Metalogika (12)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Uniwersytet Opolski

Plan wykładu

Dwa kolejne wykłady poświęcamy ***teorii modeli***.

- Zakładamy, że słuchacze pamiętają podstawowe definicje dotyczące semantyki Klasycznego Rachunku Predykatów. Informacje na ten temat podano np. w:
  http://www.logic.amu.edu.pl/images/e/e9/Metalogikaopoledrobinka.pdf
  http://www.logic.amu.edu.pl/images/8/8d/Semkrp.pdf
- W obu dzisiejszych prezentacjach ograniczamy się do niektórych podstawowych konstrukcji oraz twierdzeń teorii modeli (dla wybranych twierdzeń podajemy dowody).
- Pełny tekst, wraz z dowodami wszystkich twierdzeń oraz przykładami zawiera przygotowywany podręcznik ***Wstęp do teorii modeli***.

Uwaga: to tylko wprowadzenie do Elementarza

- Nie jesteśmy tak zarozumiali i bezczelni, aby twierdzić, iż ta i następna prezentacja stanowi wystarczające wprowadzenie w problematykę teorii modeli. Staramy się jedynie przybliżyć słuchaczom niektóre wybrane pojęcia i twierdzenia tej teorii.
- Nadto, ponieważ wykłady przeznaczone są dla filozofów, unikamy epatowania skomplikowanymi przykładami matematycznymi. Prezentacja na tym oczywiście traci, ale sądzimy, iż wystarczająco realizuje zamierzony cel dydaktyczny.

Czytelnik poważnie zainteresowany teorią modeli zechce zajrzeć choćby do prac wymienionych na końcu prezentacji. Za szczególnie godne polecenia uważamy następujące monografie:

- ***klasyczna teoria modeli***: Hodges 1993, Chang, Keisler 1973;
- ***współczesna teoria modeli***: Marcja, Toffalori 2003, Marker 2002.

Twierdzenie o istnieniu modelu

Twierdzenie o Istnieniu Modelu.

- *Zbiór zdań T jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy ma model.*

- Dla dowolnego zbioru T zdań języka L i dowolnego zbioru C stałych indywidualnych, mówimy, że C jest zbiorem *świadków dla T w L*, jeśli dla każdej formuły ψ z L o jednej zmiennej wolnej istnieje stała $c \in C$ taka, że:

$$T \vdash \exists x\, \psi(x) \rightarrow \psi(c).$$

- Mówimy, że T ma *świadków w L*, gdy istnieje zbiór świadków dla T w języku L.

Twierdzenie o istnieniu modelu

Zauważmy, że możemy zakładać, iż rozważany zbiór T jest maksymalnym zbiorem niesprzecznym, ponieważ:

- Jeśli zbiór zdań T ma zbiór świadków C w języku L, to C jest też zbiorem świadków dla każdego rozszerzenia T.
- Jeśli rozszerzenie zbioru T ma model $\mathfrak{A}$, to $\mathfrak{A}$ jest również modelem dla T.

Dowód Twierdzenia o Istnieniu Modelu poprzedzimy dowodami trzech lematów.

Twierdzenie o istnieniu modelu

- **Lemat A.** Niech T będzie niesprzecznym zbiorem zdań z L. Niech C będzie zbiorem nowych stałych, o mocy równej mocy języka L. Niech $\overline{L} = L \cup C$ będzie rozszerzeniem języka L o stałe z C. Wtedy T można rozszerzyć do niesprzecznego zbioru $\overline{T}$ w $\overline{L}$, który ma C jako zbiór świadków w $\overline{L}$.
- **Lemat B.** Niech T będzie niesprzecznym zbiorem zdań, a C zbiorem świadków dla T w L. Wtedy T ma model $\mathfrak{A}$ taki, że każdy element $dom(\mathfrak{A})$ jest interpretacją jakiejś stałej $c \in C$.
- **Lemat C.** Niech C będzie zbiorem stałych języka L, a T zbiorem zdań z L. Jeśli T ma model $\mathfrak{A}$ taki, że każdy element $dom(\mathfrak{A})$ jest interpretacją jakiejś stałej $c \in C$, to T można rozszerzyć do teorii niesprzecznej $\overline{T}$ w L, dla której C jest zbiorem świadków.

Dowód Lematu A.

Oznaczmy moc języka L poprzez α. Dla każdej $\beta < \alpha$ niech c_β będzie nową stałą, nie występującą w L. Zakładamy przy tym, że c_β jest różna od c_γ, o ile $\beta < \gamma < \alpha$. Niech $C = \{c_\beta : \beta < \alpha\}$ oraz $\overline{L} = L \cup C$. Wtedy moc języka $\overline{L}$ także jest równa α. Możemy zatem ustawić wszystkie formuły języka $\overline{L}$ z jedną zmienną wolną w ciąg $(\psi_\beta)_{\beta<\alpha}$. Z kolei, zdefiniujemy (wstępujący, liniowo uporządkowany przez inkluzję) ciąg $(T_\beta)_{\beta<\alpha}$ zbiorów zdań języka $\overline{L}$ oraz ciąg $(d_\beta)_{\beta<\alpha}$ stałych z C takie, że:

- (1) Każdy zbiór T_β, gdzie $\beta < \alpha$, jest niesprzeczny w $\overline{L}$.
- (2) Jeśli $\beta = \gamma + 1$, to $T_\beta = T_\gamma \cup \{\exists x_\gamma\ \psi_\gamma(x_\gamma) \rightarrow \psi_\gamma(d_\gamma)\}$, gdzie zmienną wolną formuły ψ_γ jest co najwyżej x_γ, a jeśli ψ_γ nie ma zmiennych wolnych, to za x_γ przyjmujemy x_0.
- (3) Jeśli β jest liczbą porządkową graniczną różną od 0, to $T_\beta = \bigcup\limits_{\gamma<\beta} T_\gamma$.

Dowód Lematu A.

Mamy zatem: $T = T_0 \subseteq T_1 \subseteq \ldots \subseteq T_\beta \subseteq \ldots$ dla wszystkich $\beta < \alpha$. Posługiwanie się symbolami β, α, itd. czasem jako liczbami porządkowymi, a czasem jako liczbami kardynalnymi nie powinno prowadzić do nieporozumień; z kontekstu jasno wynika, o które rozumienie chodzi w danym przypadku.

Ciąg $(T_\beta)_{\beta<\alpha}$ budujemy w sposób następujący. Przypuśćmy, że T_γ został już zdefiniowany. Trzeba zdefiniować $T_{\gamma+1}$. Zauważmy, że liczba zdań w T_γ, które nie są zdaniami języka L jest mniejsza od α. Ponadto, każde takie zdanie zawiera co najwyżej skończoną liczbę stałych ze zbioru C. Możemy zatem ustalić, że d_γ jest pierwszym elementem C, który dotąd nie wystąpił w formułach zbioru T_γ.

Dowód Lematu A.

Trzeba pokazać, że: $T_{\gamma+1} = T_\gamma \cup \{\exists x_\gamma\, \psi_\gamma(x_\gamma) \to \psi_\gamma(d_\gamma)\}$ jest zbiorem niesprzecznym.
Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że tak nie jest. Wtedy mielibyśmy: $T_\gamma \vdash \neg(\exists x_\gamma\, \psi_\gamma(x_\gamma) \to \psi_\gamma(d_\gamma))$.
To z kolei jest równoważne temu, iż: $T_\gamma \vdash \exists x_\gamma\, \psi_\gamma(x_\gamma) \wedge \neg\psi_\gamma(d_\gamma)$.
Ponieważ stała d_γ nie występuje w formułach z T_γ, więc otrzymujemy stąd kolejno (na mocy praw KRP):

- $T_\gamma \vdash \forall x_\gamma\, (\exists x_\gamma\, \psi_\gamma(x_\gamma) \wedge \neg\psi_\gamma(x_\gamma))$
- $T_\gamma \vdash \exists x_\gamma\, \psi_\gamma(x_\gamma) \wedge \neg\exists x_\gamma\, \psi_\gamma(x_\gamma)$.

To jednak jest sprzeczne z założoną niesprzecznością zbioru T_γ.
Przypuszczenie dowodu nie wprost musimy zatem odrzucić; zbiór $T_{\gamma+1}$ jest więc niesprzeczny.

Dowód Lematu A.

Z kolei, jeśli β jest liczbą porządkową graniczną różną od 0 oraz każdy element wstępującego łańcucha $(T_\gamma)_{\gamma<\beta}$ jest niesprzeczny, to (na mocy finitystyczności operacji konsekwencji w KRP) suma $T_\beta = \bigcup\limits_{\gamma<\beta} T_\gamma$ tego łańcucha także jest zbiorem niesprzecznym.

Definiujemy teraz $\overline{T} = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} T_\beta$. Wtedy $T \subseteq \overline{T}$ oraz zbiór $\overline{T}$ jest niesprzeczny w $\overline{L}$.
Przypuśćmy, że ψ jest formułą języka $\overline{L}$, w której co najwyżej x występuje jako zmienna wolna. Możemy wtedy założyć, że ψ jest identyczna z ψ_β, a x jest zmienną x_β dla pewnej $\beta < \alpha$. A zatem zdanie:
$\exists x_\beta\ \psi_\beta(x_\beta) \rightarrow \psi_\beta(d_\beta)$ należy do $T_{\beta+1}$, a więc należy również do $\overline{T}$.

