O kwantyfikatorach uogólnionych

J. Pogonowski, J. Smigerska

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

16 stycznia 2008

Plan na dziś

Plan na dziś:

- uogólnione kwantyfikatory: geneza i własności
- reprezentacje relacyjne i numeryczne
- własności metalogiczne.

W niniejszej prezentacji wykorzystujemy: notatki z wykładów Jerzego Pogonowskiego dot. uogólnionych kwantyfikatorów prowadzonych w ubiegłym stuleciu oraz wyjątki z rozprawy magisterskiej Joanny Smigerskiej *Kwantyfikatory uogólnione w językach naturalnych i formalnych* pisanej pod opieką Jerzego Pogonowskiego i obronionej w 1998 roku w Instytucie Językoznawstwa UAM.

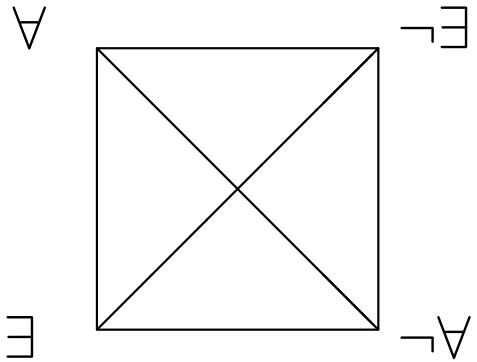
Historia naturalna kwantyfikatorów

Wśród logików, którzy muszą być wymienieni, gdy rozważamy uogólnione kwantyfikatory, są:

- Arystoteles
- Gottlob Frege
- Stanisław Leśniewski
- Andrzej Mostowski
- Roman Suszko
- Per Lindström
- Leon Henkin
- Współczesność: Richard Montague, Jon Barwise, Jerome H. Keisler, Johan van Benthem, Dag Westerståhl, i in.

Tradycyjny kwadrat logiczny

Ten diagram (i zawarte w nim związki logiczne) znamy wszyscy:



W dalszym ciągu, będziemy mówić o występujących tu kwantyfikatorach jako o kwantyfikatorach z tradycyjnego kwadratu logicznego (TKL).

Figury i tryby sylogistyki klasycznej

Pamiętamy również figury sylogistyki Arystotelesa:

$$\begin{array}{c} Q_1 ZY \\ Q_2 XZ \\ \hline Q_3 XY \end{array} \qquad \begin{array}{c} Q_1 YZ \\ Q_2 XZ \\ \hline Q_3 XY \end{array} \qquad \begin{array}{c} Q_1 ZY \\ Q_2 ZX \\ \hline Q_3 XY \end{array} \qquad \begin{array}{c} Q_1 YZ \\ Q_2 ZX \\ \hline Q_3 XY \end{array}$$

Każdy z Q_i $(1 \leq i \leq 4)$ może być jednym z kwantyfikatorów z TKL. Możliwych trybów jest 256, trybów poprawnych (takich, w których wniosek wynika logicznie z przesłanek) jest 24.

Jest też wiele sylogistyk niestandardowych (z dodatkowymi spójkami, negacją przynazwową, itd.)

Kwantyfikatory standardowe

Kwantyfikatory $\forall$ oraz $\exists$ pojawiają się w pracach Peirce'a oraz Fregego.

W wieku XIX mamy pierwsze algebraiczne interpretacje kwantyfikatorów. Dyskutuje się też możliwość „kwantyfikacji orzecznika".

Leśniewski stosuje kwantyfikację po zmiennych zdaniowych.

Tarski pokazuje, jak z pomocą kwantyfikatora ogólnego oraz negacji zdefiniować pozostałe stałe logiczne.

Suszko przypisuje kwantyfikatorom kategorie syntaktyczne (w sensie Ajdukiewicza).

Kwantyfikatory ilościowe Mostowskiego

Za pierwszą pracę dotyczącą kwantyfikatorów uogólnionych uważamy artykuł Andrzeja Mostowskiego z 1957 roku: On generalization of quantifiers *Fundamenta Mathematicae* **44**, 12–36.

Mostowski wprowadza kwantyfikatory ilościowe.

Kwantyfikator (lokalny) *na* M jest zbiorem podzbiorów M.

Kwantyfikator (globalny) jest funktorem $\boldsymbol{Q}$ przypisującym każdemu niepustemu zbiorowi M kwantyfikator $\boldsymbol{Q}_M$ na M.

Przykłady kwantyfikatorów Mostowskiego

Przykładami takich kwantyfikatorów są:

$$\forall_M = \{M\},$$

$$\exists_M = \{X \subseteq M : X \neq \emptyset\},$$

$$(\exists_{\geq n})_M = \{X \subseteq M : |X| \geq n\},$$

$$(\boldsymbol{Q}_\alpha)_M = \{X \subseteq M : |X| \geq \aleph_\alpha\},$$

$$(\boldsymbol{Q}_R)_M = \{X \subseteq M : |X| > |M - X|\}, \quad \text{(Kwantyfikator Reschera)},$$

$$(\boldsymbol{Q}_R)_M = \{X \subseteq M : |X| = |M|\}, \quad \text{(Kwantyfikator Changa)}.$$

Warunek Mostowskiego

Kwantyfikatory dotyczą tylko liczby elementów, a zatem nie powinny rozróżniać elementów w M:

ISOM *Jeżeli f jest bijekcją z M do M', to* $X \in \boldsymbol{Q}_M \Leftrightarrow f[X] \in \boldsymbol{Q}_{M'}$.

Ten warunek przyjmowany jest we wszystkich późniejszych pracach dotyczących uogólnionych kwantyfikatorów.

Kwantyfikatory Lindströma

Pojęcie uogólnionego kwantyfikatora wprowadzone przez Mostowskiego nie obejmowało takich kwantyfikatorów jak np. binarny kwantyfikator **most** w zdaniach typu:

$$\textit{Most } \varphi \textit{ are } \psi$$

dający na każdym M binarną relację pomiędzy podzbiorami M:

$$\mathbf{most}_M = \{(X, Y) \in M^2 : |X \cap Y| > | X - Y |\}.$$

Lindström wprowadza zdefiniowane niżej pojęcie *kwantyfikatora uogólnionego* związanego z typem (tj. ciągiem $\langle k_1, \ldots , k_n \rangle$ liczb naturalnych; kwantyfikatory Mostowskiego posiadają typ $\langle 1 \rangle$, **most** typ $\langle 1, 1 \rangle$).

Kwantyfikatory Lindströma

(Lokalnym) *kwantyfikatorem uogólnionym na M typu $\langle k_1, \ldots, k_n \rangle$* nazywamy dowolną n-arną relację pomiędzy podzbiorami $M^{k_1}, \ldots, M^{k_n}$.
(Globalnym) *kwantyfikatorem uogólnionym typu $\langle k_1, \ldots, k_n \rangle$* jest funktor $\boldsymbol{Q}$, który każdemu zbiorowi M przyporządkowuje kwantyfikator lokalny $\boldsymbol{Q}_M$ typu $\langle k_1, \ldots, k_n \rangle$.

W większości przypadków będzie mowa o tzw. kwantyfikatorach uogólnionych monadycznych, czyli typu $\langle 1, 1, \ldots, 1 \rangle$. Można również mówić o monadycznych kwantyfikatorach *unarnych*, *binarnych*, itd., co oznacza kwantyfikatory uogólnione typu $\langle 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle$, itd.

Kwantyfikatory Lindströma

Lindström również zakłada *ISOM* w definicji kwantyfikatora uogólnionego:

ISOM *Jeżeli f jest bijekcją z M do M', to*
$(R_1, \ldots, R_n) \in \mathrm{Q}_M \Leftrightarrow (f[R_1], \ldots, f[R_n]) \in \boldsymbol{Q}_{M'}$.

Przykłady kwantyfikatorów Lindströma:

$$\mathbf{all}_M = \{(X, Y) \in M^2 : X \subseteq Y\},$$

$$\mathbf{some}_M = \{(X, Y) \in M^2 : X \cap Y \neq \emptyset\},$$

$$\mathbf{more}_M = \{(X, Y) \in M^2 : |X| > |Y|\},$$

$$\mathbf{I}_M = \{(X, Y) \in M^2 : |X| = |Y|\}, \quad \text{(Kwantyfikator Härtiga).}$$

Kwantyfikator Henkina

Pamiętamy, że przy tworzeniu prefiksowej postaci normalnej formuły języka rachunku predykatów wszystkie kwantyfikatory poprzedzają matrycę formuły. Przy skolemizacji takiej formuły eliminujemy kwantyfikatory egzystencjalne, wprowadzając nowe symbole funkcyjne (dla funkcji Skolema).

Symbol funkcyjny f wprowadzony przez eliminację kwantyfikatora $\exists$ z prefiksu kwantyfikatorowego $Q_1 Q_2 \ldots Q_n$ ma tyle argumentów, ile kwantyfikatorów ogólnych poprzedza ów eliminowany kwantyfikator $\exists$ w prefiksie $Q_1 Q_2 \ldots Q_n$.

Powstaje problem, czy ta procedura dobrze opisuje sytuacje, w których dokonujemy wyborów niezależnych.

