (k-argumentową) funkcją stałą równą n;

2. $[\langle 1, k, i\rangle]$ jest (k-argumentową) funkcją rzutu na i-tą współrzędną;

3. $[\langle 2, k, i\rangle]$ jest (k-argumentową) funkcją następnika względem i-tego argumentu;

4. $[\langle 3, k, b, c_0, \ldots, c_{l-1}\rangle]$ jest (k-argumentową) funkcją otrzymaną przez złożenie funkcji $[b]$ i funkcji $[c_0]$, ..., $[c_{l-1}]$;

5. $[\langle 4, k+1, b, c\rangle]$ jest (k-argumentową) funkcją otrzymaną przez rekursję prostą z funkcji $[b]$ oraz $[c]$.

Mówimy, że $a \in PRI$ jest *indeksem pierwotnie rekurencyjnym* funkcji pierwotnie rekurencyjnej $[a]$.

Niech $PRI^k = \{a \in PRI : \ (a)_1 = k\}$. Wtedy PRI^k jest zbiorem indeksów pierwotnie rekurencyjnych k-argumentowych funkcji pierwotnie rekurencyjnych. Każda funkcja pierwotnie rekurencyjna ma nieskończenie wiele pierwotnie rekurencyjnych indeksów.

Dla każdej k i wszystkich $a, m_0, \ldots, m_{k-1}$ niech:

$$U^k_{PRI}(a, m_0, \ldots, m_{k-1}) = \begin{cases} [a](m_0, \ldots, m_{k-1}), & \text{gdy} \quad a \in PRI^k \\ 0, & \text{gdy} \quad a \notin PRI^k. \end{cases}$$

Wtedy U^k_{PRI} jest *funkcją uniwersalną* dla klasy wszystkich funkcji pierwotnie rekurencyjnych k-argumentowych. Jest ona rekurencyjna, ale nie jest pierwotnie rekurencyjna.

Dla dowolnej 2-argumentowej funkcji J na ω oraz dowolnych liczb k i l, niech $J^{*k,l}$ będzie funkcją k-argumentową:

$$J^{*k,l}(m_0, \ldots, m_{k-1}) = J(\langle m_0, \ldots, m_{k-1}\rangle, k),$$

a jeśli $\mathcal{I}$ jest zbiorem funkcji 2-argumentowych, to niech:

$$\mathcal{I}^* = \{J^{*k,l} : \ J \in \mathcal{I} \wedge k, l \in \omega\}.$$

Powiemy, że J jest *porządna*, gdy dla wszystkich k, l oraz $m_0, \ldots, m_{k-1}$:

$$k, l < J^{*k,l}(m_0, \ldots, m_{k-1}).$$

Powiemy, że $\mathcal{X} = (\omega, X_0, \mathcal{H} \cup \mathcal{I})$ jest *(pierwotnie) rekurencyjnym systemem indukcyjnym*, gdy:

1. $\mathcal{X}$ jest systemem indukcyjnym,

2. X_0 jest (pierwotnie) rekurencyjny,

3. $\mathcal{I}$ jest skończonym zbiorem porządnych 2-argumentowych funkcji (pierwotnie) rekurencyjnych.

Zachodzą następujące fakty, dla dowolnego (pierwotnie) rekurencyjnego systemu indukcyjnego $\mathcal{X} = (\omega, X_0, \mathcal{H} \cup \mathcal{I})$:

1. $\overline{\mathcal{X}}$ jest rekurencyjnie przeliczalny.
2. Jeśli wszystkie $H \in \mathcal{H}$ oraz $J^{*k,l} \in \mathcal{I}^*$ są rosnące (względem wszystkich argumentów), to $\overline{\mathcal{X}}$ jest (pierwotnie) rekurencyjny.

W konsekwencji, zbiór PRI jest pierwotnie rekurencyjny.

5.3 Obliczenia pierwotnie rekurencyjne

Definiujemy zbiór PRC (kodów) *obliczeń pierwotnie rekurencyjnych* jako najmniejszy zbiór taki, że:

I. Dla wszystkich n oraz $i < k$:

1. $\langle\langle 0, k, n\rangle, m_0, \ldots, m_{k-1}, n\rangle \in PRC$
2. $\langle\langle 1, k, i\rangle, m_0, \ldots, m_{k-1}, m_i\rangle \in PRC$
3. $\langle\langle 2, k, i\rangle, m_0, \ldots, m_{k-1}, m_i + 1\rangle \in PRC$

II. Dla wszystkich $l, p_0, \ldots, p_{l-1}, q$:

1. jeśli dla wszystkich $i < l$:
   $\langle c_i, m_0, \ldots, m_{k-1}, p_i\rangle \in PRC$ oraz $\langle b, p_0, \ldots, p_{l-1}, q\rangle \in PRC$, to
   $\langle\langle 3, k, b, c_0, \ldots, c_{l-1}\rangle, m_0, \ldots, m_{k-1}, q\rangle \in PRC$

III. Dla wszystkich q:

1. jeśli $\langle b, m_0, \ldots, m_{k-1}, q\rangle \in PRC$, to
   $\langle\langle 4, k+1, b, c\rangle, m_0, \ldots, m_{k-1}, 0, q\rangle \in PRC$
2. dla wszystkich n, jeśli $\langle\langle 4, k+1, b, c\rangle, m_0, \ldots, m_{k-1}, n, p\rangle \in PRC$ oraz
   $\langle c, p, m_0, \ldots, m_{k-1}, n, q\rangle \in PRC$, to
   $\langle\langle 4, k+1, b, c\rangle, m_0, \ldots, m_{k-1}, n+1, q\rangle \in PRC$.

Mamy, dla każdej k i dowolnych $a \in PRI^k$, $m_0, \ldots, m_{k-1}$:
$[a](m_0, \ldots, m_{k-1}) =$ jedyne q takie, że $\langle a, m_0, \ldots, m_{k-1}, q\rangle \in PRC$.
Zbiór PRC jest rekurencyjnie przeliczalny.
Uwaga. Dla funkcji 1-argumentowych (czyli gdy $(a)_1 = 1$) mamy: $[a](m) = q \equiv \exists s\ (Derof^{\mathcal{X}}(s, \langle a, m, q\rangle))$, gdzie $\overline{\mathcal{X}}$ jest systemem indukcyjnym definiującym PRC.

5.4 Częściowe obliczenia rekurencyjne

Zdefiniujemy zbiór COR (kodów) *częściowych obliczeń rekurencyjnych* jako najmniejszy zbiór taki, że:

1. Zachodzą warunki 1.–3. z definicji PRC (gdzie oczywiście zamieniamy PRC na COR)

2. 4. Dla wszystkich b oraz n, jeśli $\langle b, m_0, \ldots, m_{k-1}, n, 0\rangle \in COR$ oraz dla każdego $p < n$ istnieje $q_p > 0$ taka, że $\langle b, m_0, \ldots, m_{k-1}, p, q_p\rangle \in COR$, to $\langle\langle 5, k, b\rangle m_0, \ldots, m_{k-1}, n\rangle \in COR$.

Zbiór COR jest rekurencyjnie przeliczalny.

Przypomnijmy, że k-argumentowa funkcja jest *częściowa*, gdy jej dziedzina jest podzbiorem ω^k.

Piszemy $F(x_0, \ldots, x_{k-1}) \downarrow$, gdy $(x_0, \ldots, x_{k-1}) \in dom(F)$.

Jeśli nie zachodzi $F(x_0, \ldots, x_{k-1}) \downarrow$, to piszemy $F(x_0, \ldots, x_{k-1}) \uparrow$.

Klasa wszystkich *częściowych funkcji rekurencyjnych* to najmniejsza klasa zawierająca funkcje proste i domknięta na złożenia, rekursję prostą oraz operację *minimum*, rozumianą następująco:

Jeśli $G(m_0, \ldots, m_{k-1}, n)$ jest częściową funkcją rekurencyjną oraz dla wszystkich $m_0, \ldots, m_{k-1}$ spełnione są warunki:

1. $\mu y\ (G(m_0, \ldots, m_{k-1}, y) = 0) \downarrow$

2. $\forall z \leqslant y\ (G(m_0, \ldots, m_{k-1}, z)) \downarrow$,

to $F(m_0, \ldots, m_{k-1}) = \mu y\ (G(m_0, \ldots, m_{k-1}, y) = 0)$ jest częściową funkcją rekurencyjną.

Dla funkcji częściowych F i G piszemy: $F(m_0, \ldots, m_{k-1}) \simeq G(n_0, \ldots, n_{l-1})$, gdy wartości po obu stronach $\simeq$ są określone i równe, lub gdy obie są nieokreślone.

5.5 Indeksy (dla funkcji częściowych)

Dla każdej k i wszystkich a takich, że $k = (a)_1$ oraz dowolnych $m_0, \ldots, m_{k-1}$ i n niech:

$\{a\}(m_0, \ldots, m_{k-1}) \simeq n \ \equiv\ \langle a, m_0, \ldots, m_{k-1}, n\rangle \in COR$

$U^k(a, m_0, \ldots, m_{k-1}) \simeq \{a\}(m_0, \ldots, m_{k-1}) \simeq \mu n\ (\langle a, m_0, \ldots, m_{k-1}, n\rangle \in COR)$.

U^k jest (częściową) *funkcją uniwersalną* dla k-argumentowych funkcji rekurencyjnych. Dla każdej k, funkcja U^k jest częściową funkcją rekurencyjną.

Następujące warunki są równoważne (dla dowolnej funkcji częściowej F):

1. F jest częściowo rekurencyjna.

2. $F = \{a\}$ dla pewnego $a \in \omega$.

Mamy zatem wyliczenie $(\{a\} : \ a \in \omega)$ wszystkich funkcji częściowo rekurencyjnych, w tym sensie, że:

$\{a\}(x_0, \ldots, x_{k-1}) \simeq y \ \equiv \ \langle a, x_0, \ldots, x_{k-1}, y \rangle \in COR.$

Liczbę a nazywamy *indeksem* funkcji $\{a\}$.