Dowód Lematu B.

Będziemy budować model $\mathfrak{A}$ dla T ze zbioru (klas równoważności) stałych z C, podając odpowiednie interpretacje dla stałych, predykatów oraz symboli funkcyjnych. Możemy założyć, iż T jest maksymalnym zbiorem niesprzecznym w L, ponieważ:

- Jeśli T ma zbiór świadków C w L, to C jest także zbiorem świadków dla każdego rozszerzenia T.
- Jeśli jakieś rozszerzenie zbioru T ma model $\mathfrak{A}$, to $\mathfrak{A}$ jest także modelem dla T.

Definiujemy relację $\sim$ na zbiorze C:

- $c \sim d$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c \doteq d$ należy do T (czyli gdy $T \vdash c \doteq d$).

Uwaga. Symbol $\doteq$ to predykat identyczności w języku przedmiotowym L, a $=$ to relacja identyczności w metajęzyku.

Dowód Lematu B.

Relacja $\sim$ jest równoważnością na zbiorze C, co łatwo sprawdzić (wykorzystując przy tym fakt, że T jest maksymalnym zbiorem niesprzecznym).
Niech A będzie zbiorem wszystkich klas równoważności tej relacji, tj. $A = \{[c]_\sim : c \in C\}$. Zbiór A będzie stanowił uniwersum $dom(\mathfrak{A})$ budowanego modelu $\mathfrak{A}$.

Jeśli P jest n-argumentowym predykatem w L, to jego interpretacja $P^{\mathfrak{A}}$ w modelu $\mathfrak{A}$ jest zdefiniowana następująco:

- $P^{\mathfrak{A}}([c_1]_\sim, \ldots, [c_n]_\sim)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T \vdash P(c_1, \ldots, c_n)$.

Ta definicja jest poprawna (nie zależy od wyboru reprezentantów z klas równoważności, co wynika z przyjętych aksjomatów dla identyczności). W istocie, $\sim$ jest relacją kongruencji, zachodzi bowiem:
$\vdash (P(c_1, \ldots, c_n) \wedge c_1 \doteq d_1 \wedge \ldots \wedge c_n \doteq d_n) \rightarrow P(d_1, \ldots, d_n)$.

Dowód Lematu B.

Dla każdej stałej $d \in C$ jej interpretacją w $\mathfrak{A}$ jest jej klasa $\sim$-równoważności, czyli $[d]_\sim$. Poprawność tej definicji wynika z aksjomatów dla identyczności oraz z faktu, że T ma świadków; mamy bowiem kolejno:

- $\vdash \exists x_0\, d \doteq x_0$ (z KRP)
- $T \vdash \exists x_0\, d \doteq x_0$
- istnieje $c \in C$ taka, że $T \vdash d \doteq c$ (bo T ma świadków)
- klasa $\sim$-równoważności takiej stałej c jest wyznaczona jednoznacznie, ponieważ na mocy aksjomatów dla identyczności:
  $\vdash (d \doteq c \wedge d \doteq c') \rightarrow c \doteq c'$.

Dowód Lematu B.

Jeśli F jest n-argumentowym symbolem funkcyjnym, a $c_1, \ldots, c_n \in C$, to:
$T \vdash \exists x_0\ F(c_1, \ldots, c_n) \doteq x_0$.
Ponieważ T ma świadków, więc istnieje stała $c \in C$ taka, że:
$T \vdash F(c_1, \ldots, c_n) \doteq c$.
Klasa $\sim$-równoważności takiej stałej c jest wyznaczona jednoznacznie, ponieważ na mocy aksjomatów dla identyczności mamy:
$\vdash (F(c_1, \ldots, c_n) \doteq c \wedge c_1 \doteq d_1 \wedge \ldots \wedge c_n \doteq d_n \wedge c \doteq d) \to F(d_1, \ldots, d_n) \doteq d$.

Tak więc, możemy zdefiniować funkcję $F^{\mathfrak{A}}$ (będącą interpretacją symbolu funkcyjnego F w $\mathfrak{A}$) poprzez warunek:

- $F^{\mathfrak{A}}([c_1]_\sim, \ldots, [c_n]_\sim) = [c]_\sim$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T \vdash F(c_1, \ldots, c_n) \doteq c$.

Dowód Lematu B.

Ponieważ interpretacją każdej stałej $c \in C$ jest klasa $\sim$-równoważności $[c]_\sim$, więc każdy element $[c]_\sim \in dom(\mathfrak{A})$ jest interpretacją pewnej stałej z C. Trzeba jeszcze udowodnić, że $\mathfrak{A}$ jest modelem T. Z podanych wyżej interpretacji dla stałych, predykatów oraz symboli funkcyjnych bezpośrednio wynika, że:

- Dla każdego termu t z L bez zmiennych wolnych oraz każdej stałej $c \in C$:
  $\mathfrak{A} \models t \doteq c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T \vdash t \doteq c$.
- Dla dowolnych termów t_1, t_2 z L bez zmiennych wolnych:
  $\mathfrak{A} \models t_1 \doteq t_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T \vdash t_1 \doteq t_2$.
- Dla dowolnej formuły atomowej $P(t_1, \ldots, t_n)$ z L bez zmiennych wolnych:
  $\mathfrak{A} \models P(t_1, \ldots, t_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T \vdash P(t_1, \ldots, t_n)$.

Dowód Lematu B.

Następnie, przez indukcję po budowie formuł, dowodzimy, że:

- Dla każdego zdania ψ z L: $\mathfrak{A} \models \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T \vdash \psi$.

Kroki dla spójników zdaniowych sa oczywiste. Jeśli ψ jest formułą $\exists x\, \varphi(x)$, to wykorzystujemy fakt, iż T ma świadków:

- Jeśli $\mathfrak{A} \models \psi$, to istnieje element $[c]_\sim \in dom(\mathfrak{A})$ taki, że $\mathfrak{A} \models \varphi(x)[[c]_\sim]$. Oznacza to, że $\mathfrak{A} \models \varphi(c)$, gdzie $\varphi(c)$ otrzymujemy z φ poprzez zastąpienie wszystkich wolnych wystąpień x przez c. Na mocy założenia indukcyjnego $T \vdash \varphi(c)$. Ponieważ $\vdash \varphi(c) \rightarrow \exists x\, \varphi(x)$, więc $T \vdash \psi$.
- Z drugiej strony, jeśli $T \vdash \psi$, to, ponieważ T ma świadków, więc istnieje stała $c \in C$ taka,że $T \vdash \exists x\, \varphi(x) \rightarrow \varphi(c)$. Ponieważ T jest maksymalny, więc $T \vdash \varphi(c)$. Na mocy założenia indukcyjnego mamy więc $\mathfrak{A} \models \varphi(x)[[c]_\sim]$. To z kolei oznacza, że $\mathfrak{A} \models \psi$.

Pokazaliśmy zatem, że $\mathfrak{A}$ jest modelem dla T, co kończy dowód lematu B.

Dowód Lematu C.

Ten lemat jest odwróceniem lematu B. Dla jego dowodu wystarczy przyjąć za $\overline{T}$ zbiór wszystkich zdań języka L prawdziwych w modelu $\mathfrak{A}$.

- Zauważmy, że w żadnym z lematów nie postulowano istnienia jakichkolwiek struktur matematycznych niezależnych od rozważanego zbioru T w języku L.
- W istocie, model konstruowany w dowodzie lematu B miał uniwersum złożone z (klas równoważności) stałych, a więc był wyznaczony przez rozważany język L oraz wyjściowy zbiór formuł T tego języka.

Dowód Twierdzenia o Istnieniu Modelu

Jeśli T ma model, to oczywiście T jest niesprzeczny (na mocy niezawiłego rozumowania nie wprost: gdyby T był sprzeczny, to w modelu musiałyby być prawdziwe jakieś zdania ψ oraz $\neg\psi$, wbrew definicji relacji $\models$).

Z drugiej strony, przypuśćmy, że T jest niesprzeczny. Na mocy lematu A. otrzymujemy rozszerzenia $\overline{T}$ dla T oraz $\overline{L}$ dla L (przy czym moc $\overline{L}$ jest równa mocy L) takie, że $\overline{T}$ ma świadków w $\overline{L}$.
Niech teraz $\mathfrak{A}$ będzie modelem dla $\overline{T}$, otrzymanym na mocy lematu B.
Wtedy $\mathfrak{A}$ jest modelem dla rozszerzonego języka $\overline{L}$.
Niech $\mathfrak{B}$ będzie reduktem $\mathfrak{A}$ do L. Wtedy $\mathfrak{B}$ jest modelem dla języka L.
Ponieważ zdania z T nie zawierają stałych z języka $\overline{L}$, które nie występują w L, więc $\mathfrak{B}$ jest modelem dla T.

Dowód Twierdzenia o Istnieniu Modelu

Uwaga. Pojęcie reduktu modelu jest omówione w jednym z punktów poniżej. Tu wystarczy pamiętać, że redukt $\mathfrak{B}$ o sygnaturze τ modelu $\mathfrak{A}$ o sygnaturze σ, gdzie $\tau \subseteq \sigma$ jest strukturą relacyjną, w której rozważamy jedynie interpretacje symboli (stałych, predykatów, symboli funkcyjnych) z τ. W udowodnionym przed chwilą twierdzeniu branie reduktu polegało po prostu na „zapominaniu" o interpretacji stałych ze zbioru C.