Kwantyfikator Henkina

Henkin wprowadził uogólnienie tej procedury, dopuszczając prefiksy częściowo uporządkowane lub inaczej prefiksy rozgałęzione, za pomocą których można wyrazić zależności, których nie można przedstawić w sposób liniowy.

Kwantyfikator Henkina ma postać następującą:

$$\begin{array}{l} \forall x \text{———} \exists y \\ \forall u \text{———} \exists v \end{array} \quad \phi(x, y, u, v)$$

Częściowy porządek prefiksu ma oddawać sytuację, gdy dokonujemy wyborów niezależnych.

Kwantyfikator Henkina

Semantykę dla tego kwantyfikatora ustala się następująco:

Kwantyfikator Henkina to kwantyfikator typu $\langle 4 \rangle$ taki, że:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} \;=\; & \{R \subseteq M^4 : \textit{istnieją funkcje } f, g \textit{ na } M \textit{ takie,że} \\ & \textit{dla dowolnych } a, b \in M \;\; (a, f(a), b, f(b)) \in R\}. \end{aligned}$$

Język z kwantyfikatorem Henkina ma moc wyrażania istotnie większą niż język klasycznego rachunku predykatów. Można pokazać, że kwantyfikator Q_0 Mostowskiego ($Q_0 x\ \varphi(x)$ interpretujemy: istnieje nieskończenie wiele x takich, że $\varphi(x)$) jest definiowalny przez kwantyfikator Henkina.

Kwantyfikator Henkina

Hintikka podaje następujący przykład, pokazujący, że w językach etnicznych posługujemy się tego typu kwantyfikacją:

Some relative of each villager and some relative of each townsman hate each other.

Barwise wprowadza rozgałęzienia kwantyfikatorów uogólnionych oraz pokazuje, że dla odpowiednich Q_1, Q_2 nawet najprostszy prefiks rozgałęziony:

$$\begin{array}{l} Q_1 \\ Q_2 \end{array} \Big\rangle$$

(nieredukowalny do prefiksu liniowego) pojawia się w językach naturalnych.

Interpretacje semantyczne niektórych prostych determinatorów języków etnicznych:

$$\mathbf{all}_M AB \Leftrightarrow \mathbf{every}_M AB \Leftrightarrow \mathbf{each}_M AB \Leftrightarrow A \subseteq B,$$

$$\mathbf{some}_M AB \Leftrightarrow \mathbf{a}_M AB \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset,$$

$$\mathbf{no}_M AB \Leftrightarrow \mathbf{zero}_M AB \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset,$$

$$\mathbf{most}_M AB \Leftrightarrow |A \cap B| > |A - B|,$$

$$\mathbf{both}_M AB \Leftrightarrow \mathbf{all}_M AB \ \& \ |A| = 2,$$

$$\mathbf{neither}_M AB \Leftrightarrow \mathbf{no}_M AB \ \& \ |A| = 2,$$

$$\mathbf{two}_M AB \Leftrightarrow |A \cap B| \geq 2,$$

$$\mathbf{more...than}_M A_1 A_2 B \Leftrightarrow |A_1 \cap B| > |A_2 \cap B|,$$

$$\mathbf{fewer...than}_M A_1 A_2 B \Leftrightarrow |A_1 \cap B| < |A_2 \cap B|,$$

$$\mathbf{as\ many...as}_M A_1 A_2 B \Leftrightarrow |A_1 \cap B| = |A_2 \cap B|.$$

Kwantyfikacja w językach etnicznych

Niektóre dalsze determinatory:

- zależne od kontekstu (*many, few, a large number of, unexpectedly few, unusualy many,...,*)
- rodzajnik określony, zaimki dzierżawcze, zaimki wskazujące
- liczbowe (*one, two, exactly five, infinitely many, at most finitely many, around ten, every third, approximately ten,...*)
- porównawcze (*more...than, exactly as many...as, ..., fewer of male than female,...*)
- wyjątku (*all but five, all but at most three, all but finitely many,...*)

all but five$_M AB \Leftrightarrow |A - B| = 5$
all but at most three$_M AB \Leftrightarrow |A - B| \leq 3$

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Zachowawczość to własność przypisująca pierwszemu argumentowi rolę uprzywilejowaną:

CONSERV *Dla każdego M oraz wszystkich $A_1, \ldots, A_n, B \subseteq M$,*
$\boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n B \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n (A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap B$

Extension (rozszerzenie) to własność określająca niezależność od uniwersum:

EXT *Jeżeli $A_1, \ldots, A_n \subseteq M \subseteq M'$,*
to $\boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_{M'} A_1 \ldots A_n$.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Połączenie *CONSERV* i *EXT* daje następujący warunek:

UNIV $\quad \boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n B \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} A_1 \ldots A_n (A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap B.$

Niezależność kwantyfikatora od cech indywidualnych obiektów wyraża:

QUANT *Dla wszystkich M i M', wszystkich bijekcji $f : M \to M'$ oraz wszystkich $A_1, \ldots, A_n \subseteq M$,*
$\boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_{M'} f[A_1] \ldots f[A_n]$

Ten ostatni warunek to inne sformułowanie warunku ISOM rozważanego już przez Mostowskiego.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Warunki CONSERV, EXT i QUANT dla najprostszych kwantyfikatorów (typu $\langle 1, 1\rangle$) mają postać:

CONSERV: $Q_M AB \Rightarrow Q_M A\, A \cap B$

EXT: $Q_M AB \wedge M \subseteq M' \Rightarrow Q_{M'} AB$

QUANT: $Q_M AB \Rightarrow Q_{M'} f[A] f[B]$ dla każdej bijekcji $f : M \to M'$.

Relacje spełniające warunki CONSERV, EXT oraz QUANT nazywamy **kwantyfikatorami logicznymi**.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Dla kwantyfikatorów binarnych bycie kwantyfikatorem logicznym oznacza zależność kwantyfikatora jedynie od liczb: $|A - B|$ oraz $|A \cap B|$.

Twierdzenie.
Binarny kwantyfikator $\boldsymbol{Q}$ jest *logiczny* wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich M, M' oraz wszystkich $A, B \subseteq M$ i $A', B' \subseteq M'$:
$|A - B| = |A' - B'|$ oraz $|A \cap B| = |A' \cap B'|$ implikuje
$\boldsymbol{Q}_M AB \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_{M'} A'B'$.

Oznacza to, że binarne relacje (spełniające CONSERV, EXT i QUANT) pomiędzy *zbiorami* mogą być zastąpione binarnymi relacjami pomiędzy *liczbami kardynalnymi*, co będzie wykorzystane przy reprezentacji kwantyfikatorów przez drzewa numeryczne.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Dowód.

$\Rightarrow$

Załóżmy, że $\boldsymbol{Q}$ jest logiczny (spełnia *CONSERV*, *EXT*, *QUANT*) oraz niech $|A - B| = |A' - B'|$ i $|A \cap B| = |A' \cap B'|$. Wtedy na mocy *QUANT* $\boldsymbol{Q}_A AA \cap B \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_{A'} A'A' \cap B'$, i na mocy *UNIV* $\boldsymbol{Q}_M AB \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_{M'} A'B'$.

$\Leftarrow$

Jeżeli prawa strona równoważności zachodzi, to *QUANT* jest spełnione natychmiastowo.
Weźmy M oraz $A, B \subseteq M$ oraz niech $M' = A' = A$.
Wtedy $\boldsymbol{Q}_M AB \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_A AA \cap B$ zatem *UNIV* jest spełnione.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Klasa kwantyfikatorów logicznych jest zamknięta ze względu na operacje boolowskie:

Jeżeli $\boldsymbol{Q}_1$ i $\boldsymbol{Q}_2$ spełniają *CONSERV* oraz *EXT* (*QUANT*), to $\boldsymbol{Q}_1 \wedge \boldsymbol{Q}_2$, $\boldsymbol{Q}_1 \vee \boldsymbol{Q}_2, \neg \boldsymbol{Q}_1$ również posiadają te własności.

Dla binarnego kwantyfikatora $\boldsymbol{Q}$ możliwe są dwie $(n+1)$-argumentowe koniunkcje wewnętrzne:

$$\boldsymbol{Q}_M^{\wedge 1} A_1 \ldots A_n B \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_M A_1 \cap \ldots \cap A_n B,$$

$$\boldsymbol{Q}_M^{\wedge 2} A_1 \ldots A_n B \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_M A_1 B \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ \boldsymbol{Q}_M A_n B.$$

Podobnie definiuje się alternatywy wewnętrzne $\boldsymbol{Q}^{\vee 1}$ oraz $\boldsymbol{Q}^{\vee 2}$.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Jeżeli $\boldsymbol{Q}$ jest $(n+1)$-argumentowym kwantyfikatorem, to jego *wewnętrzną negacją* jest kwantyfikator $\boldsymbol{Q}\neg$, taki, że:
$(\mathbf{Q}\neg)_M A_1 \ldots A_n, B \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n M - B$.

Kwantyfikatorem *dualnym* $\check{\boldsymbol{Q}}$ do $\boldsymbol{Q}$ jest kwantyfikator $\neg(\boldsymbol{Q}\neg)[= (\neg\boldsymbol{Q})\neg.]$
Negacje zewnętrzna oraz wewnętrzna korespondują odpowiednio z negacją zdania oraz negacją frazy orzecznikowej.