Jeśli nie zachodzi $\{a\}(x_0, \ldots, x_{k-1}) \downarrow$, to piszemy $\{a\}(x_0, \ldots, x_{k-1}) \uparrow$.

Uwaga. Formalnie, każda liczba a jest indeksem, ale może oczywiście być indeksem funkcji pustej. Jeśli $\{a\} \neq \emptyset$, to a musi być postaci $\langle i, k, \ldots \rangle$; wtedy $\{a\}$ jest funkcją k-arg., a więc: jeśli $\{a\}(m_0, \ldots, m_{k-1}) \downarrow$, to $(a)_1 = k$.

Zamiast $\{a\}$ używa się często oznaczeń: φ_a lub ϕ_a (co bywa wygodne ze względów typograficznych).

Dla $a \in \omega$ niech $W_a = \{x : \ \{a\}(x) \downarrow\}$.

Wtedy: zbiór A jest rekurencyjnie przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy $A = W_a$ dla pewnego $a \in \omega$ (czyli: A jest r.e. wtedy i tylko wtedy, gdy A jest dziedziną częściowej funkcji rekurencyjnej). Powyższe może więc służyć za *definicję* zbiorów rekurencyjnie przeliczalnych.

$\{W_a : a \in \omega\}$ jest zatem wyliczeniem wszystkich zbiorów rekurencyjnie przeliczalnych. Nazywa się je *wyliczeniem standardowym*.

1. $\{\{a\} : a \in \omega\}$ — standardowe wyliczenie wszystkich częściowych funkcji rekurencyjnych (w innych oznaczeniach: $\{\varphi_a : a \in \omega\}$)

2. $\{W_a : a \in \omega\}$ — standardowe wyliczenie wszystkich zbiorów rekurencyjnie przeliczalnych.

5.6 Kilka ważnych twierdzeń

5.6.1 Twierdzenie o postaci normalnej

TWIERDZENIE KLEENE'GO O POSTACI NORMALNEJ. *Istnieją:*

1. *funkcja pierwotnie rekurencyjna* $\mathcal{U}$ *oraz*

2. *dla każdej* $n \geqslant 1$ *relacja pierwotnie rekurencyjna* $\mathcal{T}_n$

takie, że dla każdej n*-argumentowej funkcji pierwotnie rekurencyjnej* f *istnieje liczba* e *taka, że:*

1. $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \ \mathcal{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)$

2. $f(x_1, \ldots, x_n) = \mathcal{U}(\mu y\ \mathcal{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, y))$.

Zarys dowodu. Dla każdej funkcji pierwotnie rekurencyjnej f istnieje liczba e taka, że $f = [e]$ oraz $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists!\ y\ \langle e, x_1, \ldots, x_n, y \rangle \in PRC$ (przy tym $f(x_1, \ldots, x_n) = y$), co wyznacza (pierwotnie rekurencyjną) relację $\mathcal{T}_n$. Minimum jest efektywne. Funkcja (rzutu) $\mathcal{U}$ daje wartość y z $\mu y\ \mathcal{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)$.

5.6.2 Twierdzenie o enumeracji

TWIERDZENIE O ENUMERACJI. *Istnieje funkcja rekurencyjna dwuargumentowa ψ taka, że:*

1. *dla wszystkich liczb e: $\psi(e, x)$ jest jednoargumentową funkcją pierwotnie rekurencyjną,*

2. *każda jednoargumentowa funkcja pierwotnie rekurencyjna jest postaci $\psi(e, x)$ dla pewnej e.*

Zarys dowodu. Niech $\psi(e, x) = \mathcal{U}(\mu y\ \mathcal{T}_1(e, x, y))$, gdy $e \in PRI$, a $\psi(e, x) = 0$ w przeciwnym przypadku.

Mamy także wersję twierdzenia o enumeracji dla funkcji n-argumentowych. Twierdzenia o postaci normalnej i enumeracji mają też stosowne wersje dla funkcji częściowych, które sformułujemy bez zarysu dowodu:
POSTAĆ NORMALNA. *Istnieje funkcja pierwotnie rekurencyjna $\mathcal{U}$ oraz, dla każdej $n \geqslant 1$ relacja pierwotnie rekurencyjna $\mathcal{T}_n$ takie, że dla każdej n-argumentowej funkcji częściowej f istnieje liczba e taka, że:*

1. *$f(x_1, \ldots, x_n) \downarrow$ dokładnie wtedy, gdy $\exists y\ \mathcal{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)$*

2. *$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mathcal{U}(\mu y\ \mathcal{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, y))$.*

ENUMERACJA. *Dla każdej n piszmy: $\{e\}^n \simeq \mathcal{U}(\mu y\ \mathcal{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, y))$. Wtedy ciąg $(\{e\}^n)_{e \in \omega}$ jest częściowo rekurencyjną enumeracją wszystkich n-argumentowych funkcji częściowo rekurencyjnych, czyli:*

1. *dla każdej e, $\{e\}^n$ jest n-argumentową funkcją częściowo rekurencyjną,*

2. *jeśli f jest n-argumentową funkcją częściowo rekurencyjną, to istnieje e taka, że $f \simeq \{e\}^n$*

3. *istnieje $(n + 1)$-argumentowa częściowa funkcja rekurencyjna ψ taka, że $\psi(e, x_1, \ldots, x_n) \simeq \{e\}^n(x_1, \ldots, x_n)$.*

5.6.3 Twierdzenie o parametryzacji

TWIERDZENIE O PARAMETRYZACJI (S^m_n-TWIERDZENIE). *Dla dowolnych $m, n \in N$ istnieje pierwotnie rekurencyjna funkcja S^m_n taka, że dla wszystkich $e, x_0, \ldots, x_{m-1}$ oraz $y_0, \ldots, y_{n-1}$:*

$$\{S^m_n(e, x_0, \ldots, x_{m-1})\}(y_0, \ldots, y_{n-1}) \simeq \{e\}(x_0, \ldots, x_{m-1}, y_0, \ldots, y_{n-1}).$$

W szczególności, dla $m = 1$, $n = 1$ mamy: $\{S^1_1(e, x)\}(y) \simeq \{e\}(x, y)$.
Zarys dowodu. Korzystamy ze schematów rekursji prostej:

1. $S^1_n(e, x) = \langle 3, n, e, \langle 0, n, x\rangle, \langle 1, n, 0\rangle, \ldots, \langle 1, n, n-1\rangle\rangle$
2. $S^{m+1}_n(e, x_0, \ldots, x_m) = S^1_n(S^m_{n+1}(e, x_0, \ldots, x_{m-1}), x_m)$.

5.6.4 Twierdzenia o diagonalizacji

Dla całkiem dowolnego zbioru S oraz funkcji $d : S \to S$, która nie jest identycznością (czyli $d(a) \neq a$ dla $a \in S$) rozważmy (być może) nieskończoną macierz elementów S:

$$\begin{array}{cccc} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & \ldots \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

1. *Ciągiem diagonalnym* (dla (S, d)) nazwiemy ciąg: $d(a_{0,0}), d(a_{1,1}), d(a_{2,2}), \ldots$
2. Wtedy ciąg diagonalny jest różny od każdego wiersza powyższej macierzy (ponieważ różni się od n-tego wiersza n-tym elementem, na mocy definicji d).

Szczególnym przypadkiem zastosowania tej konstrukcji jest np. dowód Cantora nieprzeliczalności zbioru wszystkich podzbiorów zbioru ω. Mamy też rekurencyjną wersję twierdzenia Cantora: *Nie istnieje funkcja rekurencyjna, która oblicza (co najmniej jeden) indeks dla każdej (jednoargumentowej) funkcji rekurencyjnej o wartościach w zbiorze* $\{0, 1\}$.
Zarys dowodu (nie wprost). Niech f będzie funkcją rekurencyjną taką, że $\{f(x)\}$ jest całkowita dla każdej x. Zdefiniujmy: $g(x) \simeq 1 - \{f(x)\}(x)$. Wtedy g jest funkcją częściowo rekurencyjną (na mocy twierdzenia o enumeracji) o wartościach w zbiorze $\{0, 1\}$ i całkowitą (bo f całkowita). Nadto, g różni się (na argumencie x) od każdej funkcji $\{f(x)\}$, czyli żaden indeks funkcji g nie należy do $rng(f)$.

TWIERDZENIE (POST, GÖDEL, KLEENE). *Istnieje zbiór rekurencyjnie przeliczalny, który nie jest rekurencyjny.*
Zarys dowodu:

1. Niech $\mathbb{K} = \{x : x \in W_x\}$, czyli $x \in \mathbb{K}$ dokładnie wtedy, gdy $\{x\}(x) \downarrow$.
2. Na mocy twierdzenia o enumeracji istnieje funkcja częściowo rekurencyjna f taka, że: $f(x) \simeq \{x\}(x)$.
3. Stąd $\mathbb{K}$ jest rekurencyjnie przeliczalny, gdyż: $x \in \mathbb{K}$ dokładnie wtedy, gdy $\{x\}(x) \downarrow$.
4. Gdyby $\mathbb{K}$ był rekurencyjny, to $\omega - \mathbb{K}$ byłby rekurencyjnie przeliczalny (z twierdzenia Posta). Ale $x \in (\omega - \mathbb{K})$ dokładnie wtedy, gdy $x \notin W_x$, czyli $\omega - \mathbb{K}$ jest różny od wszystkich zbiorów rekurencyjnie przeliczalnych.

PROBLEM STOPU. *Zbiór $\mathbb{K}_0$ zdefiniowany warunkiem: $\langle x, e\rangle \in \mathbb{K}_0$ jest rekurencyjnie przeliczalny, lecz nie jest rekurencyjny.*
Zarys dowodu. Zauważmy, że $\langle x, e\rangle \in \mathbb{K}_0$ dokładnie wtedy, gdy $\{e\}(x) \downarrow$.