Twierdzenie o pełności KRP jest konsekwencją powyższego twierdzenia. Jeśli bowiem zdanie ψ nie jest twierdzeniem KRP, to zbiór $\{\neg\psi\}$ jest niesprzeczny, a zatem ma ma model $\mathfrak{A}$. Ponieważ $\mathfrak{A} \models \neg\psi$, więc nie zachodzi $\mathfrak{A} \models \psi$, czyli ψ nie jest prawdziwe we wszystkich modelach, a to oznacza, że ψ nie jest tautologią KRP.
Innym jeszcze bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia o istnieniu modelu jest to, że każda teoria niesprzeczna T w języku L ma model o mocy równej co najwyżej mocy języka L.

Twierdzenie o Zwartości

Twierdzenie o Zwartości.

- *Zbiór zdań ma model wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego skończony podzbiór ma model.*

W innej, równoważnej postaci twierdzenie to możemy sformułować tak:

- *Zbiór zdań nie ma modelu wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden jego skończony podzbiór nie ma modelu.*

To twierdzenie (w obu postaciach) ma liczne zastosowania w klasycznej teorii modeli. Jego dowód polega na wykorzystaniu faktu, że zbiór zdań ma model wtedy i tylko wtedy, gdy jest niesprzeczny, co udowodniliśmy powyżej.

Proste zastosowanie Twierdzenia o Zwartości

- *Jeśli teoria T ma modele dowolnie dużych mocy skończonych, to ma model nieskończony.*

Szkic dowodu. Niech bowiem T będzie teorią w L, która ma modele dowolnie dużych mocy skończonych. Rozważmy rozszerzenie języka L o następującej postaci: $L' = L \cup \{c_n : n \in \omega\}$, gdzie wszystkie stałe c_n są różne. Niech Σ będzie zbiorem formuł z L' zdefiniowanym następująco: $\Sigma = T \cup \{\neg(c_n \doteq c_m) : n < m < \omega\}$. Wtedy każdy skończony podzbiór Σ' zbioru Σ wykorzystuje jedynie skończenie wiele stałych, powiedzmy $c_0, \ldots, c_m$, dla pewnej m. Niech $\mathfrak{A}$ będzie modelem dla T o co najmniej $m+1$ elementach i niech $a_0, \ldots, a_m$ będzie listą $m+1$ różnych elementów $dom(\mathfrak{A})$. Wtedy struktura $(\mathfrak{A}, a_0, \ldots, a_m)$ dla skończonego rozszerzenia $L'' = L \cup \{c_0, \ldots, c_m\}$ języka L jest modelem Σ'. Na mocy twierdzenia o zwartości, zbiór Σ ma model. Redukt tego modelu do L jest modelem teorii T, który jest nieskończony.

Twierdzenie Löwenheima-Skolema-Tarskiego

- *Jeśli zbiór T w języku L ma modele nieskończone, to ma modele nieskończone dowolnej mocy α niemniejszej od mocy języka L.*

Szkic dowodu. Niech $(c_\beta)_{\beta<\alpha}$ będzie ciągiem nowych stałych nie należących do L. Rozważmy zbiór zdań: $\Sigma = T \cup \{\neg(c_\beta \doteq c_\gamma) : \beta < \gamma < \alpha\}$. Wtedy każdy skończony podzbiór Σ' zbioru Σ wykorzystuje jedynie skończoną liczbę stałych z ciągu $(c_\beta)_{\beta<\alpha}$. A zatem każdy nieskończony model dla T może zostać rozszerzony (poprzez podanie interpretacji dla tych skończenie wielu stałych) do modelu dla Σ'. Na mocy twierdzenia o zwartości, Σ ma model $\mathfrak{A}$. Przy tym, model ten ma moc niewiększą od mocy $L \cup \{c_\beta : \beta < \alpha\}$. Ponieważ interpretacje w $dom(\mathfrak{A})$ wszystkich stałych z ciągu $(c_\beta)_{\beta<\alpha}$ muszą być różne, więc moc $dom(\mathfrak{A})$ jest z kolei niemniejsza od α. Ostatecznie zatem, $\mathfrak{A}$ ma moc α.

Teorie

Posługiwaliśmy się dotąd pojęciem teorii w sensie syntaktycznym, jako zbioru formuł domkniętego na operację konsekwencji. W teorii modeli zwykło się nazywać ***teorią*** dowolny zbiór zdań. Zbiór zdań T z języka $L(\sigma)$ jest ***teorią domkniętą***, gdy:

- jeśli ψ jest zdaniem oraz $T \models \psi$, to ψ należy do T.

- Przypominamy, że zdanie ψ jest ***konsekwencją*** zbioru zdań Ψ, gdy każdy model dla Ψ jest też modelem dla ψ.
- Wprost z definicji wynika, że zbiór wszystkich zdań prawdziwych w (dowolnie wybranej) strukturze relacyjnej $\mathfrak{A}$ jest teorią domkniętą.

Własności teorii

Mówimy, że teoria T jest:

- ***spełnialna***, gdy ma co najmniej jeden model; z twierdzenia o pełności wynika, że teoria jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy jest niesprzeczna;
- ***zupełna***, gdy dla dowolnego zdania φ języka tej teorii albo $T \models \varphi$, albo $T \models \neg\varphi$;
- ***kategoryczna***, gdy wszystkie jej modele są izomorficzne;
- ***kategoryczna w mocy*** κ, gdy ma model mocy κ i wszystkie jej modele mocy κ są izomorficzne.

Własności teorii

- Zbiorem ***aksjomatów*** dla teorii T nazywamy każdy zbiór zdań X taki, że $\{\psi : T \models \psi\} = \{\psi : X \models \psi\}$. Mówimy, że teoria T jest ***skończenie aksjomatyzowalna***, gdy istnieje skończony zbiór jej aksjomatów. Oczywiście każda teoria ma zbiór aksjomatów. Jednak interesujące są tylko takie zbiory aksjomatów, które spełniają pewne dodatkowe warunki (są np. *rekurencyjne*).

- Modele teorii zupełnych są semantycznie nieodróżnialne: każde dwa modele teorii zupełnej spełniają dokładnie te same zdania. Modele teorii zupełnej mogą być jednak odróżnialne ze względu na swoją budowę, czyli nie być izomorficzne. W istocie, charakterystyka wszystkich klas izomorfizmu teorii (zupełnej) to jeden z najważniejszych problemów badanych we współczesnej teorii modeli.

Przykłady teorii zupełnych

- Teoria gęstego liniowego porządku bez elementu pierwszego i ostatniego.
- Teoria ciała algebraicznie domkniętego o ustalonej charakterystyce.
- Teoria identyczności dla zbiorów nieskończonych.
- Teoria bezatomowych algebr Boole'a.
- Zbiór wszystkich zdań prawdziwych w standardowym modelu arytmetyki PA.

- **Lemat Lindenbauma**. *Każda teoria ma niesprzeczne rozszerzenie zupełne.*
- W ogólności, dana teoria może mieć bardzo wiele różnych (maksymalnych) rozszerzeń zupełnych. W dowodzie tego lematu istotnie korzystamy z aksjomatu wyboru.

Teorie niezupełne

- Twierdzenie o niezupełności Gödla stwierdza, że zbiór wszystkich twierdzeń (w sensie syntaktycznym) wyprowadzalnych z aksjomatów arytmetyki nie jest teorią zupełną. Tak więc, zbiór ten nie pokrywa się ze zbiorem wszystkich zdań prawdziwych w standardowym modelu arytmetyki PA.
- Żadne skończone rozszerzenie (czyli rozszerzenie otrzymane przez dodanie skończonej liczby aksjomatów) arytmetyki PA nie jest teorią zupełną. W konsekwencji, zbiór wszystkich zdań prawdziwych w standardowym modelu arytmetyki PA nie jest skończenie aksjomatyzowalny. Sama arytmetyka PA także nie jest skończenie aksjomatyzowalna (Ryll-Nardzewski, 1952).
- Teoria zera i następnika (pierwsze dwa aksjomaty PA plus schemat indukcji; a więc z pominięciem aksjomatów dotyczących dodawania i mnożenia) jest zupełna, ale nie jest skończenie aksjomatyzowalna.
- Arytmetyka z zerem, następnikiem i dodawaniem (bez mnożenia) oraz schematem indukcji jest teorią zupełną, lecz nie jest skończenie aksjomatyzowalna (Presburger, 1929).

Morfizmy

Zakładamy, że czytelnik pamięta ze *Wstępu do matematyki* definicje takich pojęć, jak np.: injekcja, surjekcja, bijekcja, homomorfizm, izomorfizm.

Używamy terminu:

- ***monomorfizm*** dla homomorfizmu, który jest injekcją;
- ***epimorfizm*** dla homomorfizmu, który jest surjekcją;
- ***endomorfizm*** dla homomorfizmu $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{A}$;
- ***automorfizm*** dla izomorfizmu $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}$.

Często monomorfizmy nazywa się również ***włożeniami***.

