Tablice Analityczne dla KRP (2)

Językoznawstwo i Nauki o Informacji I

1 Tablice analityczne dla KRP z symbolami funkcyjnymi

Reguły przedłużania gałęzi tablic analitycznych dla KRP zostały podane – zauważ, że sformułowano je dla dowolnych *termów bazowych* (a nie tylko dla stałych indywidualnych). Tutaj ograniczymy się do prostych przykładów (arytmetycznych), osoby zainteresowane poważniejszą problematyką zechcą przeczytać prezentację *Unifikacja i rezolucja w KRP*.

2 Przykłady arytmetyczne

Rozważymy dwa przykłady teorii pierwszego rzędu (z identycznością $=$), dotyczące arytmetyki liczb naturalnych. Pojęciami pierwotnymi obu tych teorii są:

1. σ – jednoargumentowy symbol funkcyjny; wyrażenie $\sigma(t)$, gdzie t jest dowolnym termem, czytamy: *następnik* t;
2. $\oplus$ – dwuargumentowy symbol funkcyjny; wyrażenie $\oplus(t_1, t_2)$, gdzie t_1, t_2 są dowolnymi termami, czytamy: *suma* t_1 i t_2;
3. $\otimes$ – dwuargumentowy symbol funkcyjny; wyrażenie $\otimes(t_1, t_2)$, gdzie t_1, t_2 są dowolnymi termami, czytamy: *iloczyn* t_1 i t_2;
4. $\bigcirc$ – stała indywidualna, czytamy: *zero*.

Aksjomatami wspólnymi dla obu rozważanych teorii są *aksjomaty identyczności* $=$:

$$\begin{array}{ll}
\forall x\ (x = x) & \forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \oplus(x,z) = \oplus(y,z)) \\
\forall x \forall y\ (x = y \rightarrow y = x) & \forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \oplus(z,x) = \oplus(z,y)) \\
\forall x \forall y \forall z\ ((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z) & \forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \otimes(x,z) = \otimes(y,z)) \\
\forall x \forall y\ (x = y \rightarrow \sigma(x) = \sigma(y)) & \forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \otimes(z,x) = \otimes(z,y))
\end{array}$$

2.1 Arytmetyka Robinsona

Aksjomaty specyficzne systemu Arytmetyki Robinsona:

A_1: $\forall x \forall y\ (\neg\ x = y \rightarrow \neg\ \sigma(x) = \sigma(y))$

A_2: $\forall x\ \neg\ (\bigcirc = \sigma(x))$

A_3: $\forall x\ (\neg\ x = \bigcirc \rightarrow \exists y\ (x = \sigma(y)))$

A_4: $\forall x\ (\oplus(x, \bigcirc) = x)$

A_5: $\forall x \forall y\ (\oplus(x, \sigma(y)) = \sigma(\oplus(x,y)))$

A_6: $\forall x\ (\otimes(x, \bigcirc) = \bigcirc)$

A_7: $\forall x \forall y\ (\otimes(x, \sigma(y)) = \oplus(\otimes(x,y), x))$.

2.2 Arytmetyka Peana

Aksjomaty specyficzne systemu Arytmetyki Peana:

P_1: $\forall x \forall y\ (\neg\ x = y \rightarrow \neg\ \sigma(x) = \sigma(y))$

P_2: $\forall x\ \neg\ (\bigcirc = \sigma(x))$

P_3: $\forall x\ (\oplus(x, \bigcirc) = x)$

P_4: $\forall x \forall y\ (\oplus(x, \sigma(y)) = \sigma(\oplus(x,y)))$

P_5: $\forall x\ (\otimes(x, \bigcirc) = \bigcirc)$

P_6: $\forall x \forall y\ (\otimes(x, \sigma(y)) = \oplus(\otimes(x,y), x))$

P_7: $(A(\bigcirc) \wedge \forall x\ (A(x) \rightarrow A(\sigma(x)))) \rightarrow \forall x\ A(x)$

(dla dowolnej formuły A, o jednej zmiennej wolnej, języka Arytmetyki Peana). Schemat P_7 nazywamy *zasadą indukcji*.