1. Rekurencyjnej przeliczalności $\mathbb{K}_0$ dowodzimy tak samo, jak dla $\mathbb{K}$.
2. Gdyby $\mathbb{K}_0$ był rekurencyjny, to również $\mathbb{K}$ byłby rekurencyjny, ponieważ: $x \in \mathbb{K}$ dokładnie wtedy, gdy $\langle x, x\rangle \in \mathbb{K}_0$. A zatem $\mathbb{K}_0$ nie jest rekurencyjny.

Mówimy, że A jest *zbiorem indeksów* zbioru $\mathcal{A}$ częściowych funkcji rekurencyjnych, gdy $A = \{x : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$.
Uwaga. Tu warto pisać φ_x zamiast $\{x\}$ dla uniknięcia nieporozumień.

Nazwiemy zbiór $\mathcal{A}$ funkcji częściowo rekurencyjnych *zupełnie rekurencyjnym*, gdy jego zbiór indeksów jest rekurencyjny.
TWIERDZENIE RICE'A. *Zbiór $\mathcal{A}$ funkcji częściowo rekurencyjnych jest zupełnie rekurencyjny dokładnie wtedy, gdy albo jest pusty, albo zawiera wszystkie funkcje częściowo rekurencyjne.*
Zarys dowodu. Jeśli $\mathcal{A} = \emptyset$, to zbiorem indeksów zbioru $\mathcal{A}$ jest $\emptyset$, a jeśli $\mathcal{A}$ zawiera wszystkie funkcje częściowo rekurencyjne, to jego zbiorem indeksów jest ω. Przypuśćmy teraz, że $\mathcal{A}$ jest różny od $\emptyset$ i różny od zbioru wszystkich funkcji częściowo rekurencyjnych. Wtedy istnieją a i b takie, że $\varphi_a \in \mathcal{A}$ oraz $\varphi_b \notin \mathcal{A}$.

Jeśli funkcja nigdzie nie określona nie należy do $\mathcal{A}$, to niech f będzie funkcją rekurencyjną taką, że:

1. $\varphi_{f(x)} = \varphi_a$, gdy $x \in \mathbb{K}$

2. $\varphi_{f(x)}$ nie jest określona w przeciwnym przypadku.

   Wtedy: $x \in \mathbb{K}$ dokładnie wtedy, gdy $\varphi_{f(x)} \in \mathcal{A}$, czyli dokładnie wtedy, gdy $f(x) \in A$, gdzie A jest zbiorem indeksów zbioru $\mathcal{A}$. Zbiór A nie jest zatem rekurencyjny, gdyż $\mathbb{K}$ nie jest rekurencyjny.

   Jeśli funkcja nigdzie nie określona należy do $\mathcal{A}$, to używamy φ_b, pokazując, iż $\omega - A$ nie jest rekurencyjny.

5.6.5 Twierdzenie o punkcie stałym

TWIERDZENIE O PUNKCIE STAŁYM (TWIERDZENIE O REKURSJI). *Dla dowolnej funkcji rekurencyjnej jednoargumentowej f istnieje e taka, że $\varphi_e \simeq \varphi_{f(e)}$.*
Zarys dowodu. Skorzystamy z procedury opisanej w punkcie dotyczącym diagonalizacji. Niech f będzie dowolną funkcją rekurencyjną. Niech S będzie zbiorem wszystkich funkcji rekurencyjnych i zdefiniujmy: $d(\varphi_a) = \varphi_{f(a)}$. Szukamy punktu stałego funkcji d, czyli e takiej, iż: $d(\varphi_e) = \varphi_e$. Ponieważ $f \simeq \varphi_a$ dla pewnej a, więc wartości funkcji d są postaci $\varphi_{\varphi_a(b)}$. Rozważmy macierz $(a_{ij})_{i,j\in\omega}$, gdzie $a_{ij} = \varphi_{\varphi_i(j)}$. Jeśli $\varphi_{\varphi_i(j)} \uparrow$, to a_{ij} jest funkcją nigdzie nie określoną. Ciągiem diagonalnym dla (S, d) jest: $\varphi_{f(\varphi_0(0))}$, $\varphi_{f(\varphi_1(1))}$, $\varphi_{f(\varphi_2(2))}, \ldots$ Jest to rekurencyjny ciąg funkcji częściowo rekurencyjnych, a więc jest jednym z wierszy macierzy $(a_{ij})_{i,j\in\omega}$. Tak więc, istnieje punkt stały funkcji d.

Punkt stały, o którym mowa w powyższym twierdzeniu, można wyznaczyć:

1. Zauważmy, że punkt stały funkcji d musi być tym elementem ciągu diagonalnego, który leży na przekątnej macierzy.

2. Niech więc g będzie (istniejącą na mocy twierdzenia o enumeracji oraz S_n^m-twierdzenia) funkcją taką, że:

$$\varphi_{g(a)} = \varphi_{f(\varphi_a(a))}.$$

3. Jeśli b jest dowolnym indeksem funkcji g, to $g(b) = \varphi_b(b)$ jest punktem stałym dla f, ponieważ:

$$\varphi_{g(b)} \simeq \varphi_{f(\varphi_b(b))} \simeq \varphi_{f(g(b))}.$$

W teorii rekursji dowodzi się wielu dalszych twierdzeń o punktach stałych.

5.7 Jeszcze o indeksowaniu

Systemem indeksów nazywamy dowolną rodzinę odwzorowań $\Psi = \{\psi^n : n \in \omega\}$ zbioru ω na zbiór wszystkich n-argumentowych funkcji częściowo rekurencyjnych. Przez ψ^n_e oznaczać będziemy n-argumentową funkcję częściowo rekurencyjną o indeksie e. Mówimy, że Ψ spełnia warunek:

1. *enumeracji*, gdy dla każdej n istnieje a taka, że $\psi_a^{n+1}(e, x_1, \ldots, x_n) \simeq \psi^n_e(x_1, \ldots, x_n)$,

2. *parametryzacji*, gdy dla wszystkich m, n istnieje całkowita funkcja rekurencyjna s taka, że $\psi_{s(e,x_1,\ldots,x_n)}(y_1, \ldots, y_m) \simeq \psi_e^{m+n}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$.

System indeksów Ψ nazywamy *akceptowalnym*, gdy dla wszystkich n istnieją całkowite funkcje rekurencyjne f oraz g takie, że:

1. $\psi^n_e \simeq \varphi^n_{f(e)}$

2. $\varphi^n_e \simeq \psi^n_{g(e)}$

(przypominamy, że $\{\varphi_e : e \in \omega\}$ to standardowe wyliczenie wszystkich funkcji częściowo rekurencyjnych i niech $\{\varphi^n_e : e \in \omega\}$ będzie standardowym wyliczeniem wszystkich n-argumentowych funkcji częściowo rekurencyjnych).

System indeksów Ψ jest akceptowalny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunki enumeracji oraz parametryzacji.

5.8 Sprowadzalność

Dla dowolnych $A, B \subseteq \omega$ mówimy, że A jest *m-sprowadzalny* do B (piszemy wtedy $A \leqslant_m B$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja rekurencyjna f taka, że dla wszystkich $n \in \omega$: $n \in A \ \equiv \ f(n) \in B$ (co oznacza, że $A = f^{-1}[B]$).

Jeśli $A \leqslant_m B$, to A jest „co najwyżej tak samo złożony” jak B, jeśli chodzi o procedury ustalania, co jest elementem danego zbioru.

Zauważmy, że jeśli B jest rekurencyjny i $A \leqslant_m B$, to A jest rekurencyjny.

Relacja $\leqslant_m$ jest częściowym porządkiem. W standardowy sposób definiujemy:

1. $A <_m B \ \equiv \ A \leqslant_m B \wedge \neg B \leqslant_m A$

2. $A \equiv_m B \ \equiv \ A \leqslant_m B \wedge B \leqslant_m A$ (A i B są *m-równoważne*)

1. $dg_m(A) = \{B : \ A \equiv_m B\}$ (*m-stopień* zbioru A)

2. $dg_m(A) \leqslant_m dg_m(B) \ \equiv \ A \leqslant_m B$

3. $dg_m(A) <_m dg_m(B) \ \equiv \ A <_m B$

4. $Dg_m = \{dg_m(A) : \ A \subseteq \omega\}$ (zbiór wszystkich m-stopni)

5. $dg_m(\emptyset) = \{\emptyset\}$ oraz $dg_m(\omega) = \{\omega\}$ są minimalnymi m-stopniami.

6. Niech $\mathbf{0} = \{A : \ \emptyset \neq A \neq \omega$ i A rekurencyjny$\}$. Wtedy $\mathbf{0} \in Dg_m$ oraz:

   (a) $dg_m(\emptyset) <_m \mathbf{0}$
   (b) $dg_m(\omega) <_m \mathbf{0}$
   (c) $\mathbf{0} <_m dg_m(A)$ dla każdego nierekurencyjnego zbioru A

7. Dla każdej pary m-stopni istnieje ich l.u.b. Nie jest prawdą, że dla pary dowolnych m-stopni istnieje ich g.l.b.

8. m-stopnie różne od $dg_m(\emptyset)$ oraz $dg_m(\omega)$ nie są uporządkowane liniowo.

9. Nie istnieje maksymalny m-stopień.

Dla dowolnego zbioru C mówimy, że:

1. C jest *m-zupełny*, gdy C jest r.e. i $A \leqslant_m C$ dla każdego r.e. zbioru A.

2. $dg_m(C)$ jest *r.e. m-stopniem*, gdy istnieje r.e. zbiór A taki, że $A \equiv_m C$.

Oto przykłady ważnych zbiorów m-zupełnych:

1. $\mathbb{K} = \{a : \ a \in W_a\}$.

2. $\mathbb{K}_0 = \{\langle x, y\rangle : \ x \in W_y\}$.

3. $\mathbb{K}_1 = \{x : \ W_x \neq \emptyset\}$.

Żaden z powyższych zbiorów nie jest rekurencyjny. Zbiór $\mathbb{K}$ nazywany jest *zbiorem przekątniowym*. Jego dopełnienie oznaczmy przez $\overline{\mathbb{K}}$.