Podstruktury

Niech $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ będą strukturami sygnatury σ. Mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest ***podstrukturą*** $\mathfrak{B}$ (a $\mathfrak{B}$ jest ***rozszerzeniem*** $\mathfrak{A}$) i piszemy $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, gdy:

- $dom(\mathfrak{A}) \subseteq dom(\mathfrak{B})$
- dla każdego n-argumentowego predykatu $R \in \sigma$: $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap dom(\mathfrak{A})^n$
- dla każdego n-argumentowego symbolu funkcyjnego $F \in \sigma$: $F^{\mathfrak{A}} = F^{\mathfrak{B}} \upharpoonright dom(\mathfrak{A})^n$
- dla każdej stałej indywidualnej $c \in \sigma$: $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

Dla dowolnych struktur $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ sygnatury σ, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ jest równoważne z:

- $dom(\mathfrak{A}) \subseteq dom(\mathfrak{B})$ oraz dla każdej formuły *atomowej* α języka $L(\sigma)$ oraz każdego wartościowania w zachodzi: $\mathfrak{A} \models_w \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models_w \alpha$.

Podalgebry

Niech $\mathfrak{A}_1 = (A_1, \{F_j^{\mathfrak{A}_1} : j \in J\})$ oraz $\mathfrak{A}_2 = (A_2, \{F_j^{\mathfrak{A}_2} : j \in J\})$ będą algebrami tego samego typu. Mówimy, że $\mathfrak{A}_1$ jest ***podalgebrą*** $\mathfrak{A}_2$, gdy $A_1 \subseteq A_2$ oraz A_1 jest ***domknięty na wszystkie operacje*** $F_j^{\mathfrak{A}_1}$, czyli gdy dla wszystkich $x_1, \ldots, x_n \in A_1$ oraz wszystkich n-argumentowych symboli funkcyjnych F_j, mamy: $F_j^{\mathfrak{A}_1}(x_1, \ldots, x_n) \in A_1$.

Niech $\mathfrak{A} = (A, \{F_j^{\mathfrak{A}} : j \in J\})$ będzie algebrą oraz $B \subseteq A$. Przez ***podalgebrę algebry*** $\mathfrak{A}$ ***generowaną przez zbiór*** B rozumiemy najmniejszą podalgebrę $\mathfrak{B}$ algebry $\mathfrak{A}$, której dziedzina zawiera zbiór B, tj. algebrę $\mathfrak{B} = (dom(\mathfrak{B}), \{F_j^{\mathfrak{B}} : j \in J\})$, gdzie $dom(\mathfrak{B})$ jest $\subseteq$-najmniejszym zbiorem X takim, że: $B \subseteq X \subseteq A$ oraz X jest domknięty na wszystkie funkcje ze zbioru $\{F_j^{\mathfrak{B}} : j \in J\}$. Najmniejszą podalgebrę algebry $\mathfrak{A}$, której dziedzina zawiera zbiór B oznaczamy przez $\mathfrak{A}_{[B]}$.

Elementarna równoważność

Niech $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ będą strukturami tego samego typu σ, interpretacjami (fragmentu) języka rachunku predykatów $L(\sigma)$. Mówimy, że $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są ***elementarnie równoważne***, gdy dla każdego zdania α języka $L(\sigma)$:

- $\mathfrak{A} \models \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models \alpha$.

- Jeśli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są elementarnie równoważne, to piszemy $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.
- Relacja $\equiv$ jest relacją równoważności w *klasie* Str_σ wszystkich struktur relacyjnych typu σ.
- Jeśli $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ (czyli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są izomorficzne), to $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Implikacja odwrotna nie zachodzi (np. struktury $(\omega, \leqslant)$ oraz $(\omega + \omega^* + \omega, \leqslant)$ są elementarnie równoważne, lecz nie są izomorficzne).
- Jeśli $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są nieodróżnialne strukturalnie, a gdy $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ to $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są nieodróżnialne (jako całości) ze względu na własności wyrażalne w języku pierwszego rzędu.

Elementarne podstruktury

Mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest ***elementarną podstrukturą*** $\mathfrak{B}$, gdy $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ oraz dla każdej *formuły* α języka $L(\sigma)$ oraz każdego wartościowania w zachodzi:

- $\mathfrak{A} \models_w \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models_w \alpha$.

Jeśli $\mathfrak{A}$ jest elementarną podstrukturą $\mathfrak{B}$, to piszemy $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. Jeśli $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{B}$ nazywamy ***elementarnym rozszerzeniem*** $\mathfrak{A}$.

Włożenie f struktury $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$ nazywamy ***włożeniem elementarnym***, gdy dla każdej formuły $\alpha(v_1, \ldots, v_n)$ oraz wszystkich $a_1, \ldots, a_n$:

- $\mathfrak{A} \models \alpha(v_1, \ldots, v_n)[a_1, \ldots, a_n]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models \alpha(v_1, \ldots, v_n)[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$.

Jeśli istnieje elementarne włożenie $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$, to mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest ***elementarnie wkładalna*** w $\mathfrak{B}$.

Elementarne podstruktury

- Jeśli $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa.

- Struktura $(\omega - \{0\}, \leqslant)$ jest elementarnie równoważna z $(\omega, \leqslant)$, ale nie zachodzi $(\omega - \{0\}, \leqslant) \prec (\omega, \leqslant)$, czyli $(\omega - \{0\}, \leqslant)$ nie jest elementarną podstrukturą $(\omega, \leqslant)$: liczba 1 jest elementem pierwszym w $(\omega - \{0\}, \leqslant)$, a nie jest elementem pierwszym w $(\omega, \leqslant)$.
- Zbiór liczb całkowitych z zerem i dodawaniem, traktowany jako grupa, jest podstrukturą zbioru liczb wymiernych (także traktowanych jako grupa, z zerem i dodawaniem), ale nie jest jego elementarną podstrukturą.

- Jeśli struktury $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są skończone, to ich elementarna równoważność implikuje, że są one również izomorficzne.

Test Tarskiego-Vaughta

W ustalaniu, czy między modelami zachodzi relacja $\prec$ wykorzystać można następujący ***Test Tarskiego-Vaughta***:

Niech $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

- $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.
- Dla dowolnej formuły α oraz wartościowania w w strukturze $\mathfrak{A}$ takich, że $\mathfrak{B} \models_w \exists x_n \alpha$ istnieje $a \in dom(\mathfrak{A})$ taki, że $\mathfrak{B} \models_{w_n^a} \alpha$.

Szkic dowodu. Niech Niech $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Załóżmy, że $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ oraz $\mathfrak{B} \models_w \exists x_n \alpha$. Skoro $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, a zatem $\mathfrak{A} \models_w \exists x_n \alpha$. Z definicji relacji $\models$ istnieje $a \in dom(\mathfrak{A})$ taki, że $\mathfrak{A} \models_{w_n^a} \alpha$. Ponieważ $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, więc $\mathfrak{B} \models_{w_n^a} \alpha$.

Test Tarskiego-Vaughta

Z kolei, załóżmy, że dla każdego wartościowania w w $\mathfrak{A}$, zachodzenie $\mathfrak{B} \models_w \exists x_n \alpha$ implikuje, że istnieje $a \in dom(\mathfrak{A})$ taki, że $\mathfrak{B} \models_{w_n^a} \alpha$. Pokażemy, że wtedy $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. W tym celu trzeba pokazać, że dla dowolnej formuły α i dowolnego wartościowania w w $\mathfrak{A}$ zachodzi równoważność:
$(*)$ $\quad \mathfrak{A} \models_w \alpha$ dokładnie wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models_w \alpha$.

Dowód $(*)$ przebiega przez indukcję (po złożoności formuł). Ponieważ $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, więc $(*)$ zachodzi dla formuł atomowych. Krok indukcyjny dotyczący spójników Boolowskich jest oczywisty. Załóżmy, że $(*)$ zachodzi dla formuły β. Pokażemy, że zachodzi także dla $\exists x_n \beta$. Jeżeli $\mathfrak{A} \models_w \exists x_n \beta$, to istnieje $a \in dom(\mathfrak{A})$ taki, że $\mathfrak{A} \models_{w_n^a} \beta$. Na mocy założenia indukcyjnego, $\mathfrak{B} \models_{w_n^a} \beta$, czyli $\mathfrak{B} \models_w \exists x_n \beta$. Jeżeli natomiast $\mathfrak{B} \models_w \exists x_n \beta$, to, na mocy założeń twierdzenia, istnieje $a \in dom(\mathfrak{A})$ taki, że $\mathfrak{B} \models_{w_n^a} \beta$. Z kolei, na mocy założenia indukcyjnego, $\mathfrak{A} \models_{w_n^a} \beta$, co oznacza, że $\mathfrak{A} \models_w \exists x_n \beta$ i kończy dowód.

Zachowawczość

Mówimy, że formuła ψ jest:

- ***zachowawcza w górę***, gdy dla dowolnych struktur $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ takich, że $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ oraz dowolnego wartościowania w w $\mathfrak{A}$: jeśli $\mathfrak{A} \models_w \psi$, to $\mathfrak{B} \models_w \psi$;
- ***zachowawcza w dół***, gdy dla dowolnych struktur $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ takich, że $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ oraz dowolnego wartościowania w w $\mathfrak{A}$: jeśli $\mathfrak{B} \models_w \psi$, to $\mathfrak{A} \models_w \psi$.

