METAFORY POJĘCIOWE W MATEMATYCE

JERZY POGONOWSKI, UAM

ABSTRAKT. W odczycie odniesiemy się krytycznie do koncepcji matematyki ucieleśnionej, propagowanej w monografii Lakoff, Núñez 2000. Autorzy monografii starają się objaśnić genezę i funkcjonowanie matematyki za pomocą tworzenia metafor pojęciowych. Teorię metafor pojęciowych z sukcesem zastosowano w lingwistyce (Lakoff, Johnson 1980). Naszym zdaniem, teoria ta nie odzwierciedla jednak całej złożoności kontekstu odkrycia w matematyce. Pewne elementarne pojęcia matematyczne istotnie można eksplikować przez odwołanie się do tworzenia metafor pojęciowych. Jednak pojęcia bardziej zaawansowanej matematyki umykają takiej eksplikacji - przykłady podajemy w odczycie (np.: ulubiona metafora pojęciowa autorów, czyli Podstawowa Metafora Nieskończoności każe powołać do istnienia szereg najwolniej rozbieżny, co - na mocy stosownych twierdzeń - jest absurdem). Wskazujemy na potknięcia natury historycznej oraz błędy matematyczne, popełnione przez autorów. Polemizujemy również z ich wnioskami natury filozoficznej. Sumując, uważamy propozycje Lakoffa i Núñeza za zbyt brawurowo uproszczoną koncepcję matematyki. Jawi się nam ona jako dość arbitralne przyłożenie teorii metafor pojęciowych do tego materiału, który znajdujemy w elementarnych podręcznikach matematyki, nie zdaje natomiast adekwatnie sprawy z tworzenia matematyki przez zawodowych matematyków.

1 Matematyka ucieleśniona: założenia i tezy

1. Metafory pojęciowe polegają na swoistym odwzorowaniu: pojęcia, zwykle bardziej konkretne, z jednej dziedziny powiązane są z tworzonymi, zwykle bardziej abstrakcyjnymi, pojęciami dziedziny drugiej. Ważny jest przy tym ów twórczy charakter metafor, a także to, że są one odwzorowaniami zachowującymi pewne informacje. Zwykle mawia się, że odwzorowania metaforyczne zachowują pewne *własności* pojęć. Różnica między metaforą oraz analogią miałaby polegać na tym, że w analogii porównujemy istniejące w dwóch dziedzinach pojęcia, a w metaforze pojęcia w drugiej dziedzinie są tworzone.

2. LN twierdzą, że obalili mit, głoszący, iż matematyka ma charakter obiektywny, jest jakoś obecna w świecie, jej istnienie jest niezależne od jakichkolwiek umysłów, a przy tym matematyka uprawiana przez ludzi pozwala nam odkrywać prawdy o świecie.

3. Do podstawowych założeń przyjmowany przez LN należą:

   (a) Umysł jest ucieleśniony, a zatem natura naszych ciał, mózgów oraz codziennego funkcjonowania kształtuje ludzkie pojęcia i rozumowania, w szczególności matematyczne.

   (b) Większość procesów myślowych (w tym tych związanych z matematyką) jest niedostępna naszej świadomości.

   (c) Abstrakcje ujmujemy w postaci metafor pojęciowych, przenosząc pojęcia związane z aktywnością sensoromotoryczną do innych dziedzin, w tym dziedzin matematycznych.

4. Autorzy wyróżniają dwa typy metafor pojęciowych w matematyce:

   (a) *Metafory bazujące*. Dostarczają podstawowych, bezpośrednio ugruntowanych pojęć. Dla przykładu: dodawanie jako grupowanie razem obiektów.

   (b) *Metafory łączące*. Dostarczają bardziej abstrakcyjnych pojęć. Dla przykładu: liczby to punkty na prostej, figury geometryczne to równania algebraiczne.

5. Wyrażanie w językach etnicznych różnego rodzaju zależności stanowi (dla kognitywistów) podstawę do wyodrębnienia odpowiednich *schematów obrazowych* (*image schemas*). Przykładem takiego schematu jest: *pojemnik* (wraz z *wnętrzem*, *brzegiem*, *zewnętrzem*). Schematy związane są też z systemami zależności *aspektowych*. Ruch i jego wyrażanie dostarczają schematu *źródło–droga–cel*, itd.

6. Niezwykle ważna jest tzw. BMI – *podstawowa metafora nieskończoności* (*Basic Metaphor of Infinity*). Punktem wyjścia jest rozumienie *procesów* jako ruchów, przy czym procesy ciągłe, bez wyraźnego ich zakończenia, ujmowane są jako (dyskretne) procesy *powtarzalne*. Uzasadnienia dla takich metafor znajdują kognitywiści m.in. w systemach aspektowych języków etnicznych. Tak więc, zdaniem autorów, wprowadzanie wszelakich obiektów infinitarnych, granicznych jest motywowane metaforą, która każe „uzupełnić" powtarzalny process, z nieokreśloną liczbą owych powtórzeń, przez ostateczny wynik takiego procesu. Ten

ostateczny wynik to nowy obiekt, mający cechy nieskończoności *aktualnej*.