Klasa kwantyfikatorów logicznych jest zamknięta ze względu na wewnętrzną koniunkcję i alternatywę (obu rodzajów) oraz wewnętrzną negację i operację tworzenia kwantyfikatorów dualnych.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Table:

Q	$\neg Q$	$Q\neg$	$\breve{Q}$
some	*no*	*not every*	*every*
every	*not every*	*no*	*some*
no	*some*	*every*	*not every*
most	*at most half*	*less than half*	*at least half*
many	*few*	-	*all but a few*
infinitely many	*at most finitely many*	-	*all but finitely many*
(at least) n	*less than n*	-	*all but less than n*
at most n	*more than n*	*all but at most n*	-
(exactly) n	*not exactly n*	*all but n*	-
more...than	*at most as many...as*	-	-
fewer...than	*at least as many...as*	-	-

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

n-argumentowy kwantyfikator jest *trywialny na M*, jeżeli $\boldsymbol{Q}_M$ jest pustą lub pełną n-argumentową relacją na $P(M)$.

NONTRIV $\boldsymbol{Q}$ *jest nietrywialny na pewnych uniwersach.*

Kwantyfikatory, które naruszają *NONTRIV* nie są interesujące: zdanie rozpoczynające się od determinatora denotującego taki kwantyfikator (spełniający *EXT*) jest albo prawdziwe we wszystkich modelach albo we wszystkich modelach fałszywe. Kwantyfikatorem trywialnym jest np. *mniej niż zero*.

Klasa kwantyfikatorów nietrywialnych nie jest zamknięta ze względu na operacje boolowskie.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Wzmocnioną wersją *NONTRIV* jest *activity*:

ACT ***Q*** *jest nietrywialny na każdym universum.*

Wiele kwantyfikatorów języka naturalnego spełnia *ACT*, chociaż nawet pośród prostych kwantyfikatorów istnieją wyjątki, np.: **both, two, three**, itp. (Jeżeli w M jest mniej niż cztery elementy, to $\mathbf{four}_M AB$ jest zawsze fałszywe).

J. van Benthem podaje jeszcze mocniejszą wersję *ACT* dla binarnych kwantyfikatorów, *variety*, zaś Westerståhl uogólnia ją do $(n+1)$-argumentowych kwantyfikatorów:

VAR *Dla każdego M oraz wszystkich $A_1, \ldots, A_n \subseteq M$, takich, że $A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset$, istnieją B_1, B_2, takie, że $\boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n B_1$ oraz $\neg \boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n B_2$.*

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Zachodzą następujące implikacje:

$$VAR \Longrightarrow ACT \Longrightarrow NONTRIV,$$

jednak odwrotne implikacje nie są prawdziwe.

(Przykładem kwantyfikatora, który spełnia *ACT* zaś narusza *VAR* jest $\boldsymbol{Q}_M AB \Leftrightarrow |A| = 1$).

Westerståhl twierdzi jednak, że wśród kwantyfikatorów języka naturalnego, te kwantyfikatory, które spełniają *ACT* spełniają również *VAR*.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

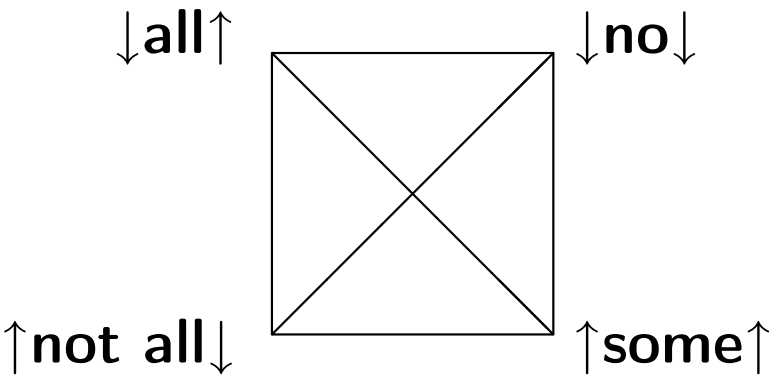
Binarny kwantyfikator $\boldsymbol{Q}$ jest

$$
\begin{array}{ll}
MON\uparrow, & \text{gdy zachodzi } \boldsymbol{Q}_M AB \ \wedge \ B \subseteq B' \Rightarrow \boldsymbol{Q}_M AB', \\
MON\downarrow, & \text{gdy zachodzi } \boldsymbol{Q}_M AB \ \wedge \ B' \subseteq B \Rightarrow \boldsymbol{Q}_M AB', \\
\uparrow MON, & \text{gdy zachodzi } \boldsymbol{Q}_M AB \ \wedge \ A \subseteq A' \Rightarrow \boldsymbol{Q}_M A'B, \\
\downarrow MON, & \text{gdy zachodzi } \boldsymbol{Q}_M AB \ \wedge \ A' \subseteq A \Rightarrow \boldsymbol{Q}_M A'B.
\end{array}
$$

Kwantyfikator $\boldsymbol{Q}$ jest *monotoniczny prawostronnie* (*RIGHT MON*), gdy jest $MON\uparrow$ lub $MON\downarrow$, zaś *monotoniczny lewostronnie* (*LEFT MON*), gdy jest $\uparrow MON$ lub $\downarrow MON$.
$\boldsymbol{Q}$ jest $\downarrow MON\downarrow$, gdy jest $\downarrow MON$ i $MON\downarrow$ jednocześnie. Analogicznie dla $\uparrow MON\uparrow$, $\downarrow MON\uparrow$, $\uparrow MON\downarrow$.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Cztery typy *podwójnej monotoniczności* są zawarte w kwadracie logicznym:



Inne przykłady podwójnie monotonicznych kwantyfikatorów: ↑*MON*↑: **at least n, infinitely many**, ↓*MON*↓: **at most n, at most finitely many**. Kwantyfikatory **most, the, John's** są *MON*↑, ale nie są *LEFT MON*, zaś kwantyfikatory **exactly n, all but n, between five and ten** nie są ani *LEFT MON* ani *RIGHT MON*.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Różne rodzaje monotoniczności są silnymi własnościami kwantyfikatorów. Związane są też z rozważanym w tradycyjnej sylogistyce *rozłożeniem terminów*.

- (1) Zewnętrzna negacja odwraca kierunki *RIGHT* jak i *LEFT MON*.
- (2) Wewnętrzna negacja odwraca kierunek *RIGHT MON* jednak zachowuje *LEFT MON*.
- (3) Operacja tworzenia kwantyfikatora dualnego zachowuje kierunek *RIGHT MON* jednak odwraca kierunek *LEFT MON*.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Twierdzenie.
Przy spełnionych *CONSERV* oraz *VAR*, jedynymi podwójnie monotonicznymi kwantyfikatorami są dokładnie te z kwadratu logicznego.

Dowód
Załóżmy, że $\boldsymbol{Q}$ jest $\downarrow MON\downarrow$. Udowodnimy, że $\boldsymbol{Q}$ musi być **no**. Weźmy uniwersum M oraz $A, B \subseteq M$.
(i) Załóżmy, że $A \cap B = \emptyset$. Weźmy niepusty $A', A \subseteq A'$. Na mocy *VAR* istnieje takie $C \subseteq M$, takie, że $\boldsymbol{Q}_M A' C$. Jako, że $\boldsymbol{Q}$ jest $\downarrow MON$, otrzymujemy $\boldsymbol{Q}_M AC$, na mocy $MON\downarrow$ zaś $\boldsymbol{Q}_M A\emptyset$. Założyliśmy, że $A \cap B = \emptyset$, zatem $\boldsymbol{Q}_M AA \cap B$, z tego zaś na mocy *CONSERV* otrzymujemy $\boldsymbol{Q}_M AB$.
(ii) Załóżmy, że zachodzi relacja $\boldsymbol{Q}_M AB$. Na mocy $\downarrow MON\downarrow$ otrzymujemy $\boldsymbol{Q}_M A \cap BA \cap B$, z czego $(MON\downarrow)$ mamy $\boldsymbol{Q}_M A \cap BA \cap B \cap C$ dla dowolnego $C \subseteq M$, na mocy *CONSERV* otrzymujemy $\boldsymbol{Q}_M A \cap BC$, zatem *(VAR)* $A \cap B = \emptyset$.

W pozostałych trzech przypadkach dowód przebiega podobnie.

Kwantyfikatory jako relacje

Jeżeli żadne inne założenia nie będą podane, zakłada się dalej, że wszystkie rozważane kwantyfikatory są logiczne (czyli spełniają *CONSERV*, *EXT*, oraz *QUANT*) oraz spełniają *NONTRIV*.

Dla kwantyfikatorów w językach etnicznych wydaje się uzasadnione przyjęcie następującego założenia:

FIN *Jedynie skończone uniwersa brane są pod uwagę.*

Z drugiej strony, determinatory takie, jak *infinitely many, all but finitely many* wymagają użycia modeli nieskończonych.