Zachodzą następujące fakty:

- A. *Jeśli ψ jest logicznie egzystencjalna, to jest zachowawcza w górę.*
- B. *Jeśli ψ jest logicznie uniwersalna, to jest zachowawcza w dół.*

Zachowawczość

Szkic dowodu. Udowodnimy, dla przykładu, punkt A. Dowód B. przebiega podobnie. Załóżmy, że ψ jest logicznie egzystencjalna, czyli $\models \psi \equiv \exists x_n \chi$ dla pewnej formuły bez kwantyfikatorów χ. Niech $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ oraz niech w będzie wartościowaniem w $\mathfrak{A}$. Następujące warunki są wtedy równoważne:

- $\mathfrak{A} \models_w \psi$
- $\mathfrak{A} \models_w \exists x_n \chi$
- $\mathfrak{A} \models_{w_n^a} \chi$ dla pewnego $a \in dom(\mathfrak{A})$
- $\mathfrak{B} \models_{w_n^a} \chi$ dla pewnego $a \in dom(\mathfrak{A})$
- $\mathfrak{B} \models_{w_n^a} \chi$ dla pewnego $a \in dom(\mathfrak{B})$
- $\mathfrak{B} \models_w \exists x_n \chi$
- $\mathfrak{B} \models_w \psi$.

Zachowawczość

- *Niech f będzie monomorfizmem $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$. Wtedy f jest elementarnym włożeniem $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy obraz f jest elementarną podstrukturą $\mathfrak{B}$.*
- **Dolne Twierdzenie Löwenheima-Skolema**. *Niech $\mathfrak{A} \in Str_{\sigma}$, $X \subseteq dom(\mathfrak{A})$ i załóżmy, że $\overline{\overline{L(\sigma)}} \leqslant \overline{\overline{\mathfrak{A}}}$. Wtedy istnieje $\mathfrak{B}$ taka, że:*
  1. $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$
  2. $X \subseteq dom(\mathfrak{B})$
  3. $\overline{\overline{\mathfrak{B}}} = sup(\overline{\overline{X}}, \overline{\overline{L(\sigma)}})$.

- Ta wersja dolnego twierdzenia Löwenheima-Skolema różni się od podanej poprzednio tym, że mówimy tu o ***elementarnym*** podmodelu modelu wyjściowego. W dowodzie wykorzystuje się test Tarskiego-Vaughta:

Zachowawczość

Zdefiniujemy przez indukcję ciąg zbiorów $(X_i)_{i\in\omega}$ taki, że $X_i \subseteq X_{i+1}$ oraz $\overline{\overline{X_i}} = \overline{\overline{dom(\mathfrak{A})}}$:

- X_0 jest dziedziną podstruktury struktury $\mathfrak{A}$, generowaną przez zbiór X. Zbiór X_0 zawiera zatem X oraz jest domknięty na wszystkie funkcje z $\mathfrak{A}$.
- Jeśli X_i został zdefiniowany, to X_{i+1} definiujemy w sposób następujący. Dla każdej formuły $\psi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ z języka $L(\sigma)$ oraz każdego ciągu $a_1, \ldots, a_n$ elementów z X_i, jeżeli $\mathfrak{A} \models \exists x_0 \psi[a_1, \ldots, a_n]$, to wybieramy w $dom(\mathfrak{A})$ element $b_{\psi,a_1,\ldots,a_n}$ taki, że:

$$\mathfrak{A} \models \psi[b_{\psi,a_1,\ldots,a_n}, a_1, \ldots, a_n].$$

Zachowawczość

Następnie definiujemy:

- $B_i = X_i \cup \{b_{\psi,a_1,\ldots,a_n} : n \in \omega \wedge \psi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ jest formułą z $L(\sigma) \wedge a_1, \ldots, a_n \in dom(\mathfrak{A}) \wedge \mathfrak{A} \models \exists x_0 \psi[a_1, \ldots, a_n]\}$.
  Niech X_{i+1} będzie uniwersum podstruktury struktury $\mathfrak{A}$ generowanej przez B_i.
  Ponieważ istnieje $\overline{\overline{L(\sigma)}}$ formuł języka $L(\sigma)$ oraz $\overline{\overline{X_i}}$ ciągów $a_1, \ldots, a_n$ z X_i, więc aby otrzymać B_i musimy dodać najwyżej $\overline{\overline{X_i}}$ elementów do X_i. Mamy zatem ciąg równości:

  $$\overline{\overline{X_{i+1}}} = \overline{\overline{B_i}} = \overline{\overline{X_i}} = \overline{\overline{X}}.$$

- Niech $B = \bigcup\limits_{i \in \omega} X_i$ i niech $\mathfrak{B}$ będzie strukturą z Str_σ o uniwersum B.
  Wtedy $\mathfrak{B}$ jest podstrukturą $\mathfrak{A}$.

Zachowawczość

Aby pokazać, że $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$, wykorzystamy test Tarskiego-Vaughta. Niech $\psi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ będzie formułą z $L(\sigma)$, $a_1, \ldots, a_n$ elementami B i załóżmy, że:

$$\mathfrak{A} \models \exists x_0 \psi[a_1, \ldots, a_n].$$

Na mocy konstrukcji zbioru B, istnieje i taka, że X_i zawiera wszystkie $a_1, \ldots, a_n$. Z kolei, na mocy konstrukcji zbioru X_{i+1}, zbiór ten (a więc również zbiór B) zawiera element b taki, że:

$$\mathfrak{A} \models \psi[b, a_1, \ldots, a_n].$$

Spełnione są zatem warunki (z testu Tarskiego-Vaughta) na to, aby $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$.

Diagramy

Dla dowolnej struktury $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$ rozważmy język L_A, który powstaje z $L(\sigma)$ poprzez dodanie stałych indywidualnych $\overline{a}$, dla każdego $a \in A = dom(\mathfrak{A})$. Każda struktura $\mathfrak{A}$ może zostać rozszerzona do struktury $\mathfrak{A}^* \in Str_{\sigma \cup \{\overline{a}: a \in A\}}$ w ten sposób, iż $dom(\mathfrak{A}^*) = dom(\mathfrak{A})$, a każda stała $\overline{a}$ jest interpretowana w $\mathfrak{A}^*$ jako a.

- Przez ***diagram prosty*** struktury $\mathfrak{A}$ rozumiemy zbiór wszystkich domkniętych formuł bez kwantyfikatorów z języka L_A spełnionych w strukturze $\mathfrak{A}^*$. Diagram prosty struktury $\mathfrak{A}$ oznaczamy przez $\Delta(\mathfrak{A})$.
- Przez ***diagram pełny*** (zwany też ***diagramem elementarnym***) struktury $\mathfrak{A}$ rozumiemy zbiór wszystkich zdań z z języka L_A spełnionych w strukturze $\mathfrak{A}^*$. Diagram pełny struktury $\mathfrak{A}$ oznaczamy przez $D(\mathfrak{A})$.

Diagramy

- A. *Jeśli* $\mathfrak{A}$ *jest L-strukturą, to każdy model dla* $\Delta(\mathfrak{A})$ *jest izomorficzny z pewnym rozszerzeniem struktury* $\mathfrak{A}^*$.
- B. *Każda struktura nieskończona ma właściwe elementarne rozszerzenie, czyli dla każdej nieskończonej* $\mathfrak{A}$ *istnieje* $\mathfrak{B}$ *różna od* $\mathfrak{A}$ *taka, że* $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.
- C. **Górne Twierdzenie Löwenheima-Skolema-Tarskiego**. *Niech* $\mathfrak{A} \in Str_\sigma$ *będzie nieskończoną strukturą, a* κ *liczbą kardynalną niemniejszą od* $sup(\overline{\overline{\mathfrak{A}}}, \overline{\overline{L(\sigma)}})$. *Wtedy istnieje struktura* $\mathfrak{B}$ *mocy* κ *taka, że* $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

- W dowodzie Górnego Twierdzenia Löwenheima-Skolema-Tarskiego wykorzystujemy twierdzenie o zwartości.

Diagramy

Szkic dowodu A. Niech $\mathfrak{B}$ będzie modelem $\Delta(\mathfrak{A})$. Niech $g : dom(\mathfrak{A}) \rightarrow dom(\mathfrak{B})$ będzie funkcją, której wartością dla $a \in dom(\mathfrak{A})$ jest interpretacja stałej $\overline{a}$ w strukturze $\mathfrak{B}$. Niech A_1 będzie zbiorem takim, że:

- $dom(\mathfrak{A}) \subseteq A_1$;
- $A_1 - dom(\mathfrak{A})$ ma taką samą moc jak $dom(\mathfrak{B}) - g[dom(\mathfrak{A})]$.

Wtedy g można rozszerzyć do bijekcji g_1 z A_1 na $dom(\mathfrak{B})$. Definiujemy strukturę $\mathfrak{A}_1$ taką, że:

- $A_1 = dom(\mathfrak{A}_1)$
- g_1 jest izomorfizmem $\mathfrak{A}_1$ i $\mathfrak{B}$.

Diagramy

W tym celu wystarczy interpretować w $\mathfrak{A}_1$ każdą ze stałych $\overline{a}$, gdzie $a \in dom(\mathfrak{A})$, jako element a, a jeśli R jest n-argumentowym predykatem, to interpretacją R w $\mathfrak{A}_1$ jest:

$$\{(a_1, \ldots, a_n) \in dom(\mathfrak{A}_1)^n : \mathfrak{B} \models R(g_1(a_1), \ldots, g_1(a_n))\}$$

(podobnie dla symboli funkcyjnych oraz stałych indywidualnych). Wtedy $\mathfrak{A}_1$ jest rozszerzeniem $\mathfrak{A}^*$.