7. Pominiemy tu omawianie kolejnych przykładów metafor pojęciowych, które LN proponują jako metodę wprowadzania pojęć matematycznych (w arytmetyce, algebrze, analizie). W polskiej literaturze filozoficznej dostępne są omówienia – np. Hohol 2011, Pogonowski 2011.

8. Jeśli chcemy stosować ustalenia i metody nauk kognitywnych do (genezy i funkcjonowania) matematyki, to powinniśmy starać się odpowiedzieć m.in. na następujące pytania:

   (a) Jakie konkretnie mechanizmy działania ludzkiego mózgu oraz umysłu pozwalają ludziom na tworzenie pojęć matematycznych oraz rozumowania matematyczne?
   (b) Czy matematyka ugruntowana na mózgu i umyśle jest całą *istniejącą* matematyką? Czy też rację bytu ma matematyka w duchu Platońskim, przekraczająca ciała i umysły oraz nadająca strukturę kosmosowi (temu oraz wszystkim możliwym)?

   LN starają się odpowiedzieć głównie na pierwsze z tych pytań. Jeśli chodzi o pytanie drugie, to odpowiedź autorów jest następująca:

   (a) Problem istnienia matematyki rozumianej po Platońsku nie może być rozważany na drodze *naukowej*. Byty Platońskie nie mogą być percypowane przez ciało, mózg, umysł. Nauka nie może dowieść ani obalić twierdzenia o istnieniu bytów Platońskich, podobnie jak w przypadku istnienia lub nieistnienia Boga.

(b) Rozumienie matematyki przez ludzi polegać może jedynie na ujęciu jej w terminach dostępnych mózgowi oraz umysłowi.

(c) To, czym jest ludzka matematyka jest empirycznym problemem naukowym, a nie problemem matematycznym ani filozoficznym. Tak więc, jedynie nauki kognitywne, badające mózg, umysł oraz wiążące je zależności są w stanie odpowiedzieć jaka jest istota ludzkiej matematyki. W konsekwencji, całość matematyki to ludzka matematyka.

(d) Gdyby jednak uważać pytanie o istotę matematyki nie za pytanie naukowe lecz filozoficzne (albo i nawet religijne), to np. istnienie rzekomego Platońskiego świata matematyki oraz obiektywność jej prawd uzasadniane byłyby na drodze, która obecnie nie może zostać uznana za naukową.

9. Niektóre konkluzje teoretyczne i filozoficzne, które proponują LN są następujące:

   (a) Matematyka jest produktem ludzkim, zdeterminowanym przez naszą biologię, system pojęciowy oraz czynniki społeczne i kulturowe.

   (b) Metafory pojęciowe są podstawowym, neuronalnie ugruntowanym mechanizmem poznawczym.

   (c) Matematyka jest skuteczna w charakteryzowaniu różnych aspektów świata oraz w przewidywaniu. Rozwijaliśmy się w taki sposób, że poznanie potoczne dopasowuje nas do świata. Matematyka jest systematycznym rozszerzeniem tego właśnie poznania.

(d) Skuteczność matematyki jest wynikiem ewolucji oraz kultury. Ewolucja wykształciła nasze ciała i mózgi tak, że otrzymaliśmy neuronowe zdolności dla reprezentowania podstaw arytmetyki oraz pierwotnych zależności przestrzennych. Kultura pozwoliła, poprzez prowadzone miliony lat obserwacje natury na wykształcenie coraz bardziej skomplikowanych środków matematycznych. Połączenie idei matematycznych oraz ludzkich doświadczeń świata ma miejsce w ludzkim umyśle.

(e) Rozwój systemów pisma umożliwił też rozwój notacji matematycznej. Metafory dyskretyzacji pozwoliły na precyzyjne ujęcie stale rosnącej liczby pojęć matematycznych. Ludzka zdolność do tworzenia metafor pojęciowych pozwoliła na matematyzację (a czasem nawet arytmetyzację) pojęć potocznych, takich jak: kolekcje, wymiary, symetrie, zależność i niezależność przyczynowa, itd.

2 Matematyka ucieleśniona: krytyka

Nasze wątpliwości przedstawimy w formie dość skrótowej, hasłowo jedynie przywołując odnośne zagadnienia. W każdym przypadku możliwa jest, jak sądzimy, głębsza analiza anonsowanego problemu, która pozwoliłaby przesądzić, czy zarzuty są zasadne czy też np. wynikają z naszego niezrozumienia.