Niech $\mathbf{1} = \{C : \ C$ jest m-zupełny$\}$. Wtedy $\mathbf{1}$ jest jedynym, największym r.e. m-stopniem. Ponadto, $\mathbf{0} < \mathbf{1}$. Nie każdy r.e. zbiór nierekurencyjny jest m-zupełny. Istnieją r.e. zbiory A takie, że: $\mathbf{0} < dg_m(A) < \mathbf{1}$, jak za chwilę zobaczymy.

5.9 Zbiory: produktywne, twórcze, proste

Mówimy, że zbiór P jest *produktywny*, jeśli istnieje funkcja częściowo rekurencyjna f taka, że dla każdego indeksu a: jeśli $W_a \subseteq P$, to $f(a)$ jest określona oraz $f(a) \in P - W_a$.

Każdy zbiór produktywny P jest zatem, w pewnym sensie, „efektywnie nie r.e.”: jeśli $W_a \subseteq P$, to $f(a)$ dostarcza przykładu, że $P \neq W_a$.

1. Zbiór $\overline{\mathbb{K}}$ jest produktywny.
2. Dla dowolnych P oraz Q, jeśli P jest produktywny i $P \leqslant_m Q$, to Q jest produktywny.
3. Dla dowolnego A, jeśli A jest m-zupełny, to $\omega - A$ jest produktywny.
4. Każdy zbiór produktywny zawiera nieskończony r.e. podzbiór. Każdy zbiór produktywny zawiera nieskończony podzbiór rekurencyjny.
5. Jeśli A jest produktywny, to A nie jest r.e.
6. Istnieje $2^{\aleph_0}$ zbiorów produktywnych.

Mówimy, że zbiór A jest:

1. *prosty*, jeśli A jest r.e., a jego dopełnienie $\omega - A$ jest nieskończone i nie zawiera żadnego nieskończonego r.e. podzbioru.
2. *twórczy*, jeśli A jest r.e., a $\omega - A$ jest produktywny.

Jeśli A jest zbiorem prostym, to:

1. A nie jest rekurencyjny.
2. A nie jest twórczy.
3. A nie jest m-zupełny ($\mathbb{K} \not\leqslant_m A$).

Dowolny zbiór prosty jest nierekurencyjnym r.e. zbiorem, który nie jest m-zupełny.

Zbiór $\mathbb{K}$ jest twórczy. Każdy zbiór twórczy A jest „efektywnie nierekurencyjny”, w tym sensie, że istnieje funkcja częściowo rekurencyjna f taka, że dla każdego r.e. „kandydata” W_a do bycia zbiorem $\omega - A$ wartość $f(a)$ należy do $(\omega - A) - W_a$.

Zbiór A jest twórczy wtedy i tylko wtedy, gdy A jest m-zupełny.

Niech A będzie r.e. zbiorem różnym od ω. Wtedy A jest twórczy wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego r.e. zbioru B, jeśli $A \cap B = \emptyset$, to $A \equiv_m A \cup B$.

Istnieje zbiór prosty, a więc istnieje zbiór r.e., który nie jest ani rekurencyjny, ani m-zupełny.

Istnienia zbioru prostego (zbiorów prostych) dowieść można na różne sposoby. Podajemy jeden z nich.

Niech P będzie relacją zdefiniowaną warunkiem: $P(a,x) \equiv x \in W_a \wedge x > 2a$. Wtedy P jest semi-rekurencyjna. Istnieje zatem selektor, tj. funkcja częściowo rekurencyjna F o dziedzinie $\{a : \exists x\ P(a,x)\}$ taka, że dla każdego a z dziedziny F zachodzi $P(a, F(a))$. Niech A będzie dziedziną F. Pokażemy, że A jest zbiorem prostym.

Ponieważ $A = rng(F)$, więc A jest r.e. Ponieważ $F(a) > 2a$ dla $a \in dom(F)$, co najwyżej a elementów zbioru A jest elementami każdego odcinka początkowego $\{0, 1, \ldots, 2a\}$. Tak więc, odcinek taki zawiera co najmniej $a + 1$ elementów zbioru $\omega - A$. W konsekwencji, zbiór $\omega - A$ jest nieskończony.

Przypuśćmy, że W_a jest nieskończony. Wtedy istnieją elementy $x \in W_a$ takie, że $x > 2a$, a więc $F(a)$ jest określona, a stąd $F(a)$ jest elementem $A \cap W_a$. Ostatecznie, $W_a \nsubseteq (\omega - A)$. Pokazaliśmy, że A jest zbiorem prostym.

5.10 Jeszcze o stopniach

Istnieje r.e. m-stopień $\mathbf{d}$ taki, że: $\mathbf{0} < \mathbf{d} < \mathbf{1}$. Nadto:

1. (T1) Istnieją r.e. zbiory A oraz B takie, że A jest prosty oraz $B \nleqslant_m A$.
2. (T2) Istnieją r.e. zbiory A i B takie, że $A \nleqslant_m B$ oraz $B \nleqslant_m A$.
3. (T3) Istnieje m-niezależna r.e. rodzina (zobacz niżej).
4. (T4) Każdy rekurencyjny porządek częściowy zbioru ω można włożyć w uporządkowanie m-stopni, tj. dla dowolnego rekurencyjnego porządku częściowego $\preceq$ zbioru ω istnieje rodzina $(C_i : i \in \omega)$ taka, że dla wszystkich i oraz j: $i \preceq j \equiv C_i \leqslant_m C_j$.
5. (T5) Każdy przeliczalny porządek częściowy można włożyć w uporządkowanie m-stopni, tj. dla dowolnego przeliczalnego porządku częściowego $\preceq$ zbioru ω istnieje rodzina $(C_i : i \in \omega)$ taka, że dla wszystkich i oraz j: $i \preceq j \equiv C_i \leqslant_m C_j$.

W dowodzie (T5) korzysta się z faktu, że istnieje rekurencyjny porządek częściowy zbioru ω, w który można włożyć każdy przeliczalny porządek częściowy.

W (T3) wykorzystaliśmy następujące pojęcie. Dla dowolnego $I \subseteq \omega$ i dowolnej rodziny zbiorów $(A^n : n \in \omega)$:

1. $\bigoplus(A^n : n \in \omega) = \{\langle n, x\rangle : x \in A^n \wedge n \in I\}$

2. $(A^n : n \in \omega)$ jest m-*niezależna* wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $n \in \omega$: $A^n \nleqslant_m \bigoplus(A^n : n \in \omega)$.

3. $(A^n : n \in \omega)$ jest *r.e.-rodziną* wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigoplus(A^n : n \in \omega)$ jest zbiorem r.e.

Struktura rodziny wszystkich stopni jest niezwykle skomplikowana. Tu podaliśmy jedynie kilka dość prostych faktów.

6 Dodatek B: Logika Zwierciadła

Na koniec tego, może ciut przydługiego wykładu pozwólmy sobie na odrobinę relaksu. Proponuję w tym celu wykorzystać jeden z rozdziałów przetłumaczonej przeze mnie parę lat temu pięknej książeczki Raymonda Smullyana *Alice in Puzzle-Land. A Carrollian Tale for Children Under Eighty.* Penguin Books, 1982. ISBN 0 14 00.7056 7. Pierwsze wydanie: Wiliam Morrow and Company, Inc., New York 1982. Życzę słuchaczom miłej zabawy w rozwiązywaniu problemów *lustrzanej logiki*.

Rozdział 10: Lustrzana Logika

Lewis Carroll powiedział nam bardzo niewiele o pozostałym Białym Rycerzu; wszystko, co nam powiedział to to, że próbował on kiedyś założyć hełm pierwszego Białego Rycerza, co było bardzo nieostrożne, zważywszy, że pierwszy Biały Rycerz był wtedy w hełmie.

Cóż, gdy Alicja go spotkała, była całkowicie zakłopotana! Tak wiele stwierdzeń, które wypowiedział, wydawało się nietrafne! Czyż mógł być jedną z tych osób, które zawsze kłamią? — pomyślała Alicja. — Nie — odrzuciła to od razu, ponieważ jej intuicja podpowiadała jej, że był on całkiem szczerą osobą. Ale te rzeczy, które mówił! Przede wszystkim powiedział Alicji, że jest ona jednorożcem. Gdy Alicja go zapytała: „Czy rzeczywiście wierzysz, że jestem jednorożcem?” odpowiedział: „Nie.” Następnie utrzymywał, że Biały Król spał i śnił o Alicji, ale potem powiedział, że Biały Król nie śnił o niczym. Potem doszły dwa zdania wzajem sprzeczne (zapomniałem, jakie one były) i najpierw twierdził on, że jedno z nich jest prawdziwe, potem twierdził, że pozostałe jest fałszywe, a jeszcze potem, że oba są prawdziwe.

Początkowo Alicja myślała, że był on po prostu sprzeczny, ale nigdy nie potrafiła złapać go na bezpośredniej sprzeczności — to znaczy nie potrafiła znaleźć zdania, o którym twierdził on, że jest prawdziwe i twierdził także, że jest fałszywe, choć bywało, że twierdził, iż zdanie jest jednocześnie prawdziwe i fałszywe! Ciągle nie mogła go przyłapać na utrzymywaniu oddzielnie — że zdanie jest prawdziwe i że zdanie jest fałszywe.

Po wielu godzinach przesłuchiwania, Alicja zgromadziła olbrzymią liczbę danych, które zapisała w swoim notatniku. Zaniosła go do Humpty Dumpty’ego, aby zobaczyć, czy on może je wytłumaczyć.

— To dowodzi — powiedział Humpty Dumpty, przeglądając notatki Alicji — to dowodzi!

— Co przez to rozumiesz? — zapytała Alicja. — Czy Biały Rycerz jest nieprawdomówny?

— Biały Rycerz nigdy nie kłamie — odpowiedział Humpty Dumpty.

— No to nie rozumiem — odrzekła Alicja. — Naprawdę nie rozumiem!

— Oczywiście, że nie — odparł pogardliwie Humpty Dumpty — nie rozumiesz Lustrzanej Logiki!