Uwaga. Jeśli w dowodzie powyższym zażądamy, aby struktura $\mathfrak{B}$ była modelem pełnego diagramu $D(\mathfrak{A})$, a nie jedynie diagramu prostego $\Delta(\mathfrak{A})$, to $\mathfrak{A}$ będzie *elementarną* podstrukturą reduktu struktury $\mathfrak{A}_1$ do L.

Diagramy

Szkic dowodu B. Dodajemy do języka $L_{dom(\mathfrak{A})}$ nową stałą indywidualną c i rozważamy następującą teorię T w tak rozszerzonym języku:

$$T = D(\mathfrak{A}) \cup \{\neg c \doteq \overline{a} : a \in dom(\mathfrak{A})\}.$$

Każdy skończony podzbiór zbioru T ma model (pamiętajmy, że $\mathfrak{A}$ jest strukturą nieskończoną!), a zatem, na mocy twierdzenia o zwartości, także T ma model. Niech $\mathfrak{C}$ będzie modelem T, a $\mathfrak{B}$ reduktem modelu $\mathfrak{C}$ do języka L: czyli $\mathfrak{B}$ jest strukturą tej samej sygnatury, co $\mathfrak{A}$. Na mocy punktu A., możemy założyć, że $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. Interpretacja stałej c w $\mathfrak{C}$ nie może należeć do $dom(\mathfrak{A})$. Oznacza to, że modele $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są różne.

Diagramy

Szkic dowodu C. Wystarczy zbudować model $\mathfrak{B}$ mocy niemniejszej od κ taki, że $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. Gdy bowiem zbudujemy taki model, to wybieramy podzbiór $X \subseteq dom(\mathfrak{B})$ mocy κ, który zawiera $dom(\mathfrak{A})$, a następnie korzystamy z dolnego twierdzenia Löwenheima-Skolema i otrzymujemy model $\mathfrak{C}$ taki, że:

- $dom(\mathfrak{A}) \subseteq dom(\mathfrak{C})$
- $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{B}$
- $\overline{\overline{\mathfrak{C}}} = \kappa$.

Wtedy bowiem zachodzi także $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$, co wynika bezpośrednio z definicji relacji $\prec$.

Diagramy

Dla każdej $i \in \kappa$ wprowadzamy nową stałą indywidualną c_i. Rozważmy teorię:

$$T = D(\mathfrak{A}) \cup \{\neg c_i \doteq c_j : i, j \in \kappa \wedge i \neq j\}.$$

Teoria ta jest niesprzeczna na mocy twierdzenia o zwartości, ponieważ każdy jej skończony podzbiór jest niesprzeczny (pamiętajmy, że $dom(\mathfrak{A})$ jest zbiorem nieskończonym!). Ma zatem model, powiedzmy $\mathfrak{B}$. Na mocy uwag powyższych możemy założyć, że $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. Wtedy interpretacje w $\mathfrak{B}$ stałych c_i, dla $i \in \kappa$ są wszystkie różne, a więc $\mathfrak{B}$ ma moc co najmniej κ.

Diagramy

- **Lemat O Wspólnym Włożeniu.** $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje* $\mathfrak{C}$ *taka, że* $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$ *oraz* $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$.

W istocie, zachodzi nawet nieco ogólniejsze twierdzenie:

- *Jeśli* $\mathcal{A}$ *jest niepustą rodziną struktur elementarnie równoważnych, to istnieje struktura* $\mathfrak{B}$ *taka, że każda struktura z* $\mathcal{A}$ *jest elementarnie wkładalna w* $\mathfrak{B}$.

- W dowodach tych twierdzeń wykorzystujemy pojęcie diagramu oraz twierdzenie o zwartości.

Lemat O Wspólnym Włożeniu

Szkic dowodu. Jeśli $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$ oraz $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$ dla pewnej struktury $\mathfrak{C}$, to oczywiście $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Trzeba więc jedynie udowodnić, że dowolne dwie elementarnie równoważne struktury mają wspólne elementarne rozszerzenie. Niech zatem $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Zakładamy przy tym, że $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są L-strukturami. Rozważmy język L' utworzony z L przez dodanie:

- nowej stałej $\underline{a}$ dla każdego elementu $a \in dom(\mathfrak{A})$;
- nowej stałej $\overline{b}$ dla każdego elementu $b \in dom(\mathfrak{B})$.

Jeśli przy tym $a \in dom(\mathfrak{A}) \cap dom(\mathfrak{B})$, to stałe $\underline{a}$ oraz $\overline{a}$ muszą być różne.

Lemat O Wspólnym Włożeniu

Rozważmy teraz diagramy:

- $D(\mathfrak{A})$ = zbiór wszystkich zdań o postaci $\psi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n})$, gdzie $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ jest formułą języka L, $a_1, \ldots, a_n \in dom(\mathfrak{A})$ oraz $\mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n]$
- $D(\mathfrak{B})$ = zbiór wszystkich zdań o postaci $\psi(\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n})$, gdzie $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ jest formułą języka L, $b_1, \ldots, b_n \in dom(\mathfrak{B})$ oraz $\mathfrak{B} \models \psi[b_1, \ldots, b_n]$.

Jak wiemy, $\mathfrak{A}$ można elementarnie włożyć w dowolny model dla $D(\mathfrak{A})$, a $\mathfrak{B}$ można elementarnie włożyć w dowolny model dla $D(\mathfrak{B})$. Wystarczy zatem udowodnić, że $T' = D(\mathfrak{A}) \cup D(\mathfrak{B})$ jest teorią niesprzeczną. Skorzystamy z twierdzenia o zwartości oraz z faktu, że $D(\mathfrak{A})$ jest domknięty na koniunkcję.

Lemat O Wspólnym Włożeniu

Każdy skończony podzbiór $D(\mathfrak{A})$ jest równoważny pewnej formule $\psi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n})$ z $D(\mathfrak{A})$. Gdyby zatem T' była sprzeczna, to istniałaby formuła $\psi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n})$ taka, że:

$$D(\mathfrak{B}) \vdash \neg\psi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}).$$

Ponieważ jednak żadna stała $\underline{a_i}$ nie występuje w $D(\mathfrak{B})$, więc:

$$D(\mathfrak{B}) \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \, \neg\psi(x_1, \ldots, x_n).$$

Lemat O Wspólnym Włożeniu

Tak więc, $\forall x_1 \ldots \forall x_n \, \neg\psi(x_1, \ldots, x_n)$ jest formułą domkniętą z L, która jest prawdziwa w $\mathfrak{B}$. Ponieważ $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są elementarnie równoważne, więc formuła ta jest prawdziwa również w $\mathfrak{A}$, a to jest sprzeczne z faktem, że $\mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n]$.

Tym samym, dowód twierdzenia został zakończony, ponieważ (odrzucona) sprzeczność teorii T' oznaczałaby nieistnienie wspólnego elementarnego rozszerzenia modeli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$.

Test Łosia-Vaughta

Test Łosia-Vaughta. *Jeśli T jest teorią niesprzeczną teorią bez modeli skończonych, κ-kategoryczną w pewnej mocy nieskończonej κ, to T jest zupełna.*

Test Łosia-Vaughta znajduje zastosowanie dla ustalenia zupełności na przykład następujących teorii (żadna z nich nie ma modeli skończonych, a każda jest w pewnej mocy kategoryczna):

- Teoria gęstych liniowych porządków bez końców. Jest ona $\aleph_0$-kategoryczna.
- Teoria bezatomowych algebr Boole'a. Jest ona $\aleph_0$-kategoryczna.
- Teoria ciał algebraicznie domkniętych charakterystyki 0 (lub p, gdzie p jest liczbą pierwszą). Jest ona $\aleph_1$-kategoryczna.
- Teoria nieskończonych grup przemiennych, których wszystkie elementy mają rząd p. Jest ona κ-kategoryczna dla wszystkich κ.

Test Łosia-Vaughta

Szkic dowodu. Przypuśćmy, że T nie jest zupełna. Wtedy istnieje zdanie ψ takie, że ani ψ, ani $\neg\psi$ nie jest logiczną konsekwencją T. Stąd zarówno zbiór $T \cup \{\psi\}$ jak i $T \cup \{\neg\psi\}$ są niesprzeczne, a więc każdy z nich ma model. Ponieważ T nie ma modeli skończonych, więc oba te modele są nieskończone.

Na mocy (górnego) twierdzenia Löwenheima-Skolema, zarówno $T \cup \{\psi\}$ jak i $T \cup \{\neg\psi\}$ mają modele mocy κ. Ponieważ ψ jest prawdziwe w jednym z tych modeli, ale nie w drugim, więc modele te nie są izomorficzne.

To przeczy założeniu, iż T jest κ-kategoryczna. Tak więc, musimy odrzucić przypuszczenie dowodu nie wprost i otrzymujemy, iż T jest zupełna.

Amalgamacja

Twierdzenia o amalgamacji dotyczą łączenia wielu struktur w jedną strukturę. Zapewniają mianowicie, że gdy w poniższym diagramie dane są odwzorowania ze zbioru X w uniwersa modeli $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$, to istnieje struktura $\mathfrak{C}$ oraz odwzorowania z uniwersów modeli $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ w $\mathfrak{C}$ takie, że diagram ów komutuje:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{C} & \\
\mathfrak{A} \arrow[ur] & & \mathfrak{B} \arrow[ul] \\
 & X \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Przy tym, odwzorowania, których istnienie postulujemy mogą mieć pewne dodatkowe własności (np. mogą być elementarnymi włożeniami). W istocie, lemat o wspólnym włożeniu jest twierdzeniem o amalgamacji.