WŁASNOŚĆ	**DEFINICJA**	**PRZYKŁADY**
Kwantyfikator $\boldsymbol{Q}$ *jest:*	*gdy:*	
SYMETRYCZNY	$\boldsymbol{Q}AB \Rightarrow \boldsymbol{Q}BA$	**some, no, at least n** **at most n, exactly n,** **between n and m**
ANTYSYMETRYCZNY	$\boldsymbol{Q}AB \ \wedge \ \boldsymbol{Q}BA \Rightarrow A = B$	**all**
ASYMETRYCZNY	$\boldsymbol{Q}AB \Rightarrow \neg\boldsymbol{Q}BA$	**-**
ZWROTNY	$\boldsymbol{Q}AA$	**all, at least five** **all but finitely many**
QUASI-ZWROTNY	$\boldsymbol{Q}AB \Rightarrow \boldsymbol{Q}AA$	**some, most at least n**
SŁABO ZWROTNY	$\boldsymbol{Q}AB \Rightarrow \boldsymbol{Q}BB$	**some, most at least n**
QUASI-UNIWERSALNY	$\boldsymbol{Q}AA \Rightarrow \boldsymbol{Q}AB$	**no, not all, all but n**
PRZECIWZWROTNY	$\neg\boldsymbol{Q}AA$	**not all, all but n**
LINIOWY	$\boldsymbol{Q}AB \vee \boldsymbol{Q}BA \vee A = B$	**not all**
PRZECHODNI	$\boldsymbol{Q}AB \ \wedge \ \boldsymbol{Q}BC \Rightarrow \boldsymbol{Q}AC$	**all, all but finitely many**
KOŁOWY	$\boldsymbol{Q}AB \ \wedge \ \boldsymbol{Q}BC \Rightarrow \boldsymbol{Q}CA$	**-**
EUKLIDESOWY	$\boldsymbol{Q}AB \ \wedge \ \boldsymbol{Q}AC \Rightarrow \boldsymbol{Q}BC$	**-**
ANTYEUKLIDESOWY	$\boldsymbol{Q}AB \ \wedge \ \boldsymbol{Q}CB \Rightarrow \boldsymbol{Q}AC$	**-**

Kwantyfikatory jako relacje

Dowodzi się, że nie ma kwantyfikatorów:

- asymetrycznych,
- euklidesowych
- kołowych.

Twierdzenia te wyjaśniają „semantyczne luki" w językach naturalnych („-" w powyższej tabelce).

Żaden kwantyfikator nie jest jednocześnie:

- (1) symetryczny i przechodni,
- (2) symetryczny i antyeuklidesowy,
- (3) symetryczny i zwrotny,
- (4) quasi-uniwersalny i zwrotny.

Kwantyfikatory jako relacje

Jedynym zwrotnym i antysymetrycznym kwantyfikatorem jest **all**.

- (1) Jeżeli $\boldsymbol{Q}$ jest zwrotny i przechodni, to $\boldsymbol{Q}$ jest $\downarrow MON\uparrow$.
- (2) Jeżeli $\boldsymbol{Q}$ jest symetryczny, to
  - (a) $\boldsymbol{Q}$ jest quasi-zwrotny wtedy i tylko wtedy, gdy $\boldsymbol{Q}$ jest $MON\uparrow$,
  - (b) $\boldsymbol{Q}$ jest quasi-uniwersalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\boldsymbol{Q}$ jest $MON\downarrow$.

Przy założeniu FIN oraz ACT, jedynym zwrotnym i przechodnim kwantyfikatorem jest **all**.

Kwantyfikatory jako relacje

Kwantyfikatory z kwadratu logicznego posiadają następujące własności (modulo *VAR*):

all	: zwrotny, przechodni,
some	: symetryczny, quasi-zwrotny,
not all	: przeciwzwrotny, liniowy,
no	: symetryczny, quasi-uniwersalny.

Reprezentacja numeryczna

Każdy binarny kwantyfikator $\boldsymbol{Q}$, który spełnia *CONSERV*, *EXT*, *QUANT*, może być identyfikowany z binarną relacją r_Q pomiędzy liczbami kardynalnymi. Relacja ta jest definiowana następująco:

$$r_Q xy \quad \Leftrightarrow \quad \text{dla pewnych } A, B, \text{ takich, że } |A - B| = x \text{ i } |A \cap B| = y, \text{ zachodzi relacja } \boldsymbol{Q}AB.$$

Z drugiej strony, mając daną dowolną binarną relację r_Q pomiędzy liczbami kardynalnymi, można otrzymać odpowiadający jej logiczny (czyli spełniający *CONSERV*, *EXT* i *QUANT*) kwantyfikator $\boldsymbol{Q}$ na mocy:

$$\boldsymbol{Q}AB \Leftrightarrow r_Q|A - B||A \cap B|.$$

Reprezentacja numeryczna

Oto kilka *numerycznych* wersji podanych wcześniej kwantyfikatorów:

$$\begin{aligned}
&\textbf{all}\ xy \Leftrightarrow x = 0,\\
&\textbf{no}\ xy \Leftrightarrow y = 0,\\
&\textbf{some}\ xy \Leftrightarrow y \neq 0,\\
&\textbf{infinitely many}\ xy \Leftrightarrow y \text{ jest nieskończona}\\
&\textbf{both}\ xy \Leftrightarrow x = 0\ \&\ y = 2.
\end{aligned}$$

Traktowanie kwantyfikatorów z perspektywy relacji pomiędzy liczbami kardynalnymi odpowiednich podzbiorów uniwersum staje się bardziej atrakcyjne, gdy założymy *FIN*. Kwantyfikatory stają się wtedy podzbiorami N^2. N^2 może być reprezentowane przez *drzewko numeryczne*, w którym każdy punkt (x, y) posiada dwa następniki $(x + 1, y), (x, y + 1)$, które to punkty są z kolei poprzednikami punktu $(x + 1, y + 1)$.

Reprezentacja numeryczna

wiersz $x = |A - B|$

				(0,0)				
			(1,0)		(0,1)			kolumna $y = |A \cap B|$
		(2,0)		(1,1)		(0,2)		
	(3,0)		(2,1)		(1,2)		(0,3)	
(4,0)		(3,1)		(2,2)		(1,3)		(0,4) $x + y = |A|$

Przekątna (diagonalna) w takim drzewie numerycznym to ciąg tych par (x, y) dla których $x + y = |A|$.

$+$	$-$	$-$
$- \quad +$	$- \quad +$	$- \quad +$
$- \quad - \quad +$	$- \quad + \quad -$	$- \quad - \quad +$
$- \quad - \quad - \quad +$	$- \quad + \quad - \quad -$	$- \quad - \quad + \quad +$
$- \quad - \quad - \quad - \quad +$	$- \quad + \quad - \quad - \quad -$	$- \quad - \quad - \quad + \quad +$
all	**exactly one**	**most**

$-$	$+$	$+$
$- \quad -$	$- \quad +$	$- \quad +$
$- \quad - \quad +$	$- \quad + \quad +$	$+ \quad - \quad +$
$- \quad - \quad + \quad +$	$- \quad - \quad + \quad +$	$- \quad + \quad - \quad +$
$- \quad - \quad + \quad + \quad +$	$- \quad - \quad + \quad + \quad +$	$+ \quad - \quad + \quad - \quad +$
at least two	**half or more**	**all but an even number**

Reprezentacja numeryczna

Dzięki tej technice, można podać jakie warunki muszą spełniać graficzne reprezentacje kwantyfikatorów, aby kwantyfikatory te posiadały określone własności:

$NONTRIV \Leftrightarrow$ w drzewku pojawia się przynajmniej jeden $+$ oraz przynajmniej jeden $-$,

$ACT \Leftrightarrow$ w górnym trójkącie (0,0), (1,0), (0,1) pojawia się przynajmniej jeden $+$ oraz przynajmniej jeden $-$,

$VAR \Leftrightarrow$ na każdej diagonalnej (za wyjątkiem (0,0)) pojawia się przynajmniej jeden $+$ i przynajmniej jeden $-$.

Powyższe warunki obrazują fakt, że *VAR* jest silniejszym założeniem niż *ACT*.

Reprezentacja numeryczna

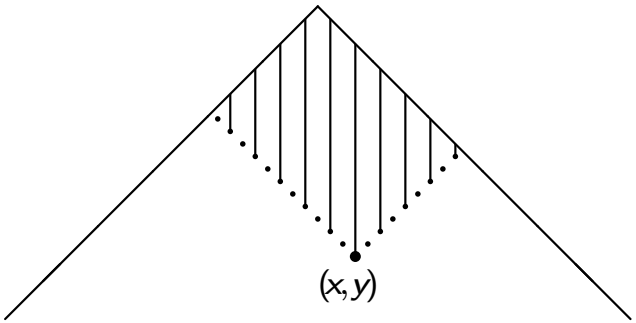
Podobne warunki można określić dla monotoniczności:

$MON\uparrow$ $\Leftrightarrow$ jeżeli jakiś punkt należy do $\boldsymbol{Q}$, to wszystkie punkty na tej samej diagonalnej na prawo od danego punktu również należą do $\boldsymbol{Q}$ (każdy $+$ wypełnia swoją diagonalną plusami w prawą stronę),

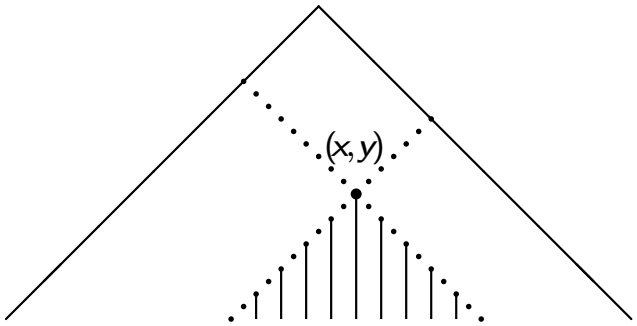
$MON\downarrow$ $\Leftrightarrow$ analogicznie do $MON\uparrow$, tylko w lewą stronę,

Reprezentacja numeryczna

Reguły dla lewostronnej wersji monotoniczności najlepiej zobrazują wykresy:



$\downarrow MON$



$\uparrow MON$

Wykresy te mówią, że jeżeli punkt (x, y) należy do kwantyfikatora $\boldsymbol{Q}$, to należą do niego wszystkie punkty z zakreskowanego obszaru.