— A czym jest Lustrzana Logika?

— Rodzajem logiki stosowanym przez Lustrzanych Logików — odpowiedział.

— A kim jest Lustrzany Logik?

— No przecież tym, który stosuje Lustrzaną Logikę — odparł. — *To* z pewnością powinnaś była odgadnąć!

Alicja przemyślała to. Jakoś nie znalazła tego wyjaśnienia bardzo pomocnym.

— Widzisz — kontynuował — pewni ludzie nazywani są Lustrzanymi Logikami. Ich stwierdzenia wydają się odrobinę dziwaczne, dopóki nie zrozumiesz klucza — który jest w istocie bardzo prosty. Gdy już zrozumiesz klucz, cały interes ma doskonały sens.

— A jaki jest klucz? — zapytała Alicja, ciekawa bardziej niż kiedykolwiek.

— Och, to nic nie da, *powiedzieć* ci, jaki jest klucz! Dam ci jednak pewne wskazówki. W istocie, podam ci pięć podstawowych warunków dotyczących Lustrzanych Logików, z których będziesz mogła *wydedukować* klucz. Oto te warunki:

- *Warunek 1.* Lustrzany Logik jest całkowicie szczery. Będzie utrzymywał tylko te stwierdzenia, w które rzeczywiście wierzy.

- *Warunek 2.* Jeśli Lustrzany Logik kiedykolwiek utrzymuje, że stwierdzenie jest prawdziwe, to utrzymuje także, że nie wierzy w to stwierdzenie.

— Chwileczkę — przerwała Alicja. — Czy nie przeczysz sam sobie? Zgodnie z pierwszym warunkiem, Lustrzany Logik jest zawsze prawdomówny. Jeżeli zatem utrzymuje, że stwierdzenie jest prawdziwe, to musi rzeczywiście wierzyć, że jest ono prawdziwe. W jaki zatem sposób, nie kłamiąc, może on utrzymywać, że nie wierzy w stwierdzenie?

— Dobre pytanie — odparł Humpty Dumpty. — Jednakże, nigdy nie powiedziałem, że Lustrzany Logik jest zawsze *trafny*! To, że wierzy on w coś, nie oznacza, że on koniecznie *wie*, iż w to wierzy, ani nawet, że koniecznie wierzy, że w to wierzy. W istocie, mogłoby się zdarzyć, że błędnie wierzy, że w to nie wierzy.

— Masz na myśli — powiedziała niewymownie zdumiona Alicja — że osoba może rzeczywiście w coś wierzyć, a jednak wierzyć, że w to nie wierzy?

— W przypadku Lustrzanych Logików, tak — odparł Humpty Dumpty — w istocie, w przypadku Lustrzanych Logików jest tak *zawsze* — to bezpośrednia konsekwencja pierwszych dwóch warunków.

— Jak to? — zapytała Alicja.

— Cóż — odrzekł Humpty Dumpty — przypuśćmy, że wierzy on, iż stwierdzenie jest prawdziwe. Wtedy, na mocy warunku 1, utrzymuje on, że stwierdzenie jest prawdziwe. Wtedy, na mocy warunku 2, utrzymuje on, że nie wierzy w stwierdzenie. Stąd, znów na mocy warunku 1, musi on wierzyć, że nie wierzy w stwierdzenie.

— Tak czy inaczej — kontynuował Humpty Dumpty — daję ci zbyt wiele wskazówek! Niech ukończę moją listę warunków, a wtedy powinnaś wydedukować klucz do całej tajemnicy.

- *Warunek 3.* Dla dowolnego stwierdzenia prawdziwego, Lustrzany Logik zawsze utrzymuje, że wierzy w to stwierdzenie.
- *Warunek 4.* Jeśli Lustrzany Logik w coś wierzy, to nie może wierzyć także w tego zaprzeczenie.
- *Warunek 5.* Dla dowolnego stwierdzenia, Lustrzany Logik albo wierzy w to stwierdzenie, albo wierzy w jego zaprzeczenie.

— I to — kończył z dumą Humpty Dumpty — jest cała lista warunków. Powinnaś być w stanie wywnioskować z nich, o których to stwierdzeniach Lustrzany Logik wierzy, że są prawdziwe, a także o których wierzy, że są fałszywe. Zadam ci teraz pewne pytania, aby sprawdzić, czy zrozumiałaś.

- *Pytanie 1.* Przypuśćmy, że Lustrzany Logik wierzy, że Czerwony Król śpi. Czy wierzy, że Czerwony Król śni o tobie, czy nie wierzy?

— Jakże mogłabym to wiedzieć? — wykrzyknęła Alicja.

— Powinnaś — odparł Humpty Dumpty. — Odpowiedź wynika bezpośrednio z warunków, ale powiem ci jaka jest nieco później. Na razie, zapytam cię o to:

- *Pytanie 2.* Przypuśćmy, że Lustrzany Logik wierzy, że albo Czerwony Król, albo Czerwona Królowa śpi. Czy wynika stąd, że wierzy on, że Czerwona Królowa śpi?

— A dlaczego powinno? — odparła Alicja.

— Wynika — powiedział Humpty Dumpty — ale później powiem ci, dlaczego. Na razie, spróbuj tego:

- *Pytanie 3.* Przypuśćmy, że Lustrzany Logik wierzy, że Czerwony Król śpi. Czy koniecznie musi wierzyć, że Czerwona Królowa śpi?

— Dlaczegóż, u licha, miałby? — zapytała Alicja, zbita z tropu bardziej niż kiedykolwiek.

— Dobre pytanie — odparł Humpty Dumpty — i przedyskutujemy je później. Na razie, spróbuj tego:

- *Pytanie 4.* Przypuśćmy, że Lustrzany Logik wierzy, że Czerwony Król śpi. Czy koniecznie musi wierzyć, że Czerwony Król i Czerwona Królowa oboje śpią?

— Czy to nie jest takie samo pytanie, jak ostatnie? — zapytała Alicja. — Jeśli wierzy on, że Czerwony Król śpi, to czy nie jest tym samym wierzyć, że Czerwona Królowa śpi, co wierzyć, że oboje śpią?

— Wcale nie — odparł stanowczo Humpty Dumpty.

— Dlaczego nie? — zapytała Alicja.

— Powiem ci później — odparł Humpty Dumpty. — Na razie, spróbuj tego:

- *Pytanie 5.* Przypuśćmy, że Lustrzany Logik wierzy, że Czerwony Król i Czerwona Królowa oboje śpią. Czy stąd wynika, że wierzy on, że Czerwony Król śpi?

— Wyobrażam sobie, że mogłoby — odparła Alicja.

— Nie wynika! — powiedział Humpty Dumpty. — Spróbuj tego:

- *Pytanie 6.* Przypuśćmy, że Lustrzany Logik wierzy, że Czerwony Król i Czerwona Królowa albo oboje śpią, albo oboje są obudzeni. Czy stąd wynika, że wierzy on, iż jedno z nich śpi, a drugie jest obudzone?

— Oczywiście, że nie! — powiedziała Alicja.

— *Wynika!* — rzekł Humpty Dumpty — ale powiem ci później, dlaczego. Spróbuj tego:

- *Pytanie 7.* Przypuśćmy, że Lustrzany Logik wierzy, że Lwa nie ma w lesie, chyba, że jest z nim Jednorożec. Czy wierzy, że Lew jest w lesie, czy nie wierzy?

— Nie widzę sposobu, aby to orzec! — odparła Alicja.

— Oczywiście, że nie — odrzekł wzgardliwie Humpty Dumpty — ciągle nie masz klucza! Cóż, spróbuj tego:

- *Pytanie 8.* Przypuśćmy, że Lustrzany Logik wierzy, że Dżabersmok wypowiedział w życiu co najmniej jedno stwierdzenie prawdziwe. Czy wynika stąd, że wierzy on we wszystkie stwierdzenia, które wypowiedział Dżabersmok?

— A dlaczego powinno? — zapytała Alicja. — To brzmi jak czysta głupota!

— *Wynika* — powiedział Humpty Dumpty — ale sądzę, że daję ci zbyt wiele wskazówek! Dobrze, zobaczmy, czy poradzisz sobie z tym:

- *Pytanie 9.* Przypuśćmy, że Lustrzany Logik wierzy, że wszystkie gryfy mają skrzydła. Czy stąd wynika, że istnieją jakiekolwiek gryfy?

— Jestem całkiem skołowana tym wszystkim! — zawołała Alicja. — Nie mam pojęcia, o czym jest ta cała Lustrzana Logika!

— Cóż, spróbuj tego — rzekł Humpty Dumpty.

- *Pytanie 10.* Przypuśćmy, że Lustrzany Logik wierzy, że Alicja nie osiągnie ósmego kwadratu bez zostania królową. Przypuśćmy, że wierzy też, że Alicja osiągnie ósmy kwadrat. Czy wierzy, że Alicja zostanie królową, czy nie wierzy?

— Zgaduję, że wierzy — powiedziała Alicja — czyż nie?

— Cóż — odparł śmiejąc się Humpty Dumpty — ostatnie pytanie było rzeczywiście nieco nie *fair*, a więc nie oczekuję, że na nie odpowiesz.

— Bardziej nie *fair* niż inne pytania? — zapytała Alicja.

— Stanowczo — odpowiedział — pozostałe pytania były wszystkie całkowicie *fair*.

— Uważam je *wszystkie* za równie zwodnicze! — odparła Alicja. — Ciągle nie rozumiem tej Lustrzanej Logiki!

Jeśli *wy*, podobnie jak Alicja, jesteście w tym miejscu skonsternowani, to trudno mi was winić! Jednak klucz do całej tajemnicy jest śmiesznie prosty. Zamiast podawać rozwiązania pytań z tego rozdziału na końcu książki, włączę rozwiązania w poniższe dialogi.

Humpty Dumpty Wszystko Wyjaśnia.

— Cóż — powiedział Humpty Dumpty — najwyższy czas, abyś odnalazła klucz!