1. *Teoria mnogości*. Metafora pojemnika jest trafna jedynie w przypadku niedużych skończonych kolekcji. Warto zwrócić uwagę, że teoria mnogości powstała w wyniku refleksji

nad bardzo złożonymi kolekcjami – konstrukcjami w uniwersum liczb rzeczywistych. Autorzy dokonują pewnych uproszczeń i przeinaczeń, pisząc o zbiorach (nie wspominają o aksjomacie zastępowania, w sposób niepełny piszą o hierarchii zbiorów nieskończonych). Nie widzimy, w jaki sposób BMI miałaby pomóc w odróżnieniu mocy przeliczalnych od nieprzeliczalnych.

2. *Metafory Dedekinda*. Proste metafory przekroju (geometryczna i arytmetyczna, w terminologii autorów) to jeszcze nie wszystko, jeśli chodzi o *analizę idei matematycznych* związanych z konstrukcją Dedekinda. Wnikliwą analizę konstrukcji Dedekinda, wraz z wieloma odniesieniami do innych konstrukcji liczb rzeczywistych zawiera monografia Błaszczyk 2007. Dedekind chciał wyeliminować z mówienia o liczbach rzeczywistych wszelkie intuicyjne odniesienia geometryczne. Dedekind podaje dowód, że rodzina wszystkich przekrojów liczb wymiernych, ze stosownie zdefiniowanym porządkiem tych przekrojów ma własność *ciągłości*, w tym sensie, iż porządek ten nie zawiera luk.

3. *Podstawowa Metafora Nieskończoności*. Uważamy, że autorzy przesadnym zaufaniem darzą swoją główną metaforę poznawczą, czyli BMI. Tworzeniu obiektów granicznych w matematyce towarzyszyć musi dowód ich istnienia i jedyności, a tego sama BMI nie zapewnia. Dla przykładu, można bez trudności podać formalną charakterystykę tego, iż jeden szereg jest wolniej rozbieżny od drugiego (albo szybciej zbieżny). Można teraz byłoby mniemać, że BMI wystarczy do postulowania istnienia obiektu

granicznego w ciągu szeregów coraz wolniej rozbieżnych. To jednak oczywiście złudzenie – można z łatwością udowodnić, że nie istnieje szereg najwolniej rozbieżny.

4. *Topologia ogólna*. Ciekawy jest fakt, że LN nie posługują się żadnymi przykładami topologicznymi. To właśnie w topologii ogólnej specjalnie konstruuje się różnego rodzaju obiekty *patologiczne*, których własności jakoś kłócą się z (czasem bezrefleksyjnymi) intuicjami. Jest całe mnóstwo takich przykładów: zbiór Cantora, sfera rogata Alexandera, krzywa Knastera, jeziora Wady, itd. Konstruowane są one z myślą o ukazaniu zasięgu obowiązywania niektórych twierdzeń albo dla wysubtelnienia intuicji związanych z rozważanymi pojęciami. Istnieją nawet całe monografie poświęcone listom kontrprzykładów – zob. np.: Gelbaum, Olmsted 2003, Steen, Seebach 1995, Wise, Hall 1993.

5. Technika metafor pojęciowych nie wyjaśnia, naszym zdaniem, wielu ważnych zagadnień matematycznych, np.: zmienności intuicji matematycznych, kolizji między poszczególnymi intuicjami matematycznymi, procesu uogólniania, itd. Niektóre pojęcia matematyczne są tak złożone, że ich sprowadzanie do pojęć bazowanych sensoro-motorycznie nie wydaje się możliwe (np. niektóre pojęcia teorii miary).

6. Wiele aktywności matematycznych związanych jest właśnie z *porzuceniem* metaforyzowania, wyraźnym rozdzieleniu intuicji oraz roboty formalnej. Podać można niezliczone przykłady, gdy intuicje bazowane na doświadczeniu potocznym *zwodzą* nas, nawet w przypadku rozważania całkiem prostych obiektów i konstrukcji matematycznych.

7. Tworzenie pojęć to tylko jeden z wielu rodzajów aktywności badawczej matematyków. Innymi są np.: przeprowadzanie dowodów, abstrahowanie, uogólnianie, szukanie kontrprzykładów, rozumowania przez indukcję, abdukcję lub analogię, tworzenie hipotez, klasyfikowanie, poszukiwanie twierdzeń o reprezentacji, sprowadzanie obiektów do postaci kanonicznych, itd. Nie można twierdzić, że tworzenie metafor pojęciowych wyczerpuje całość genezy i funkcjonowania matematyki. Trudno jest nam wyobrazić sobie, jak podstawowa czynność badawcza matematyka, czyli dowodzenie twierdzeń miałaby zostać zredukowana do operacji na metaforach pojęciowych.