Reprezentacja numeryczna

Twierdzenie. (*VAR*)
Kwantyfikatorami lewostronnie monotonicznymi są dokładnie te z kwadratu logicznego.

Dowód. Wszystkie kwantyfikatory z kwadratu logicznego są niewątpliwie *LEFT MON*. Rozważmy więc w drzewku numerycznym dowolny kwantyfikator, który jest lewostronnie monotoniczny. Istnieją tylko cztery możliwe górne trójkąty (na mocy *VAR* druga diagonalna musi mieć postać $+-$ lub $-+$). Każdy z tych czterech trójkątów generuje jeden kwantyfikator w drzewie (na mocy wcześniejszych obserwacji typów monotoniczności). Fakt ten zaś implikuje możliwość pojawienia się $+$ wyłącznie na lewej krawędzi drzewka (w przeciwnym przypadku postawiony już $-$ musiałby być $+$). Plusy muszą się zaś pojawić na lewej krawędzi, bo w przeciwnym razie naruszałyby *VAR*. Rozważanym kwantyfikatorem jest zatem kwantyfikator **no**. Podobnie dla reszty TKL.

Niektóre własności metalogiczne

Przez L_Q oznaczać będziemy język KRP z kwantyfikatorem Q. Interpretacje L_Q wyznaczone będą przez semantyczną charakterystykę Q. Dla języka L_Q z ustaloną interpretacją semantyczną Q będziemy też używać terminu „logika L_Q". Niech $\aleph_\alpha$ będzie α-tą mocą nieskończoną (gdzie α jest liczbą porządkową). Zamiast $\aleph_0$ piszemy czasem ω. Jeśli κ, λ są nieskończonymi liczbami kardynalnymi, to przez $L_{\kappa\lambda}$ rozumiemy język w którym dopuszczalne są koniunkcje i alternatywy długości mniejszej niż κ oraz prefiksy kwantyfikatorowe długości mniejszej niż λ. Tak więc, $L_{\omega\omega}$ to język KRP, klasycznej logiki pierwszego rzędu. Przez $L_{\infty\lambda}$ rozumiemy język, w którym dopuszczalne są koniunkcje i alternatywy dowolnej długości oraz prefiksy kwantyfikatorowe długości mniejszej niż λ.

Poniżej podajemy, bez zamiaru systematyczności wykładu, wybrane fakty dotyczące semantyki niektórych uogólnionych kwantyfikatorów.

Kwantyfikator „istnieje nieskończenie wiele"

Wyrażenie $Q_0 x\ \alpha(x)$ czytamy: istnieje nieskończenie wiele x takich, że $\alpha(x)$.
Semantyka Q_0 wyznaczona jest przez warunek:
$\mathfrak{A} \models Q_0 x\ \alpha(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha[a]\}$ jest nieskończony.
Oto niektóre własności L_{Q_0}:

- Standardowy model arytmetyki PA można scharakteryzować w L_{Q_0} z dokładnością do izomorfizmu.
  Wystarczy do aksjomatów dyskretnego liniowego porządku $<$ dodać aksjomat: $\forall x \neg Q_0 y\ y < x$.
- W L_{Q_0} nie zachodzi górne twierdzenie Löwenheima-Skolema.
- L_{Q_0} nie jest aksjomatyzowalna.

Kwantyfikator „istnieje nieskończenie wiele”

- W L_{Q_0} nie zachodzi twierdzenie o zwartości.
- W L_{Q_0} zachodzi dolne twierdzenie Löwenheima-Skolema.
- Pełność (systemu dowodowego z nieskończonymi dowodami) dla L_{Q_0} można otrzymać przez dodanie reguły infinitarnej:

$$\frac{\exists^{\geqslant 1} x\, \alpha(x), \exists^{\geqslant 2} x\, \alpha(x), \ldots}{Q_0 x\, \alpha(x)}.$$

- Dowolna przeliczalna $\aleph_0$-kategoryczna teoria w L_{Q_0} bez modeli skończonych jest zupełna.
- Teoria gęstych liniowych porządków jest zupełna w L_{Q_0}.
- L_{Q_0} jest fragmentem $L_{\omega_1\omega}$, co widać z równoważności:

$$Q_0 x\, \alpha(x) \equiv \bigwedge_{n<\omega} \exists^{\geqslant n} x\, \alpha(x).$$

Kwantyfikator „istnieje nieprzeliczalnie wiele”

Wyrażenie $Q_1 x\ \alpha(x)$ czytamy: istnieje nieprzeliczalnie wiele x takich, że $\alpha(x)$.

Semantyka Q_1 wyznaczona jest przez warunek:
$\mathfrak{A} \models Q_1 x\ \alpha(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha[a]\}$ jest nieprzeliczalny.

Ograniczamy się do interpretacji nieprzeliczalnych.
Tak jak w L_{Q_0} definiowalne jest pojęcie skończoności, tak w L_{Q_1} definiowalne jest pojęcie przeliczalności.

Oto niektóre własności L_{Q_1}:

Kwantyfikator „istnieje nieprzeliczalnie wiele”

- Teoria gęstych liniowych porządków nie jest zupełna w L_{Q_1}.
- Górne twierdzenie Löwenheima-Skolema nie zachodzi w L_{Q_1}. Dolne twierdzenie LS zachodzi w następującej wersji: jeśli teoria w L_{Q_1} (mocy co najwyżej $\aleph_1$) ma model, to ma model mocy $\aleph_1$.
- Każda $\aleph_1$-kategoryczna teoria w L_{Q_1} (mocy co najwyżej $\aleph_1$) jest zupełna.
- Teoria ciał algebraicznie domkniętych charakterystyki zero jest zupełna w L_{Q_1}.
- L_{Q_1} jest (!) aksjomatyzowalna.

Kwantyfikator Changa

Wyrażenie $Q_c x\ \alpha(x)$ czytamy: istnieje tyle x takich, że $\alpha(x)$ ile jest obiektów w całym uniwersum.
Semantyka Q_c wyznaczona jest przez warunek:
$\mathfrak{A} \models Q_c x\ \alpha(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha[a]\}$ ma taką samą moc, jak zbiór $dom(\mathfrak{A})$.
Oto niektóre własności L_{Q_c}:

- W modelach mocy $\aleph_1$ kwantyfikator Q_c ma taką samą interpretację, jak kwantyfikator Q_1.
- Teoria gęstych porządków liniowych nie jest zupełna w L_{Q_c}.

Kwantyfikator Changa

- Teoria ciał algebraicznie domkniętych charakterystyki zero jest zupełna w L_{Q_c}. [Teoria ta dopuszcza eliminację kwantyfikatorów $\exists$ i Q_c.]
- Jeśli przeliczalna teoria w L_{Q_c} ma model, którego moc jest liczbą kardynalną następnikową, to ma model mocy $\aleph_1$.
- Jeśli przeliczalna teoria w L_{Q_c} ma model mocy $\aleph_0$, to ma modele każdej mocy nieskończonej.
- Niech Val_1 będzie zbiorem wszystkich zdań L_{Q_c} prawdziwych w modelach mocy $\aleph_1$ i niech Val_ω będzie zbiorem wszystkich zdań L_{Q_c} prawdziwych w modelach mocy $\aleph_\omega$. Wtedy (przy założeniu uogólnionej hipotezy kontinuum):
  - Val_1 oraz Val_ω są rekurencyjnie przeliczalne.
  - $Val_1 \cap Val_\omega$ jest zbiorem wszystkich L_{Q_c}-tautologii.

Kwantyfikator „jest więcej A niż B"

Wyrażenie $Q_M x\, \alpha(x)\beta(x)$ czytamy: jest więcej x takich, że $\alpha(x)$ niż x takich, że $\beta(x)$.

Semantyka Q_M wyznaczona jest przez warunek:

$\mathfrak{A} \models Q_M x\, \alpha(x)\beta(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy moc zbioru $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha[a]\}$ jest większa od mocy zbioru $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \beta[a]\}$.