— Nie mam pojęcia nawet jak zacząć!

— Rozważ to — powiedział Humpty Dumpty. — Czy jest możliwe, aby Lustrzany Logik wierzył w stwierdzenie prawdziwe?

— Dlaczego nie? — zapytała Alicja.

— Cóż, pamiętasz, co udowodniłem ci przedtem — że kiedy tylko Lustrzany Logik wierzy w coś, to także wierzy, że w to nie wierzy?

— Ta-ak — powiedziała Alicja — ale zapomniałam dowodu; czy mógłbyś go powtórzyć?

— No pewnie, że tak — odparł. — Weź dowolne stwierdzenie, w które wierzy Lustrzany Logik. Ponieważ wierzy on w to stwierdzenie, więc utrzymuje to stwierdzenie (na mocy warunku 1), a stąd utrzymuje, że w nie nie wierzy (na mocy warunku 2), a stąd wierzy, że w nie nie wierzy (na mocy warunku 1).

— O, tak — powiedziała Alicja — teraz pamiętam!

— Cóż, aby być pewnym, że będziesz to pamiętać, chcę, abyś zapisała to jako Twierdzenie 1 w twoim notatniku.

Alicja zapisała więc co następuje:

- *Twierdzenie 1.* Kiedykolwiek Lustrzany Logik w coś wierzy, to wierzy, że w to nie wierzy.

— Trzeba sobie następnie uświadomić — mówił Humpty Dumpty — że dla dowolnego stwierdzenia prawdziwego, Lustrzany Logik wierzy, że *wierzy* w to stwierdzenie.

— Dlaczego tak jest? — zapytała Alicja.

— Och, to łatwo udowodnić! — odparł Humpty Dumpty. — Weź dowolne stwierdzenie prawdziwe. Na mocy warunku 3, utrzymuje on, że wierzy w to stwierdzenie. Ponieważ utrzymuje, że w nie wierzy, a jest szczery (warunek 1), więc wierzy, że w nie wierzy.

— Rozumiem — powiedziała Alicja.

— Lepiej to zapisz, pod nagłówkiem Twierdzenie 2 — zasugerował Humpty Dumpty.

Alicja zapisała więc co następuje:

- *Twierdzenie 2.* Dla dowolnego stwierdzenia prawdziwego, Lustrzany Logik wierzy, że wierzy w to stwierdzenie.

— A teraz — rzekł Humpty Dumpty — czy widzisz, dlaczego jest niemożliwe, aby Lustrzany Logik kiedykolwiek uwierzył w stwierdzenie prawdziwe?

— Nie bardzo — przyznała się Alicja.

— Wynika to łatwo z Twierdzenia 1, Twierdzenia 2 oraz warunku 4 — odrzekł. — Weź dowolne stwierdzenie, w które wierzy Lustrzany Logik. Na mocy warunku 1, wierzy on, że nie wierzy w to stwierdzenie. Wtedy nie może też wierzyć, że *wierzy* w to stwierdzenie (ponieważ, na mocy warunku 4, nigdy nie wierzy w coś i zaprzeczenie tego czegoś). Ponieważ nie wierzy, że wierzy w stwierdzenie, więc stwierdzenie to nie może być prawdziwe, bo *gdyby było* prawdziwe, to, na mocy Twierdzenia 2, *wierzyłby*, że w nie wierzy. Ale on *nie wierzy*, że w nie wierzy — a zatem nie może ono być prawdziwe. Tak więc, jak widzisz, Lustrzany Logik nigdy nie wierzy w jakiekolwiek stwierdzenie prawdziwe: wszystkie rzeczy, w które wierzy Lustrzany Logik są fałszywe.

Alicja rozmyślała nad tym przez chwilę.

— To jest dość trudny dowód! — powiedziała.

— Och, z czasem się przyzwyczaisz.

Alicja myślała o tym dalej.

— Powiedz mi coś innego — rzekła Alicja. — Czy Lustrzany Logik koniecznie wierzy we wszystkie stwierdzenia fałszywe, czy jest może tak, że wierzy tylko w niektóre stwierdzenia fałszywe?

— To jest dobre pytanie, dziecko — odparł Humpty Dumpty — a odpowiedź jest następująca. Weź dowolne stwierdzenie fałszywe. Na mocy warunku 5, albo wierzy on w to stwierdzenie, albo wierzy w jego zaprzeczenie. Nie może wierzyć w jego zaprzeczenie, ponieważ jego zaprzeczenie jest prawdziwe! A zatem wierzy w to fałszywe stwierdzenie.

— Ależ to wyjątkowe! — oświadczyła Alicja. — A zatem Lustrzany Logik wierzy we *wszystkie* stwierdzenia fałszywe i w żadne prawdziwe!

— Dokładnie — powiedział Humpty Dumpty. — I to jest w tym najpiękniejsze!

— Inną ciekawą rzeczą — dodał Humpty Dumpty — jest to, że ktokolwiek, kto wierzy we wszystkie stwierdzenia fałszywe i w żadne prawdziwe i kto jest nadto szczery w wyrażaniu swoich przekonań — każda taka osoba musi spełniać pięć podstawowych warunków, które charakteryzują Lustrzanych Logików.

— Dlaczego tak jest? — zapytała Alicja.

— Och, to łatwo udowodnić! — odparł Humpty Dumpty. — Przypuśćmy, że osoba jest całkowicie szczera i nadto wierzy we wszystkie stwierdzenia fałszywe i tylko w takie stwierdzenia. Ponieważ jest szczera, więc spełnia oczywiście warunek 1. Jeśli chodzi o warunek 2, to przypuśćmy, że utrzymuje ona, że stwierdzenie jest prawdziwe. Wtedy rzeczywiście wierzy w to stwierdzenie (ponieważ jest uczciwa). Jest zatem fałszem, że nie wierzy ona w to stwierdzenie. Ale wierzy ona we *wszystko*, co jest fałszem — nawet w rzeczy fałszywe o jej własnych przekonaniach! Tak więc, ponieważ jest fałszem, że nie wierzy w stwierdzenie, i ponieważ wierzy we wszystko, co jest fałszem, więc musi wierzyć w fałszywy stan rzeczy,[1] że nie wierzy ona w stwierdzenie — inaczej mówiąc, wierzy ona, że nie wierzy w stwierdzenie. A ponieważ *wierzy*, że nie wierzy w stwierdzenie, więc *utrzymuje*, że nie wierzy w stwierdzenie (ponieważ, przypomnijmy, jest szczera). A zatem spełnia warunek 2.

— Jeśli chodzi o warunek 3, to weźmy dowolne stwierdzenie prawdziwe. Ponieważ jest ono prawdziwe, więc osoba ta nie może w nie wierzyć. Ponieważ w

[1] W oryginale: the false fact. Zgodnie z dość powszechnie przyjętą terminologią, „fakt" oznacza istniejący stan rzeczy. Nie ma zatem „fałszywych faktów", ale mogą być „fałszywe (=nie istniejące) stany rzeczy".

nie *nie wierzy*, więc musi wierzyć, że *wierzy* w nie (ponieważ wszystkie jej przekonania są nietrafne!). Wtedy, ponieważ wierzy, że wierzy w stwierdzenie, to musi utrzymywać, że wierzy w stwierdzenie (znowu, ponieważ jest szczera). Dowodzi to, że spełnia ona warunek 3.

— Warunki 4 i 5 sa oczywiste — kontynuował Humpty Dumpty. — Weźmy dowolne stwierdzenie i jego zaprzeczenie. Jedno znich musi być prawdziwe, a pozostałe musi być fałszywe. A zatem osoba ta wierzy w to fałszywe i nie wierzy w to prawdziwe. Nie wierzy więc w oba z nich, a stąd spełnia warunek 4. Wierzy jednak w co najmniej jedno z nich, a więc spełnia warunek 5.

— I to — kończył Humpty Dumpty — jest cała historia. Lustrzany Logik jest szczery, ale całkowicie zwiedziony, całkowicie oszukany. Na odwrót, każdy, kto jest szczery i całkowicie oszukany spełnia pięć warunków bycia Lustrzanym Logikiem. Masz teraz klucz.

— Jedno mnie ciągle zastanawia — powiedziała Alicja. — Dlaczego Lustrzany Logik nigdy nie jednocześnie: utrzymuje jakieś stwierdzenie i utrzymuje jego zaprzeczenie, a jednak utrzymuje, że stwierdzenie i jego zaprzeczenie są oba prawdziwe?

— To łatwe — odparł Humpty Dumpty. — Weź, dla przykładu, stwierdzenie, że Czerwony Król śpi. Jego zaprzeczeniem jest, że Czerwony Król jest obudzony. Oczywiście jedno z nich jest prawdziwe, a jedno fałszywe. Lustrzany Logik wierzy tylko w to, które jest fałszywe, a stąd nie może wierzyć w każde z nich oddzielnie. Jednak *pojedyncze* stwierdzenie, że Czerwony Król jednocześnie śpi i jest obudzony jest stwierdzeniem fałszywym, a stąd Lustrzany Logik musi wierzyć w to fałszywe stwierdzenie.

— A teraz, gdy masz klucz, odpowiedzi na moje dziesięć pytań powinny być oczywiste.

Oto odpowiedzi, które Humpty Dumpty podał, na swoje dziesięć pytań:

1. Ponieważ Lustrzany Logik wierzy, że Czerwony Król śpi, więc Czerwony Król musi w rzeczywistości być obudzony. A zatem Czerwony Król nie śni o Alicji. (Przez „śnić” nie rozumiem marzyć na jawie!) Ponieważ Król nie śni o Alicji, więc Lustrzany Logik musi wierzyć, że Król *śni* o Alicji.

2. Ponieważ Lustrzany Logik wierzy, że albo Czerwony Król, albo czerwona Królowa śpi, więc musi być fałszem, że albo Czerwony Król, albo Czerwona Królowa śpi. Oznacza to, że oboje są w rzeczywistości obudzeni. Ponieważ Czerwona Królowa jest obudzona, więc Lustrzany Logik musi wierzyć, że ona śpi. (Wedle tego samego wzorca musi też wierzyć, że Czerwony Król śpi.)