8. Uważamy, że propozycje LN nie zdają należycie sprawy z kontekstu odkrycia w matematyce. Odnosimy wrażenie, że propozycje te powstały przy okazji lektur materiałów zawartych w podręcznikach matematyki, a w mniejszej mierze przy okazji studiowania prac źródłowych, z których analizy można byłoby bardziej adekwatnie wywieść genezę i funkcjonowanie pojęć matematycznych.

9. W prezentacji autorów znalazło się kilka błędów matematycznych (np. przy omawianiu liczb hiperrzeczywistych lub punktów w nieskończoności).

10. Omawiana książka była, z reguły krytycznie, recenzowana przez kilku autorów – zob. np.: Auslander 2001, Devlin 2008, Elglaly, Quek 2009, Gold 2001, Goldin 2001, Henderson 2002, Madden 2001, Siegfried 2001, Schiralli, Sinclair 2003, Voorhees 2004.

11. Nasze uwagi krytyczne mogą wydawać się bezładną zbie-

raniną poczynionych *ad hoc* zarzutów, lecz nie było naszym zamiarem podanie jakiejś spójnej, w miarę kompletnej alternatywy dla koncepcji ucieleśnionej matematyki, to przekracza nasze skromne możliwości. Książka Lakoffa i Núñeza zasługuje na krytykę, lecz zasługuje również na uwagę. Jest odważną (w wielu miejscach niestety pochopnie brawurową) próbą zmierzenia się z fundamentalnymi pytaniami dotyczącymi, m.in.: epistemologii matematyki, jej ontologii, fascynującego zjawiska jakim jest twórczość matematyczna, bardzo trudnych problemów związanych ze skutecznym nauczaniem matematyki, wreszcie miejsca matematyki w całości kultury.

Bibliografia

Auslander, J. 2001. Embodied mathematics. *American Scientist* **89**, 366–367.

Dedekind, R. 1872. *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*. Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig.

Devlin, K. 2008. How do learn math? *Mathematical Association of America*.

http://www.maa.org/devlin_12_08.html

Dębiec, J. 2002. *Mózg i matematyka*. Biblos, Tarnów.

Elglaly, Y.N., Quek, F. 2009. Review of "Where Mathematics comes from: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being" by George Lakoff and Rafael E. Nuñez. *CHI 2009*, Boston.

Gelbaum, B.R., Olmsted, J.M.H. 2003. *Counterexamples in Analysis*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc.

Gold, B. 2001. Review of Lakoff, Núñez 2000.
www.maa.org/reviews/wheremath.html

Goldin, G.A. 2001. Counting on the metaphorical. *Nature* **413**, 18–19.

Henderson, D.W. 2002. Review of: Where Mathematics comes from: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being. *The Mathematical Intelligencer* **24** (1), 75–76.

Hilbert, D. 1926. Über das Unendliche. *Mathematische Annalen* **95**, 161–190.

Hohol, M.L. 2011. Matematyczność ucieleśniona. W: B. Brożek, J. Mączka, W.P. Grygiel, M. L. Hohol (red.) *Oblicza racjonalności.* Copernicus Center Press, Kraków, 143–166.

Lakoff, G., Johnson, M. 1980. *Metaphors we live by*. University of Chicago Press, Chicago.

Lakoff, G., Núñez, R.E. 2000. *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. Basic Books, New York.

Madden, J.J. 2001. Review of: Where Mathematics comes from: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being. *Notices of the AMS* **48**, 1182–1188.

Núñez, R.E. 2005. Creating mathematical infinities: Metaphor, blending, and the beauty of transfinite cardinals. *Journal of Pragmatics* **37**, 1717–1741.

Pogonowski, J. 2011. Geneza matematyki wedle kognitywistów. *Investigationes Linguisticae* **23**, 106–147.

Schiralli, M., Sinclair, N. 2003. A constructive response to 'Where Mathematics Comes From'. *Educational Studies in Mathematics* **52**, 79–91.

Siegfried, T. 2001. Math may be not in the stars, but in ourselves. *The Dallas Morning News*, May 3, 2011.

Steen, L.A., Seebach, J.A., Jr. 1995. *Counterexamples in Topology*. New York: Dover Publications, Inc.

Voorhees, B. 2004. Embodied Mathematics. Comments on Lakoff & Núñez. *Journal of Consciousness Studies* **11**, No. 9, 83–88.

Wise, G.L., Hall, E.B. 1993. *Counterexamples in Probability and Real Analysis*. New York: Oxford University Press.

Thurston, W.P. 1994. On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society* **30** (2), 161–177.