Oto niektóre własności L_{Q_M}:

Kwantyfikator „jest więcej A niż B"

- Standardowy model arytmetyki PA można scharakteryzować w L_{Q_M} z dokładnością do izomorfizmu.
- L_{Q_M} nie jest aksjomatyzowalna.
- W L_{Q_M} nie zachodzi: ani dolne ani górne twierdzenie Löwenheima-Skolema, ani twierdzenie o zwartości.
- Q_0 oraz Q_c są definiowalne w L_{Q_M}.
- L_{Q_M} jest logiką o znacznej „mocy wyrażania": można w niej sformułować np. zdanie, które ma model wtedy i tylko wtedy, gdy fałszywa jest uogólniona hipoteza kontinuum.

Kwantyfikator Henkina

Wyrażenie $Q_H(x, y, u, v)\alpha(x, y, u, v)$ jest skrótem dla formuły z następującym częściowo uporządkowanym prefiksem kwantyfikatorowym:

$$\begin{array}{l} \forall x \text{———} \exists y \\ \forall u \text{———} \exists v \end{array} \Bigg\rangle\ \alpha(x, y, u, v)$$

Semantyka dla tego kwantyfikatora wyznaczona jest przez warunek:
$\mathfrak{A} \models Q_H xyuv\, \alpha(x, y, u, v)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją funkcje f oraz g (określone na $dom(\mathfrak{A})$ i o wartościach w $dom(\mathfrak{A})$) takie, że
$\mathfrak{A} \models \alpha(x, f(x), u, g(u))$.

Oto niektóre własności L_{Q_H}:

Kwantyfikator Henkina

- Kwantyfikatory Q_0, Q_c oraz Q_M są definiowalne w L_{Q_H}.
- L_{Q_H} nie jest aksjomatyzowalna.
- W L_{Q_H} nie zachodzi twierdzenie o zwartości.
- W L_{Q_H} nie zachodzi ani dolne, ani górne twierdzenie Löwenheima-Skolema.

Widzimy więc, że również L_{Q_H} ma znaczną „moc wyrażania".

Kwantyfikator Szrejdera-Vilenkina

Wyrażenie $Q_m x\ \alpha(x)$ czytamy: obiekty x takie, że $\alpha(x)$ tworzą większość w uniwersum.
Aby podać rozsądną semantykę dla Q_m trzeba oczywiście nadać precyzyjne znaczenie terminowi „większość". Nie interesuje nas przy tym rozumienie tego terminu podane w pierwszej części prezentacji, tj. kwantyfikator ***most***, który miał prostą semantykę: ***most***AB wtedy i tylko wtedy, gdy moc zbioru $A \cap B$ jest większa od mocy zbioru $A - B$. Teraz chodzi o „większości" w całym uniwersum.

Są różne możliwości ustalenia semantyki dla takiego kwantyfikatora. Podamy jedną z nich, proponowaną przez Szrejdera i Vilenkina.
Niech X będzie zbiorem niepustym i niech $\mathfrak{B}(X)$ będzie algebrą Boole'a jego (niekoniecznie wszystkich) podzbiorów taką, że $X \in \mathfrak{B}(X)$.

Kwantyfikator Szrejdera-Vilenkina

Rodzinę $\mathbb{M}(X)$ elementów $\mathfrak{B}(X)$ nazywamy ***systemem większości***, jeśli:

- (1) $\mathbb{M}(X) \neq \emptyset$
- (2) jeśli $A \in \mathbb{M}(X)$ i $A \subseteq B$, to $B \in \mathbb{M}(X)$
- (3) jeśli $A \in \mathbb{M}(X)$, to dopełnienie A (w sensie algebry $\mathfrak{B}(X)$) nie należy do $\mathbb{M}(X)$.

Jeśli $\mathbb{M}(X)$ jest systemem większości w X, to układ $(X, \mathbb{M}(X))$ nazywamy ***przestrzenią z większością***. Jeśli $A \in \mathbb{M}(X)$, to A nazywamy ***większością*** w X.
Jeśli $\mathbb{M}(X)$ jest systemem większości w X, to oczywiście:

- $\emptyset \notin \mathbb{M}(X)$, $X \in \mathbb{M}(X)$
- jeśli $A \in \mathbb{M}(X)$ i $B \in \mathbb{M}(X)$, to $A \cap B \neq \emptyset$.

Kwantyfikator Szrejdera-Vilenkina

Przestrzenie z większością mogą być otrzymane np. wtedy, gdy na X jest zadana unormowana skończenie addytywna miara μ, dla której $\mathfrak{B}(X)$ jest rodziną zbiorów mierzalnych, a systemem większości jest podrodzina rodziny $\mathfrak{B}(X)$, której elementy mają miarę nie mniejszą od jakiegoś ustalonego progu $\tau \geqslant \frac{1}{2}$. Jednak istnieją też przestrzenie z większością, które nie mogą być przez taką miarę określone.
Pomijamy tu bardziej szczegółowy opis przestrzeni z większością. Dodajmy jedynie, że stanowią one prostą i dość adekwatną aparaturę pojęciową dla opisu np. systemów podejmowania decyzji (przez grupy ekspertów).

Przestrzenie z większością dostarczają semantyki dla ***kwantyfikatora większości*** Q_m:
$\mathfrak{A} \models Q_m x\, \alpha(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{a \in dom(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \alpha[a]\}$ jest większością w $dom(\mathfrak{A})$, dla pewnego systemu większości $\mathbb{M}(dom(\mathfrak{A}))$.

Kwantyfikator Szrejdera-Vilenkina

Kwantyfikator Q_m może być opisany aksjomatycznie:

- $\forall x\, \alpha(x) \rightarrow Q_m x\, \alpha(x)$
- $Q_m x\, \alpha(x) \rightarrow \neg Q_m x\, \neg\alpha(x)$
- $\forall x\, (\alpha(x) \rightarrow \beta(x)) \rightarrow (Q_m x\, \alpha(x) \rightarrow Q_m x\, \beta(x))$.

Można pokazać, że ta aksjomatyka jest trafna i pełna względem podanej wyżej semantyki dla Q_m.

Pierwszą pracą dotyczącą tego kwantyfikatora jest (o ile nam wiadomo): Vilenkin, N.Ya., Shreider, Yu.A. 1976. Majority spaces and „majority" quantifier. *Semiotics and Informatics.* The Eight Volume. VINITI, Moscow.

Moc wyrażania logiki

Używaliśmy dotąd w sposób nieformalny wyrażenia: „logika L_1 ma mniejszą moc wyrażania niż logika L_2". Można mu nadać precyzyjny sens (w terminach semantycznych):
$L_1 \preceq L_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zdania α logiki L_1 istnieje zdanie β logiki L_2 takie, że α i β mają dokładnie takie same modele. Jeśli $L_1 \preceq L_2$ oraz nie zachodzi $L_2 \preceq L_1$, to piszemy $L_1 \prec L_2$. Jeśli $L_1 \preceq L_2$ oraz $L_2 \preceq L_1$, to piszemy $L_1 \approx L_2$.

- Jeśli $L_1 \preceq L_2$, to mówimy, że L_1 ma moc wyrażania nie większą niż L_2.
- Jeśli $L_1 \prec L_2$, to mówimy, że L_1 ma moc wyrażania mniejszą niż L_2.
- Jeśli $L_1 \approx L_2$, to mówimy, że L_1 i L_2 są równoważne.

Moc wyrażania logiki

Niektóre z wymienionych wyżej logik są uporządkowane następująco pod względem mocy wyrażania (strzałka oznacza zachodzenie relacji $\prec$):

$$
\begin{tikzcd}
 & L_{Q_0} \arrow[r] & L_I \arrow[dr] & & \\
L_{\omega\omega} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & L_{Q_M} \arrow[r] & L_H \\
 & L_{Q_R} \arrow[r] & L_{Q_w} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

(tu O_I jest kwantyfikatorem Härtiga, a Q_w jest kwantyfikatorem **most**).

Jeśli ograniczamy się tylko do modeli skończonych, to $L_{Q_w} \approx L_M$.
Logika L_{Q_M} jest równoważna logice z kwantyfikatorami: Q_0 ***oraz*** Q_w.

Twierdzenia limitacyjne Lindströma

Ważne ustalenia dotyczące mocy wyrażania różnych logik podają twierdzenia Lindströma:

- Jeśli w logice L zachodzą: twierdzenie o zwartości oraz dolne twierdzenie Löwenheima-Skolema, to $L \approx L_{\omega\omega}$.
- Jeśli L dopuszcza relatywizację kwantyfikatorów, to:
  - Jeżeli w L zachodzą: twierdzenie o pełności oraz dolne twierdzenie Löwenheima-Skolema, to $L \approx L_{\omega\omega}$.
  - Jeżeli w L zachodzą: dolne oraz górne twierdzenie Löwenheima-Skolema, to $L \approx L_{\omega\omega}$.

Twierdzenia limitacyjne Lindströma

Przypominamy, że:

- Jeśli Q jest kwantyfikatorem typu $\langle k_1, \ldots, k_n \rangle$ na zbiorze X, to ***relatywizacją*** Q jest kwantyfikator Q^r typu $\langle 1, k_1, \ldots, k_n \rangle$ zdefiniowany następująco:
  $(Y, A_1, \ldots, A_n) \in Q^r_X \;\Leftrightarrow\; (Y^{k_1} \cap A_1, \ldots, Y^{k_n} \cap A_n \in Q_Y)$.
- Logika L ***dopuszcza relatywizację*** (kwantyfikatora Q), gdy $L_Q \preceq L$.