3. Lustrzany Logik wierzy, że Czerwony Król śpi, co w istocie oznacza, że Czerwony Król jest obudzony. To nie mówi nam nic o tym, czy Czerwona Królowa śpi czy też nie, a więc nie mamy sposobu, aby wiedzieć, czy Lustrzany Logik wierzy, że ona śpi.

4. To inna historia! Ponieważ Lustrzany Logik wierzy, że Czerwony Król śpi, więc jest fałszem, że Czerwony Król śpi. Stąd jest z pewnością fałszem, że Czerwony Król i Czerwona Królowa oboje śpią! A zatem Lustrzany Logik musi wierzyć, że oboje śpią.

A więc osobliwą rzeczą jest to, że niekoniecznie wierzy on, że Czerwona Królowa śpi, a jednak wierzy on, że Czerwony Król i Czerwona Królowa oboje śpią!

5. Lustrzany Logik wierzy, że oboje śpią, z czego wynika tylko, że co najmniej jedno z nich jest obudzone. Nie wiemy, które, a więc nie możemy ustalić, czy Lustrzany Logik wierzy, że Król śpi.

6. Ponieważ Lustrzany Logik wierzy, że albo oboje śpią, albo oboje są obudzeni, to nie jest prawdą, że albo oboje śpią, albo oboje są obudzeni. Oznacza to, że jedno z nich śpi, a drugie jest obudzone. Lustrzany Logik wierzy, że to, które śpi, jest obudzone i wierzy, że to, które jest obudzone, śpi.

7. Ponieważ przekonanie Lustrzanego Logika jest fałszywe, więc w rzeczywistości Lew musi być w lesie, bez Jednorożca. Z zatem Lew jest w lesie. A więc Lustrzany Logik musi wierzyć, że Lwa nie ma w lesie.

8. Ponieważ przekonanie Lustrzanego Logika jest fałszywe, więc Dżabersmok nigdy w swoim życiu nie wypowiedział jakiegokolwiek prawdziwego stwierdzenia; wszystkie stwierdzenia wypowiedziane przez Dżabersmoka były fałszywe. A zatem Lustrzany Logik musi wierzyć w każde z nich!

9. Ponieważ Lustrzany Logik wierzy, że wszystkie gryfy mają skrzydła, więc jest fałszem, że wszystkie gryfy mają skrzydła, co oznacza, że musi istnieć gryf bez skrzydeł. A zatem musi istnieć co najmniej jeden gryf.

10. To jest podchwytliwe pytanie, ponieważ nie jest możliwe, aby Lustrzany Logik wierzył w oba te fakty!

Przypuśćmy, że wierzy on, że Alicja nie osiągnie ósmego kwadratu bez zostania królową. Wtedy jest fałszem, że Alicja nie osiągnie ósmego kwadratu bez zostania królową, co oznacza, że Alicja osiągnie ósmy kwadrat bez zostania królową. Stąd jest prawdą, że Alicja osiągnie ósmy kwadrat, a więc jest niemożliwe, aby Lustrzany Logik wierzył, że ona to zrobi.

Literatura zalecana

Ajdukiewicz, K. 1928. *Główne zasady metodologji nauk i logiki formalnej.* (Skrypt autoryzowany, zredagowany przez Mojżesza Presburgera), Wydawnictwa Koła Matematyczno-Fizycznego Słuchaczów Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa.

Adamowicz, Z., Zbierski, P. 1991. *Logika matematyczna*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Addison, J.W., Henkin, L., Tarski, A. (eds.) 1965. *The theory of models*. North-Holland, Amsterdam.

Badesa, C. 2004. *The birth of model theory. Löwenheim's theorem in the frame of the theory of relatives*. Princeton University Press, Princeton and Oxford.

Barwise, J. 1975. *Admissible Sets and Structures. An Approach to Definability Theory*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York.

Barwise, J. (ed.) 1977. *Handbook of mathematical logic.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York Oxford.

Barwise, J. 1979. On branching quantifiers in English. *Journal of Philosophical Logic* **8**, 47–80.

Barwise, J. Cooper, R. 1981. Generalized quantifiers and natural language. *Linguistics and Philosophy* **4**, 159–219.

Barwise, J., Feferman, S. 1985. *Model Theoretic Logics.* Springer.

Batóg, T. 1999. *Podstawy logiki*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Bell, J.L. 2004. Infinitary Logic. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Bell, J.L., Machover, M. 1977. *A course in mathematical logic*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Bell, J.L., Slomson, A.B. 1969. *Models and ultraproducts: an introduction*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam London.

van Benthem, J. 1984. Questions about quantifiers. *Journal of Symbolic Logic.* **49**, 443–466.

van Benthem, J. 1986. *Essays in logical semantics.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

van Benthem, J. 1995. Quantifiers and Inference. W: Krynicki, Mostowski, Szczerba (eds.) *Quantifiers: logics, models and computation.*, 1–20.

van Benthem, J., ter Meulen, A. (eds.) 1984. *Generalized quantifiers in natural language.* Foris Publications, Dordrecht.

Boole, G. 1847. *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay Toward a Calculus of Deductive Reasoning.* Cambridge.

Boole, G. 1854. *An Investigation into Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.* London.

Boolos, G. 1993. *The Logic of Provability.* Cambridge University Press.

Boolos, G.S., Burgess, J.P., Jeffrey, R.C. 2002. *Computability and logic.* Cambridge University Press, Cambridge.

Chang, C.C., Keisler, J.H. 1973. *Model theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam London; American Elsevier Publishing Company, Inc., New York.

Cohn, P. 1965. *Universal algebra*. Harper & Row Publishers, New York Evanstone and London.

Cori, R., Lascar, D. 2001. *Mathematical logic. A course with exercises*. Oxford University Press, Oxford.

Cutland, N. 1980. *Computability. An introduction to recursive function theory.* Cambridge University Press, Cambridge.

Czelakowski, J. 2001. *Protoalgebraic Logics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.

Dickmann, M.A. 1975. *Large Infinitary Languages.* North Holland, Amsterdam.

Ebbinghaus, H.D., Flum, J. 1995. *Finite Model Theory.* Springer Verlag.

Ebbinghaus, H.D., Flum, J., Thomas, W. 1996. *Mathematical logic.* Springer.

van Eijck, J. 1984. Generalized quantifiers and traditional logic. W: van Benthem, J., ter Meulen, A. (eds.) *Generalized quantifiers in natural language.*, 1–19.

Gärdenfors, P. (ed.) 1987. *Generalized quantifiers: Linguistic and logical approaches.* Reidel, Dordrecht.

Gödel, K. 1986–2003. S. Feferman *et al.* (eds.) *Kurt Gödel: Collected Works, Volume I 1986, Volume II 1990, Volume III 1995, Volume IV 2003, Volume V 2003*. Oxford University Press, New York.

Grattan-Guiness, I. 2000. *The search for mathematical roots 1870–1940. Logics, set theories and the foundations of mathematics from Cantor through Russell to Gödel.* Princeton University Press, Princeton and Oxford.

Grzegorczyk, A. 1971. *Zarys arytmetyki teoretycznej*. PWN, Warszawa.

Grzegorczyk, A. 1975. *Zarys logiki matematycznej*. PWN, Warszawa.

Hedman, S. 2004. *A First Course in Logic. An Introduction to Model Theory, Proof Theory, Computability, and Complexity.* Oxford University Press, Oxford.

van Heijenoort, J. (ed.) 1967. *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879–1931.* Cambridge, Mass.

Helmer, O. 1938. Languages with expressions of infinite length. *Erkenntnis* **8**, 138–141.

Henkin, L. 1955. The Representation Theorem for Cylindrical Algebras. *Mathematical Interpretation of Formal Systems.* North Holland, 85–97.

Henkin, L. 1961. Some remarks on infinitely long formulas. *Infinitistic Methods*, Pergamon Press, Qxford, 167–183.

Hinman, P.G. 2005. *Fundamentals of mathematical logic*. A K Peters, Wellesley, Massachusetts.

Hodges, W. 1993. *Model theory*. Cambridge University Press, Cambridge.

Ježek, J. 1976. *Univerzálni algebra a teorie modelů*. Matematický seminář SNTL, Praha.

Jordan, P. 1949. Zur Axiomatik der Verknüpfungsbereiche. *Abhand. Math. Sem. Hamburg Univ.* **16**, 54–70.

Karp, C. 1964. *Languages with Expressions of Infinite Length.* North Holland, Amsterdam.

Keisler, J.H. 1977. Fundamentals of model theory. W: J. Barwise (ed.) *Handbook of mathematical logic*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam New York Oxford, Part A: Model Theory, 47–103.

Keenan, E.L., Stavi, J. 1986. A semantic characterization of natural language determiners. *Linguistics and Philosophy* **9**, 253–326.

Keisler, H.J., Knight, J.L. 2004. Barwise: infinitary logic and admissible sets. *The Bulletin of Symbolic Logic* Volume **10**, Number **1**, 4–36.

Kleene, S.C. 1952. *Introduction to Metamathematics.* Wolters-Noordhoff Publishing — Groningen, North-Holland Publishing Company — Amsterdam Oxford, American-Elsevier Publishing Company, Inc. — New York.

Krajewski, S. 2003. *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne. Od mechanicyzmu do postmodernizmu.* Wydawnictwo Instytutu Filozofii i Socjologii PAN, Warszawa.

Krasner, M. 1938. Une généralisation de la notion de corps. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **5**, 475–489.

Krynicki, M., Mostowski, M., Szczerba, L.W. (eds.) 1995. *Quantifiers: logics, models and computation.* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht Boston London.

Kuratowski, K. 1937. Les types d'ordre définissables et les ensembles boreliens. *Fundamenta Mathematicae* **29**, 97–100.

Lewis, C.S. 1918. *A Survey of Symbolic Logic.* University of California, Berkeley.