Amalgamacja

- *Niech $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ będą modelami teorii zupełnej T. Niech $f_1 : \mathfrak{C} \to \mathfrak{A}$ oraz $f_2 : \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$ będą elementarnymi włożeniami. Istnieją wtedy: model $\mathfrak{D}$ teorii T oraz elementarne włożenia $g_1 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{D}$ i $g_2 : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$ takie, że dla każdego $x \in dom(\mathfrak{C})$: $g_1(f_1(x)) = g_2(f_2(x))$.*
- *Niech $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ będą modelami teorii zupełnej T w języku $L(\sigma)$. Niech C będzie zbiorem stałych spoza σ. Niech $\mathfrak{A}^C$ oraz $\mathfrak{B}^C$ będą, odpowiednio, rozszerzeniami struktur $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ należącymi do $Str_{\sigma \cup C}$. Jeśli $\mathfrak{A}^C \equiv \mathfrak{B}^C$, to istnieje struktura $\mathfrak{D}^C \in Str_{\sigma \cup C}$ oraz elementarne włożenia $\mathfrak{A}^C$ i $\mathfrak{B}^C$ w $\mathfrak{D}^C$.*
- *Niech $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$ oraz niech C będzie zbiorem stałych spoza σ. Niech $\mathfrak{A}^C$ oraz $\mathfrak{B}^C$ będą, odpowiednio, rozszerzeniami struktur $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ należącymi do $Str_{\sigma \cup C}$. Jeśli dla każdego zdania egzystencjalnego $\psi \in L(\sigma)$ mamy: jeśli $\mathfrak{A}^C \models \psi$, to $\mathfrak{B}^C \models \psi$, to istnieje struktura $\mathfrak{D}^C \in Str_{\sigma \cup C}$ oraz elementarne włożenia $\mathfrak{A}^C$ i $\mathfrak{B}^C$ w $\mathfrak{D}^C$.*

Definiowalność

Niech $n > 0$, a X niech będzie podzbiorem $dom(\mathfrak{A})^n$. Mówimy, że X jest ***definiowalny*** w $\mathfrak{A}$, gdy istnieje formuła $\psi(\overrightarrow{x})$ taka, że:

$$X = \{\overrightarrow{a} \in dom(\mathfrak{A})^n : \mathfrak{A} \models \psi[\overrightarrow{a}]\}.$$

Jeśli w formule $\psi(\overrightarrow{x})$ występują przy tym nazwy indywidualne nazywające elementy zbioru $Y \subseteq dom(\mathfrak{A})$, to mówimy, że X jest ***Y-definiowalny*** w $\mathfrak{A}$ (jest definiowalny w $\mathfrak{A}$ z parametrami ze zbioru Y).

- Dla każdej $n > 0$ oraz $Y \subseteq dom(\mathfrak{A})$, zbiory Y-definiowalne w $\mathfrak{A}$ tworzą algebrę Boole'a.
- Każdy skończony podzbiór $dom(\mathfrak{A})^n$ jest definiowalny w $\mathfrak{A}$.
- Jeśli struktura $\mathfrak{A}$ jest nieskończona, to istnieją zbiory, które nie są definiowalne w $\mathfrak{A}$.

Struktury i teorie minimalne

Przypominamy, że zbiór ***koskończony*** to taki, którego dopełnienie (w ustalonym uniwersum) jest skończone. Zbiory koskończone są definiowalne, gdyż definiowalne są zbiory skończone.
Mówimy, że nieskończona struktura $\mathfrak{A}$ jest ***minimalna***, gdy jedynymi jej definiowalnymi podzbiorami są zbiory skończone oraz koskończone.
Mówimy, że nieskończona struktura $\mathfrak{A}$ jest ***silnie minimalna***, gdy każda struktura z nią elementarnie równoważna jest minimalna.
Tak więc, w strukturach silnie minimalnych istnieje tak mało zbiorów definiowalnych, jak to tylko możliwe.

Mówimy, że teoria zupełna T jest ***silnie minimalna***, gdy każdy model dla T jest minimalny.
Dla przykładu, każde ciało algebraicznie domknięte jest strukturą minimalną. Teoria ciał algebraicznie domkniętych charakterystyki 0 lub charakterystyki p, gdzie p jest liczbą pierwszą, jest silnie minimalna.

Domknięcie algebraiczne

- Dla dowolnej struktury $\mathfrak{A}$ oraz formuły $\psi(x)$ niech $\psi(\mathfrak{A})$ oznacza podzbiór uniwersum $\mathfrak{A}$ definiowany przez ψ.
- Dla dowolnej struktury $\mathfrak{A}$ oraz formuły $\psi(x)$ mówimy, że $\psi(x)$ jest ***algebraiczna*** nad $\mathfrak{A}$, gdy $\psi(\mathfrak{A})$ jest zbiorem skończonym.
- Dla dowolnej struktury $\mathfrak{A}$ oraz podzbioru $A \subseteq dom(\mathfrak{A})$ i elementu $b \in dom(\mathfrak{A})$ mówimy, że b jest ***algebraiczny*** nad A, gdy $b \in \psi(\mathfrak{A})$ dla pewnej formuły $\psi(x)$ algebraicznej nad $\mathfrak{A}$.
- Zbiór wszystkich elementów $dom(\mathfrak{A})$, które są algebraiczne nad A nazywamy ***algebraicznym domknięciem*** A i oznaczamy przez $acl_{\mathfrak{A}}(A)$.
- Mówimy, że A jest ***algebraicznie domknięty***, gdy $A = acl_{\mathfrak{A}}(A)$.

Domknięcie algebraiczne

- Wprost z definicji widać, że $acl_{\mathfrak{A}}(A)$ jest domknięty na wszystkie funkcje (z sygnatury $\mathfrak{A}$) oraz zawiera interpretacje wszystkich stałych indywidualnych.
- Tak więc, $acl_{\mathfrak{A}}(A)$ jest podstrukturą struktury $\mathfrak{A}$ (o ile jest niepusty).

Operacja $acl_{\mathfrak{A}}$ jest (finitarną) operacją domknięcia, czyli spełnione są następujące warunki:

- $A \subseteq acl_{\mathfrak{A}}(A)$.
- Jeśli $A \subseteq B$, to $acl_{\mathfrak{A}}(A) \subseteq acl_{\mathfrak{A}}(B)$.
- $acl_{\mathfrak{A}}(acl_{\mathfrak{A}}(A)) = acl_{\mathfrak{A}}(A)$.
- Jeśli $a \in acl_{\mathfrak{A}}(A)$, to istnieje skończony zbiór $A_0 \subseteq A$ taki, że $a \in acl_{\mathfrak{A}}(A_0)$.

Domknięcie algebraiczne

W przypadku struktur silnie minimalnych operacja $acl_{\mathfrak{A}}$ ma jeszcze jedną ważną własność:

- **Własność Wymiany**. *Niech $\mathfrak{A}$ będzie strukturą silnie minimalną. Niech $A \subseteq dom(\mathfrak{A})$ oraz $b, c \in dom(\mathfrak{A})$. Wtedy: Jeśli $c \in acl_{\mathfrak{A}}(A \cup \{b\})$ oraz $c \notin acl_{\mathfrak{A}}(A)$, to $b \in acl_{\mathfrak{A}}(A \cup \{c\})$.*

Powyższa własność pozwala na przyporządkowanie ***wymiaru*** podzbiorom uniwersum struktury silnie minimalnej. Podobnie jak w przypadku przestrzeni wektorowych znanego ze wstępu do matematyki, najpierw trzeba określić pojęcia: niezależności oraz bazy.

Niezależność i baza

- Niech $A, B \subseteq dom(\mathfrak{A})$. Mówimy, że A jest ***niezależny*** nad B, gdy dla każdego $a \in A$ zachodzi: $a \notin acl_{\mathfrak{A}}((A \cup B) - \{a\})$.
- Mówimy, że A jest ***niezależny***, gdy A jest niezależny nad $\emptyset$.
- Niech $A, C \subseteq dom(\mathfrak{A})$. ***Bazą*** dla A jest podzbiór $B \subseteq A$ taki, że B jest niezależny oraz $acl_{\mathfrak{A}}(A) = acl_{\mathfrak{A}}(B)$. Mówimy, że B jest ***bazą dla A nad C***, gdy B jest niezależny nad C oraz $acl_{\mathfrak{A}}(A \cup C) = acl_{\mathfrak{A}}(B \cup C)$.

- Niech $\mathfrak{A}$ będzie silnie minimalna i niech $A, C \subseteq dom(\mathfrak{A})$. Jeśli A ma skończoną bazę nad C, to dowolne dwie bazy zbioru A nad C są tej samej mocy.
- Niech $\mathfrak{A}$ będzie silnie minimalna i niech $A, C \subseteq dom(\mathfrak{A})$. Jeśli B_1 i B_2 są bazami A nad C, to B_1 i B_2 są tej samej mocy.