Waga twierdzeń Lindströma polega m.in. na tym, że pokazują one, iż zwartość, pełność oraz nieodróżnianie mocy nieskończonych są cechami wyróżniającymi klasycznej logiki pierwszego rzędu. Twierdzenia Lindströma przywoływane są często przez zwolenników Tezy Pierwszego Rzędu (***First Order Logic is the Logic.***) na rzecz uzasadnienia tej tezy.

Logiki infinitarne

Gdy mówimy o logice, że jest infinitarna, to możemy mieć na myśli np. to, że:

- rozważany język dopuszcza formuły nieskończenie długie;
- dopuszcza się nieskończenie długie dowody;
- stosuje się niefinitarne reguły wnioskowania (np. ω-regułę).

Oczywiście, logiki takie mają znaczną moc wyrażania, np.:

- W $L_{\omega_1\omega}$ scharakteryzować można model standardowy arytmetyki Peana.
- W $L_{\omega_1\omega}$ scharakteryzować można klasę wszystkich zbiorów skończonych.

Logiki infinitarne

- Teoria uporządkowanych ciał archimedesowych jest w $L_{\omega_1\omega}$ skończenie aksjomatyzowalna.
- Predykat prawdziwości formuł języka o przeliczalnej liczbie symboli jest definiowalny w $L_{\omega_1\omega}$.
- Pojęcie dobrego porządku nie jest definiowalne w $L_{\omega_1\omega}$, jest natomiast definiowalne (pojedynczą formułą) w $L_{\omega_1\omega_1}$.
- W $L_{\omega_1\omega}$ dowolną przeliczalną strukturę z przeliczalną liczbą relacji można scharakteryzować z dokładnością do izomorfizmu (Twierdzenie Scotta).
- Własności semantyczne modeli dla logik $L_{\alpha\omega}$ i $L_{\infty\omega}$ (np. elementarną równoważność) można charakteryzować metodami algebraicznymi (twierdzenie Karp o częściowych izomorfizmach).

Logiki infinitarne

- Dolne twierdzenie Löwenheima-Skolema ma swój odpowiednik w $L_{\omega_1\omega}$ oraz właściwie we wszystkich logikach infinitarnych. Natomiast górne twierdzenie Löwenheima-Skolema-Tarskiego w swojej zwykłej formie nie zachodzi w tych logikach; dokonuje się jednak podobnych do niego ustaleń, wykorzystując tzw. liczby Hanfa.
- W $L_{\omega_1\omega}$ zachodzi twierdzenie o pełności, gdy na infinitarną regułę wnioskowania pozwalającą wywnioskować koniunkcję $\bigwedge \Phi$ ze zbioru przesłanek Φ narzucimy warunek, aby Φ był przeliczalny.
- Ani w $L_{\omega_1\omega}$, ani w żadnej z logik $L_{\alpha\beta}$, gdzie $\alpha \geqslant \aleph_1$, nie zachodzi twierdzenie o zwartości. Rozważano jednak stosowne modyfikacje tego twierdzenia i wykazano, iż zachodzenie tych uogólnionych wersji twierdzenia o zwartości powiązane jest z istnieniem dużych liczb kardynalnych.

Logiki infinitarne

Formuły logiki pierwszego rzędu $L_{\omega\omega}$ kodować można liczbami naturalnymi lub, co na jedno wychodzi, zbiorami dziedzicznie skończonymi, tj. elementami zbioru $H(\omega)$. Z kolei, formuły logiki $L_{\omega_1\omega}$ kodować można elementami zbioru $H(\omega_1)$, tj. zbiorami dziedzicznie przeliczalnymi. Także dowody w $L_{\omega_1\omega}$ kodować można elementami $H(\omega_1)$.

Dowody w logice $L_{\omega_1\omega}$ mają długość przeliczalną. Można jednak podać przykład zbioru zdań Γ oraz zdania σ z tego języka takich, że $\Gamma \models \sigma$, ale nie istnieje dowód σ z Γ w $L_{\omega_1\omega}$ (zob. np. Bell 2004).

Logiki infinitarne

Zbiór $H(\omega_1)$ jest domknięty na tworzenie przeliczalnych podzbiorów oraz ciągów. Jednak fakt wspomniany w poprzednim akapicie wskazuje iż, mówiąc w uproszczeniu, $H(\omega_1)$ nie jest domknięty ze względu na operację odpowiadającą kodowaniu dowodów z dowolnych Σ_1 na $H(\omega_1)$ zbiorów formuł.

Naturalne jest w tej sytuacji poszukiwanie takich zbiorów A zastępujących $H(\omega_1)$, które byłyby domknięte na operacje odpowiadające kodowaniom dowodów w A oraz rozważanie tylko takich formuł, które mają kody w A. Była to jedna z motywacji do rozpatrywania tzw. dopuszczalnych fragmentów L_A logiki $L_{\omega_1\omega}$.

Logiki infinitarne

Barwise odkrył, że istnieją przeliczalne zbiory (*admissible sets*) $A \subseteq H(\omega_1)$, które spełniają powyższe warunki. Są to więc takie uogólnienia zbiorów dziedzicznie skończonych, na których (jako na zbiorach kodów formuł) możliwe i sensowne jest uprawianie (uogólnionej) teorii rekursji oraz teorii dowodu. Udowodnił także swoje znamienite twierdzenie o zwartości: jeśli A jest przeliczalnym zbiorem dopuszczalnym, to każdy zbiór formuł języka L_A będący Σ_1 na A, którego każdy podzbiór (będący jednocześnie elementem A) ma model, sam również ma model.

Twierdzenie Barwise'a ma mnogie zastosowania, m.in. pozwala np. udowodnić, że każdy przeliczalny przechodni model dla ZFC ma właściwe rozszerzenie końcowe. Prace Barwise'a to swego rodzaju unifikacja rozważań w teorii modeli, teorii rekursji oraz teorii mnogości.

Logiki infinitarne

Szczególnie przydatna dla badań zbiorów dopuszczalnych okazała się wersja teorii mnogości KP zaproponowana przez Kripke'go i Platka w połowie lat sześćdziesiątych XX wieku. Jest ona teorią elementarną, ze stałą pozalogiczną $\in$, będącą pewnym osłabieniem teorii mnogości Zermelo-Fraenkla. Nie ma w niej aksjomatu zbioru potęgowego, a szczególną rolę pełnią schematy aksjomatów Δ_0-*separation* oraz Δ_0-*collection* (odpowiedniki schematów aksjomatów wyróżniania i zastępowania), w których występują formuły klasy Δ_0. Zbiory przechodnie A takie, że $(A, \in)$ jest modelem KP nazywane są *zbiorami dopuszczalnymi* (*admissible sets*). Rozważa się także teorię KPU, czyli teorię KP z atomami.

Kompletny wykład teorii zbiorów dopuszczalnych znaleźć można np. w klasycznej monografii Barwise 1975. Przystępne i zwięzłe omówienie (współczesnego stanu) tej teorii znajdujemy np. w Keisler, Knight 2004.

Wykorzystywana literatura

- Barwise, J. 1975. *Admissible Sets and Structures. An Approach to Definability Theory*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- Barwise, J. 1979. On branching quantifiers in English. *Journal of Philosophical Logic* **8**, 47–80.
- Barwise, J. Cooper, R. 1981. Generalized quantifiers and natural language. *Linguistics and Philosophy* **4**, 159–219.
- Barwise, J., Feferman, S. 1985. *Model Theoretic Logics.* Springer.
- Bell, J.L. 2004. Infinitary Logic. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
- van Benthem, J. 1984. Questions about quantifiers. *Journal of Symbolic Logic.* **49**, 443–466.
- van Benthem, J. 1986. *Essays in logical semantics.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- van Benthem, J. 1995. Quantifiers and Inference. W: Krynicki, Mostowski, Szczerba (eds.) *Quantifiers: logics, models and computation.*, 1–20.

Wykorzystywana literatura

- van Benthem, J., ter Meulen, A. (eds.) 1984. *Generalized quantifiers in natural language.* Foris Publications, Dordrecht.
- van Eijck, J. 1984. Generalized quantifiers and traditional logic. W: van Benthem, J., ter Meulen, A. (eds.) *Generalized quantifiers in natural language.*, 1–19.
- Gärdenfors, P. (ed.) 1987. *Generalized quantifiers: Linguistic and logical approaches.* Reidel, Dordrecht.
- Henkin, L. 1961. Some remarks on infinitely long formulas. *Infinitistic Methods*, Pergamon Press, Qxford, 167–183.
- Keenan, E.L., Stavi, J. 1986. A semantic characterization of natural language determiners. *Linguistics and Philosophy* **9**, 253–326.
- Keisler, H.J., Knight, J.L. 2004. Barwise: infinitary logic and admissible sets. *The Bulletin of Symbolic Logic* Volume **10**, Number **1**, 4–36.