Lindström, P. 1966. First order predicate logic with generalized quantifiers. *Theoria*, **32**, 186–195.

Lindström, P. 1969. On Extensions of Elementary Logic. *Theoria*, **35**, 1–11.

Löwenheim, L. 1915. Über Möglichkeiten im Relativkalkül. *Mathematische Annalen*, **68**, 169–207. Przetłumaczone i przedrukowane w: van Heijenoort 1967.

Ławrow, I.A., Maksimowa, Ł.L. 2004. *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Łoś, J., Suszko, R. 1958. Remarks on sentential logic. *Indagationes Mathematicae* **20**, 177–183.

Malcew, A.A. 1936. Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik. *Mat. Sbornik* n.s. **1**, 323–336.

Malcew, A.A. 1941. Ob odnom obščem metodie polučenia lokalnych tieorem grupp. *Ivanovskij Gosudarstviennyj Pedagogičeskij Institut, Učennyje zapiski, Fiziko-matiematičeskije nauki* **1**, no. **1**, 3–9.

Malcew, A.A. 1956. O priedstavlienijach modielej. *Doklady Akademii Nauk SSSR* **108**, 27–29.

Marciszewski, W. 1987. *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny.* PWN, Warszawa.

Marcja, A., Toffalori, C. 2003. *A guide to classical and modern model theory*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.

Marek, I. 2002. *Elementy logiki formalnej*. Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice.

Marker, D. 2002. *Model theory: an introduction*. Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg.

Mendelson, E. 1997. *Introduction to mathematical logic.* Chapman & Hall, London.

Moczurad, M. 2002. *Wybrane zagadnienia z teorii rekursji.* Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.

Monk, J.D. 1976. *Mathematical logic.* Springer Verlag, New York Heidelberg.

Moore, G.H. 1995. The prehistory of infinitary logic: 1885–1955. W: Maria Luisa Dalla Chiara, Kees Doets, Daniele Mundici, Johan van Benthem (eds.) *Structures and norms in science.* Volume two of the Tenth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Florence, August 1995, Kluwer Academic Publishers, 105–123.

Mostowski, A. 1957. On generalization of quantifiers. *Fundamenta Mathematicae* **44**, 12–36.

Mostowski, A. 1961. Formal system of analysis based on an infinitistic rule of proof. W: *Infinitistic Methods, Proceedings of the symposium on foundations of mathematics, Warsaw, 2–9 September 1959.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa; Pergamon Press, New York, Oxford, London, and Paris, 141–166.

Mostowski, A. 1965. *Thirty Years of Foundational Studies: Lectures on the Development of Mathematical Logic and the Study of the Foundations of Mathematics in 1930–1964. Acta Philosophica Fennica* **XVII**, Soc. Philos. Fennica, Helsinki.

Murawski, R. 1995. Kłopoty z prawdą, czyli o niejednoznaczności i patologiach klas spełniania. W: Pogonowski, J. (red.) 1995. *Eufonia i Logos. Księga pamiątkowa ofiarowana Professor Marii Steffen-Batogowej oraz Profesorowi Tadeuszowi Batogowi*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 467–481.

Murawski, R. 1999. *Recursive Functions and Metamathematics. Problems of Completeness and Decidability, Gödel's Theorems*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.

Murawski, R. 2000^3. *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Odifreddi, P.G. 1989. *Classical recursion theory.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Orłowska, E., Golińska-Pilarek, J. 2011. *Dual Tableaux: Foundations, Methodology, Case Studies*. Springer, Dordrecht Heidelberg London New York.

Peirce, C.S. 1885. On the algebra of logic: a contribution to the philosophy of notation. *American Journal of Mathematics* **7**, 180–202.

Piękosz, A. 2008. *Wstęp do teorii modeli.* Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków.

Pogorzelski, W.A. 1975. *Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii.* PWN, Warszawa.

Pogorzelski, W.A. 1981. *Klasyczny rachunek predykatów*. PWN, Warszawa.

Pogorzelski, W.A. 1992. *Elementarny słownik logiki formalnej*. Uniwersytet Warszawski, Filia w Białymstoku, Białystok.

Pogorzelski, W.A., Wojtylak, P. 2008. *Elements of the theory of completeness in propositional logic.* Birkhäuser, Basel Boston Berlin.

Poizat, B. 2000. *A course in model theory*. Springer.

Porębska, M., Suchoń, W. 1991. *Elementarne wprowadzenie w logikę formalną*. PWN, Warszawa.

Rasiowa, H., Sikorski, R. 1963. *The mathematics of metamathematics.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Robinson, A. 1951. *On the Metamathematics of Algebra.* North Holland, Amsterdam.

Robinson, A. 1957. Applications to Field Theory. *Summaries of talks at the Summer Institute for Symbolic Logic in 1957 at Cornell University*, 326–331.

Robinson, A. 1979. *Selected Papers.* H.J. Keisler *et alii* (eds.), vol. I: *Model Theory and Algebra.* Yale University Press, New Haven, Conn.

Rogers, H. 1987. *Theory of recursive functions and effective computability.* MIT Press, Cambridge.

Sacks, G.E. 1972. *Saturated model theory* . W.A. Benjamin, Inc., Reading, Massachusetts.

Schröder, E. 1895. *Vorlesungen über die Algebra der Logik.* Vol. **3**, Leipzig.

Schröder, E. 1910. *Abriss der Algebra der Logik*, **2**, E. Müller (Hg.), Leipzig.

Scott, D., Tarski, A. 1957. The sentential calculus with infinitely long expressions. *Summaries of talks at the Summer Institute for Symbolic Logic in 1957 at Cornell University*, 83–89.

Scott, D., Tarski, A. 1958. The sentential calculus with infinitely long expressions. *Colloquium Mathematicum* **6**, 166-170.

Shapiro, S. 1985. Second-Order Languages and Mathematical Practice. *Journal of Symbolic Logic*, **50**, 714–742. Przedruk w: Shapiro 1996.

Shapiro, S. 1990. Second-Order Logic, Foundations, and Rules. *Journal of Philosophy*, **87**, 234–261. Przedruk w: Shapiro 1996.

Shapiro, S. (ed.) 1996. *The limits of logic: higher-order logic and the Löwenheim-Skolem theorem.* Dartmouth Publishing Company, Aldershot.

Shapiro, S. 1999. Do Not Claim Too much: Second-order Logic and First-order Logic. *Philosophia Mathematica* Vol. **7**, 42–64.

Shapiro, S. 2001. The "triumph" of first-order languages. W: C.A. Anderson, M. Zelëny (eds.) *Logic, Meaning and Computation.* Kluwer Academic Publishers, 219–259.

Shoenfield, J. 1973. *Mathematical logic*. Reading, Massachusetts.

Skolem, T. 1919. Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalkuls und über Produktations- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen. *Videnskapsselskapets skrifter, I. Matematisk-naturvedenskabelig klasse*, no **3**. Przetłumaczone i przedrukowane w: van Heijenoort 1967.

Skolem, T. 1920. Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen. *Videnskappselskapets skrifter, I. Matematisk-naturvedenskabelig klasse*, no **4**. Przetłumaczone i przedrukowane w: van Heijenoort 1967.

Skolem, T. 1922. Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. *Matematikerkongressen i Helsingfors den 4–7 Juni 1922, Den femte skandinaviska matematikerkongressen, Redogörelse*, (Akademiska Bokhandeln, Helsinki, 1923). Przetłumaczone i przedrukowane w: van Heijenoort 1967.

Skolem, T. 1970. *Selected Works in Logic.* Edited by Jens Erik Fenstad. Universiteitsforlaget, Oslo - Bergen - Tromsö.

Smorynski, C. 1977. *The incompleteness theorems.* W: J. Barwise (ed.) 1977. *Handbook of mathematical logic.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York Oxford, 821–866.

Smullyan, R. 1992. *Gödel's incompleteness theorems.* The Clarendon Press, Oxford University Press, New York.

Smullyan, R. 1993. *Recursion theory for metamathematics.* Oxford University Press.

Soare, R.I. 1987. *Recursively enumerable sets and degrees.* Springer.

Stegmüller, W., Varga von Kibéd, M. 1984. *Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie, Band III: Strukturtypen der Logik. Teil C.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo.

Surma, S. (ed.) 1973. *Studies in the history of mathematical logic*. Zakład Narodowy imienia Ossolińskich, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, Wrocław, Warszawa, Kraków, Gdańsk.

Tarski, A. 1933. Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und ω-Vollständigkeit. *Monatshefte für Mathematik und Physik* **XL**, 97–112.

Tarski, A. 1952. Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathematics. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950.* vol. **1**, American Mathematical Society, Providence, R.I., 705–720.

Tarski, A. 1986. What are logical notions? *History and Philosophy of Logic*, **7**, 143–154.

Tarski, A. 2001. *Pisma logiczno-filozoficzne. Tom 2: Metalogika*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Taylor, R.G. 2002. Zermelo's Cantorian theory of systems of infinitely long propositions. *The Bulletin of Symbolic Logic* Volume **8**, Number **4**, 478–515.

Väänänen, J. 2001. Second-order logic and foundations of mathematics. *The Bulletin of Symbolic Logic*, **7,2**, 504–520.

Väänänen, J. 2004. Barwise: abstract model theory and generalized quantifiers. *The Bulletin of Symbolic Logic* Volume **10**, Number **1**, 37–53.

Westerståhl, D. 1989. Quantifiers in formal and natural languages. *Handbook of Philosophical Logic.* Vol. **IV**, 1–131.

Wójcicki, R. 1988. *Theory of Logical Calculi. Basic Theory of Consequence Operations.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.

Zermelo, E. 1929. Über den Begriff der Definitheit in der Axiomatik. *Fundamenta Mathematicae* **14**, 339–344.

Zermelo, E. 1935. Grundlagen einer allgemeinen Theorie der mathematischen Satzsysteme (Erste Mitteilung). *Fundamenta Mathematicae* **25**, 135–146.

Zygmunt, J. 1973. On the sources of the notion of the reduced product. *Reports on Mathematical Logic* **1**, 53–67.