2.3 Dowód, że dwa plus dwa równe jest cztery

W Arytmetyce Robinsona udowodnić można, że $2 + 2 = 4$:

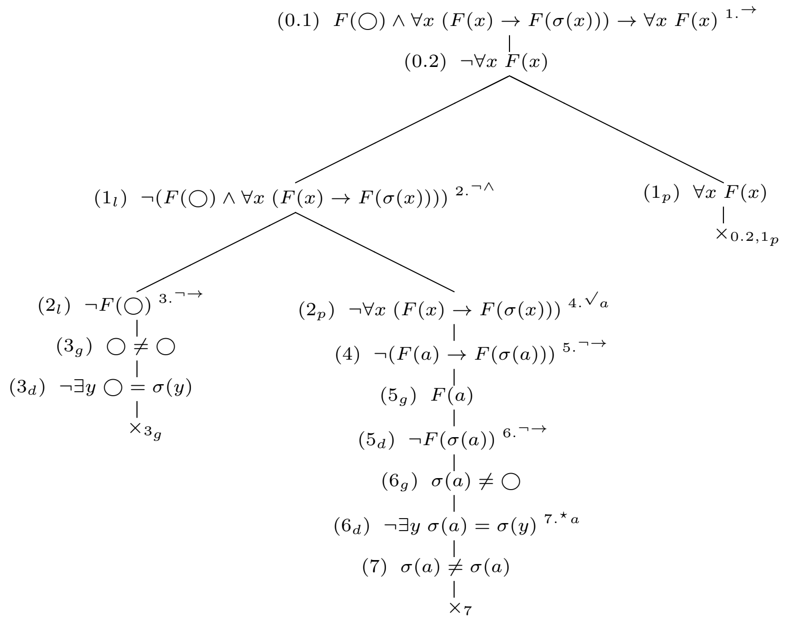
1.	$\forall x \ \oplus(x, \bigcirc) = x$	aksjomat A_4
2.	$\forall x \forall y \ \oplus(x, \sigma(y)) = \sigma(\oplus(x, y))$	aksjomat A_5
3.	$\neg(\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\sigma(\bigcirc))) = \sigma(\sigma(\sigma(\sigma(\bigcirc)))))$	założenie dowodu nie wprost
4.	$\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \bigcirc) = \sigma(\sigma(\bigcirc))$	reguła $R(\forall)$ dla termu $\sigma(\sigma(\bigcirc))$ w A_4
5.	$\forall y \ \oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(y)) = \sigma(\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), y))$	reguła $R(\forall)$ dla termu $\sigma(\sigma(\bigcirc))$ w A_5
6.	$\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \bigcirc))$	reguła $R(\forall)$ dla termu $\bigcirc$ w 5.
7.	$\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\sigma(\bigcirc))) = \sigma(\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\bigcirc)))$	reguła $R(\forall)$ dla termu $\sigma(\bigcirc)$ w 5.
8.	$\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\sigma(\bigcirc))) = \sigma(\sigma(\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \bigcirc)))$	6. i 7., reguły dla identyczności
9.	$\oplus(\sigma(\sigma(\bigcirc)), \sigma(\sigma(\bigcirc))) = \sigma(\sigma(\sigma(\sigma(\bigcirc))))$	4. i 8., reguły dla identyczności
10.	$\times_{3,9}$	SPRZECZNOŚĆ: $3, 9$.

2.4 Wykorzystanie zasady indukcji w Arytmetyce Peana

Pokażemy, jak z zasady indukcji wywieść aksjomat A_3 Arytmetyki Robinsona. Zwyczajowo, $x \neq y$ jest skrótem dla $\neg x = y$. Niech $F(x)$ będzie formułą: $x \neq \bigcirc \rightarrow \exists y \ (x = \sigma(y))$. Schemat indukcji zastosowany do formuły $F(x)$ ma postać:

$$(F(\bigcirc) \wedge \forall x \ (F(x) \rightarrow F(\sigma(x)))) \rightarrow \forall x \ F(x).$$

Chcemy zatem pokazać, że z tej ostatniej formuły wynika (tablicowo) formuła $\forall x \ F(x)$:



W krokach 3 i 6 pamiętać należy, jaką postać ma formuła F.

2.5 Uwagi o Arytmetyce Peana

Model zamierzony Arytmetyki Peana stanowią liczby naturalne wraz z operacjami: następnika, dodawania i mnożenia oraz elementem wyróżnionym (zero). Arytmetyka Peana (pierwszego rzędu) jest teorią niezupełną i nierozstrzygalną. Istnieją więc w jej języku zdania ψ takie, że ani ψ ani $\neg\psi$ nie ma dowodu w rozważanej teorii. Istnieją zatem w tym przypadku zdania prawdziwe (w modelu zamierzonym), które nie są dowodliwe. Ponadto, w samej Arytmetyce Peana nie można udowodnić, że jest to teoria niesprzeczna.

3 Zadanie domowe

1. Przeczytaj prezentację *Tablice analityczne dla KRP* (2).

2. Pisemnie (termin: 4 czerwca 2014, godz. 15:20). Opracuj samodzielnie temat: *Algebry Boole'a*. Opracowanie powinno zawierać: aksjomatyczną charakterystykę tych algebr, wybrane ważne prawa, kilka przykładów algebr Boole'a.