Wykorzystywana literatura

- Krynicki, M., Mostowski, M., Szczerba, L.W. (eds.) 1995. *Quantifiers: logics, models and computation.* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht Boston London.
- Lindström, P. 1969. On Extensions of Elementary Logic. *Theoria*, , 1–11.
- Mostowski, A. 1957. On generalization of quantifiers. *Fundamenta Mathematicae* **44**, 12–36.
- Shapiro, S. (ed.) 1996. *The limits of logic: higher-order logic and the Löwenheim-Skolem theorem.* Dartmouth Publishing Company, Aldershot.
- Tarski, A. 1986. What are logical notions? *History and Philosophy of Logic*, **7**, 143–154.
- Väänänen, J. 2004. Barwise: abstract model theory and generalized quantifiers. *The Bulletin of Symbolic Logic* Volume **10**, Number **1**, 37–53.
- Westerståhl, D. 1989. Quantifiers in formal and natural languages. *Handbook of Philosophucal Logic.* Vol. **IV**, 1–131.

Summer School 1974, Oulu

Z konferencji w Oulu (Finlandia), 1974.

Summer School 1974, Oulu

Przy pierwszym stole siedzą (clockwise): J.A. Makovsky, Per Lindström, Dag Westerståhl, Michał Krynicki, jp.

Kwantyfikatory sylogistyki klasycznej

W pierwszej części niniejszej prezentacji pokazano, że kwantyfikatory z TKL są pod wieloma względami wyróżnione: np. są jedynymi kwantyfikatorami podwójnie monotonicznymi, jedynymi kwantyfikatorami o ustalonych zestawach własności (gdy kwantyfikator traktujemy jako relację między podzbiorami uniwersum).

Powstaje naturalne pytanie: czy aparatura pojęciowa związana z uogólnionymi kwantyfikatorami pozwala w prosty sposób charakteryzować rozumowania przeprowadzane w klasycznej sylogistyce?

Podamy kilka przykładów (za van Eijck 1984) dotyczących praw TKL oraz teorii sylogizmów.

Trzy operacje

Zakładamy CONS, QUANT i EXT. W tych przypadkach, gdy kwantyfikatory definiowane są przez drzewa numeryczne zakładamy też FIN. Definiowanie przez drzewa numeryczne rozumiemy tu jako równoważność: $QAB \equiv R_Q(|A - B|, |A \cap B|)$ dla pewnej relacji R_Q określonej dla liczb. Dla kwantyfikatora Q (zdefiniowanego przez R_Q) określamy:

- $\tilde{Q}AB \equiv QA(A - B)$, ***co-quantifier***.
- $\hat{Q}AB \equiv \neg QAB$, ***opposite***.
- $\check{Q}AB \equiv \neg QA(A - B)$, ***dual***.

Operacja $\tilde{Q}$ to negacja wewnętrzna, operacja $\hat{Q}$ to negacja zewnętrzna, a $\check{Q}$ to kwantyfikator dualny (w terminologii z pierwszej części prezentacji).

Trzy operacje

Mamy wtedy:

- $R_Q \equiv R(m,n)$
- $R_{\tilde{Q}}(m,n) \equiv R(n,m)$
- $R_{\hat{Q}}(m,n) \equiv \neg R(m,n)$
- $R_{\check{Q}}(m,n) \equiv \neg R(n,m)$.

Te trzy operacje tworzą (wraz z operacją identyczności) czteroelementową grupę Kleina.

Założeniu ***existential import*** odpowiada warunek:
EXIMP: $(QAB \vee \neg QAB) \equiv A \neq \emptyset$.

Niektóre prawa TKL

Przypomnijmy niektóre prawa TKL:

S_1	$\tilde{Q}AB \equiv \tilde{Q}BA$	konwersja prosta
S_2	$\check{Q}AB \equiv \check{Q}BA$	konwersja prosta
S_3	$QAB \Rightarrow Q(C-B)(C-A)$	konwersja przez kontrapozycję
S_4	$QAB \Rightarrow Q(C-B)(C-A)$	konwersja przez kontrapozycję
S_5	$\neg(QAB \wedge \tilde{Q}AB)$	wykluczanie
S_6	$\neg(\neg\check{Q}AB \wedge \neg\hat{Q}AB)$	dopełnianie
S_7	$QAB \Rightarrow \check{Q}AB$	implikacja
S_8	$\tilde{Q}AB \Rightarrow \hat{Q}AB$	implikacja
S_9	$QAB \Rightarrow \check{Q}BA$	konwersja *per accidens*
S_{10}	$\tilde{Q}AB \Rightarrow \hat{Q}BA$	konwersja *per accidens*.

W S_3: dla dowolnego C, w S_4: dla C takiego, że $A \subsetneq C$.
Zauważmy, że S_2 implikuje S_1, ponieważ: $\check{Q}AB \equiv \neg\tilde{Q}AB$.

Niektóre prawa TKL

Warunek ***kosymetrii*** ma postać:
COSYM: $QA(A - B) \Rightarrow QB(B - A)$.
Warunek ten głosi zatem, że $\tilde{Q}$ jest symetryczny.

Q spełnia COSYM wtedy i tylko wtedy, gdy Q można wyrazić jako alternatywę (być może nieskończoną) zdań postaci: *dokładnie k elementów A nie jest elementami B*.

Warunek ***kontrapozycji*** (odpowiadający S_3) ma postać:
CONTRAPOS: $QAB \Rightarrow Q(C - B)(C - A)$.
Warunek CONTRAPOS implikuje warunek COSYM.

Q spełnia CONTRAPOS wtedy i tylko wtedy, gdy Q jest postaci *najwyżej k elementów A nie jest elementami B*.

Niektóre prawa TKL

Prawu S_7 odpowiada warunek:
SUBALT: $QAB \Rightarrow \neg QA(A - B)$.

Prawa S_5, S_6 i S_8 redukują się do S_7:

$$QAB \equiv \neg QA(A - B) \equiv \neg \tilde{Q}AB$$
$$\neg \check{Q}AB \equiv QA(A - B) \equiv \neg QAB \equiv \hat{Q}AB$$
$$\tilde{Q}AB \equiv \neg \check{Q}AB \Rightarrow \neg QAB \equiv \hat{Q}AB.$$

Przy założeniach $Q \neq \emptyset$, FIN oraz EXIMP jedynym kwantyfikatorem o własnościach COSYM i SUBALT jest **all**.

Niektóre prawa TKL

Prawu S_9 odpowiada warunek:
ACCIDENS: $QAB \Rightarrow QB(B - A)$.

S_{10} otrzymujemy z S_9 przez kontrapozycję oraz równoważności:
$\tilde{Q}AB \equiv \neg\check{Q}AB$ i $\hat{Q}BA \equiv \neg QBA$.

Warunek ACCIDENS implikuje SUBALT.
Warunki COSYM i SUBALT implikują ACCIDENS.

Przy założeniu EXIMP jedynymi kwantyfikatorami spełniającymi ACCIDENS i VARIETY są **no** oraz **all**.

Sylogistyka

Wszystkie poprawne tryby sylogistyczne otrzymać można z trybu ***Barbara*** poprzez użycie warunków CONSERV, COSYM oraz SUBALT.

Pamiętamy, że reguły „filologiczne" poprawności trybów sylogistycznych mówią (oprócz *jakości* oraz *ilości*) o ***rozłożeniu*** terminów („braniu terminów w całym zakresie"). To ostatnie pojęcie znajduje prostą eksplikację w warunkach ***monotoniczności*** dla kwantyfikatorów.

Powiemy, że Q ma własność **lewej dolnej prawie-monotoniczności**, gdy spełniony jest warunek:
$\downdownarrows$MON: $QAB \wedge A' \neq \emptyset \wedge A' \subseteq A \Rightarrow QA'B$.
Powiemy, że Q ma własność **lewej górnej prawie-monotoniczności**, gdy spełniony jest warunek:
$\upuparrows$MON: $QAB \wedge A \neq \emptyset \wedge A \subseteq A' \Rightarrow QA'B$.

Sylogistyka

Podobnie określamy warunki: MON$\downdownarrows$ oraz MON$\upuparrows$ oraz podwójnej prawie-monotoniczności: $\upuparrows$MON$\downdownarrows$, itd.

Kwantyfikatory TKL spełniają warunki podwójnej prawie-monotoniczności:

- ***all*** jest $\downdownarrows$MON$\upuparrows$
- ***no*** jest $\downdownarrows$MON$\downdownarrows$
- ***some*** jest $\upuparrows$MON$\upuparrows$
- ***not all*** jest $\upuparrows$MON$\downdownarrows$.

Sylogistyka

Przy pomocy tych pojęć można ***zdefiniować*** pojęcie rozłożenia terminów:

- A jest ***rozłożony w*** QAB wtedy i tylko wtedy, gdy Q jest $\downarrow\downarrow$MON;
- B jest ***rozłożony w*** QAB wtedy i tylko wtedy, gdy Q jest MON$\downarrow\downarrow$.

Przy takim rozumieniu rozłożenia terminów warunki poprawności trybów sylogistycznych zachowują swoją ważność.

Koniec

To było tylko pobieżne przedstawienie problematyki związanej z uogólnionymi kwantyfikatorami.

Zainteresowanych tą problematyką odsyłamy do zamieszczonej literatury przedmiotu.