Wymiar

Niech teraz $\mathfrak{A}$ będzie silnie minimalna i niech $A, C \subseteq dom(\mathfrak{A})$. ***Wymiarem A nad C*** nazywamy moc dowolnej bazy A nad C. Wymiar A nad C oznaczamy przez $dim_{\mathfrak{A}}(A/C)$. Przez ***wymiar*** zbioru A rozumiemy wymiar A nad $\emptyset$. Wymiar A oznaczamy przez $dim_{\mathfrak{A}}(A)$.

- (†) Jeśli $\mathfrak{A}$ jest silnie minimalna i $A, C \subseteq dom(\mathfrak{A})$, to: jeżeli $dim_{\mathfrak{A}}(A) = dim_{\mathfrak{A}}(C)$, to $acl_{\mathfrak{A}}(A) = acl_{\mathfrak{A}}(C)$.
- *Przeliczalne teorie silnie minimalne są kategoryczne w mocach nieprzeliczalnych.*
- *Teorie silnie minimalne są zupełne.*

Minimalność porządkowa

Niech $\mathfrak{A}$ będzie strukturą nieskończoną sygnatury σ i załóżmy, że w σ mamy dwuargumentowy predykat $<$ interpretowany jako liniowy porządek w $\mathfrak{A}$. Przez ***przedział*** w $\mathfrak{A}$ rozumiemy każdy z następujących podzbiorów uniwersum $\mathfrak{A}$, dla pewnych $a, b \in dom(\mathfrak{A})$:

- $(a, b) = \{x \in dom(\mathfrak{A}) : a < x < b\}$
- $(a, \infty) = \{x \in dom(\mathfrak{A}) : a < x\}$
- $(\infty, a) = \{x \in dom(\mathfrak{A}) : x < a\}$.

Również zbiory jednoelementowe $\{a\}$ uważamy za (zdegenerowane) przedziały. Każdy przedział jest oczywiście zbiorem definiowalnym w $\mathfrak{A}$. Mówimy, że struktura $\mathfrak{A}$ jest ***o-minimalna***, gdy każdy zbiór definiowalny w $\mathfrak{A}$ jest skończoną sumą przedziałów. Teoria jest ***o-minimalna***, gdy każdy jej model jest *o*-minimalny.

Minimalność porządkowa

Chociaż struktury *o*-minimalne nie są silnie minimalne, to oba pojęcia minimalności mają wiele wspólnego. W strukturach *o*-minimalnych również definiowalnych jest tak mało zbiorów, jak to tylko możliwe. Ponadto, algebraicznie domknięte podstruktury struktury *o*-minimalnej spełniają Własność Wymiany, co pozwala na wprowadzenie odpowiednich pojęć niezależności oraz wymiaru. Jednak struktury *o*-minimalne nie są nieprzeliczalnie kategoryczne.

Oto kilka ważnych przykładów struktur *o*-minimalnych:

- $\mathbb{Q}_< = (\mathbb{Q}, <)$
- $\mathbb{R}_{or} = (\mathbb{R}, <, +, \cdot, 0, 1)$
- $\mathbb{R}_{exp} = (\mathbb{R}, <, exp, +, \cdot, 0, 1)$, gdzie funkcja $exp(x)$ interpretowana jest jako e^x.

Minimalność porządkowa

Fakt, że dwie pierwsze z tych struktur są *o*-minimalne wynika z tego, że teorie: gęstych liniowych porządków bez końców oraz teoria struktury $\mathbb{R}_{or}$ dopuszczają eliminację kwantyfikatorów (zobacz niżej).

- Problem, czy $\mathbb{R}_{exp}$ jest *o*-minimalna (pozytywnie) rozstrzygnął Alex Wilkie, pokazując, iż teoria ta jest modelowo zupełna (zobacz niżej). Pozostaje problemem otwartym, czy jest ona rozstrzygalna.
- Struktura złożona z liczb naturalnych z dodawaniem, mnożeniem oraz zwykłym porządkiem nie jest *o*-minimalna. W istocie, zbiory definiowalne tej struktury są wielce skomplikowane.

Eliminacja kwantyfikatorów

Mówimy, że teoria T ***dopuszcza eliminację kwantyfikatorów***, gdy dla każdej formuły $\psi(\overrightarrow{x})$ języka tej teorii istnieje formuła $\varphi(\overrightarrow{x})$ nie zawierająca kwantyfikatorów (a więc będąca kombinacją Boolowską formuł atomowych) taka, że $\psi(\overrightarrow{x})$ oraz $\varphi(\overrightarrow{x})$ są równoważne na gruncie teorii T (czyli gdy ich materialna równoważność jest logiczną konsekwencją T). Zamiast zwrotu „równoważne na gruncie teorii T" używamy zwrotu: „T-równoważne".

- Jeśli T dopuszcza eliminację kwantyfikatorów, to możemy uzyskać informacje o jej ***rozstrzygalności***.
- Jeśli T dopuszcza eliminację kwantyfikatorów, to zbiory definiowalne w jej modelach są definiowalne przez kombinacje Boolowskie formuł, a więc przez formuły o małym stopniu złożoności.
- Dopuszczanie eliminacji kwantyfikatorów wiąże się także z zupełnością lub modelową zupełnością teorii (zobacz niżej).

Eliminacja kwantyfikatorów

Może warto przypomnieć: ***formuła*** $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ ***jest logiczną konsekwencją zbioru zdań*** Ψ, gdy dla każdego modelu $\mathfrak{A}$ zbioru Ψ oraz każdego ciągu $a_1, \ldots, a_n$ elementów $dom(\mathfrak{A})$ zachodzi $\mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n]$. A zatem formuła $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ jest logiczną konsekwencją zbioru ***zdań*** Ψ, gdy $\Psi \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \, \psi(x_1, \ldots, x_n)$.

W ogólności, pokazywanie, że dana teoria T dopuszcza eliminację kwantyfikatorów wykorzystuje następującą metodę dowodzenia, że każda formuła jest równoważna (na gruncie teorii T) kombinacji Boolowskiej formuł ze zbioru bazowego Ψ:

- Pokazujemy, że każda formuła atomowa jest równoważna (na gruncie teorii T) kombinacji Boolowskiej formuł ze zbioru bazowego Ψ.
- Pokazujemy, że jeśli φ jest kombinacją Boolowską formuł ze zbioru bazowego Ψ, to $\exists x \varphi$ jest równoważna (na gruncie teorii T) kombinacji Boolowskiej formuł ze zbioru bazowego Ψ.

Eliminacja kwantyfikatorów: przykłady

Teoria gęstego liniowego porządku bez końców dopuszcza eliminację kwantyfikatorów (Langford, 1927). Za formuły bazowe przyjmujemy formuły atomowe:

- $x_m \doteq x_n$
- $x_m \leqslant x_n$.

Boolowskie kombinacje tych formuł to dokładnie wszystkie formuły teorii T bez kwantyfikatorów, czyli formuły otwarte teorii T.
Pokażemy, że każda formuła teorii T jest T-równoważna z formułą otwartą tej teorii.

Dla skrótu, będziemy używać wyrażenia $x_m < x_n$ zamiast wyrażenia $x_m \leqslant x_n \wedge \neg x_m \doteq x_n$.

Eliminacja kwantyfikatorów: przykład

Przestawieniem zmiennych $x_0, \ldots, x_n$ nazywamy każdą koniunkcję o postaci $\chi_0 \wedge \ldots \wedge \chi_{n-1}$, gdzie $y_0, \ldots, y_n$ jest przenumerowaniem zmiennych $x_0, \ldots, x_n$, a każda formuła χ_i jest albo kształtu $y_i < y_{i+1}$, albo kształtu $y_i \doteq y_{i+1}$. Jest oczywiste, że takie przenumerowanie zmiennych jest zawsze wykonalne, a więc wykonalne jest też zawsze ich przestawienie we wspomnianym wyżej sensie.

Następujące fakty dotyczące przestawień zmiennych powinny być oczywiste:

- Istnieje skończenie wiele przestawień zmiennych $x_0, \ldots, x_n$.
- W każdej strukturze uporządkowanej liniowo $\mathfrak{A}$, każdy ciąg $a_0, \ldots, a_n$ spełnia jakieś przestawienie $x_0, \ldots, x_n$.
- Jeśli $\psi(x_0, \ldots, x_n)$ jest formułą otwartą, a χ przestawieniem $x_0, \ldots, x_n$, to co najmniej jedna z formuł: $\chi \rightarrow \psi$ lub $\chi \rightarrow \neg\psi$ jest twierdzeniem teorii liniowego porządku.

Eliminacja kwantyfikatorów: przykład

- *Każda formuła otwarta $\psi(x_0, \ldots, x_n)$ jest T-równoważna albo z jakąś formułą o postaci $x_0 < x_0$, bądź $x_0 \doteq x_0$, albo z alternatywą skończenie wielu przestawień zmiennych $x_0, \ldots, x_n$.*

Szkic dowodu. Dla $n = 0$ formuła otwarta $\psi(x_0)$ jest zbudowana z formuł $x_0 \leqslant x_0$ oraz $x_0 \doteq x_0$. Ponieważ $T \models x_0 \leqslant x_0$ oraz $T \models x_0 \doteq x_0$, więc zachodzi alternatywa:

- $T \models \psi$ i $T \models \psi \equiv x_0 \doteq x_0$ lub
- $T \models \neg\psi$ i $T \models \psi \equiv x_0 < x_0$.

Eliminacja kwantyfikatorów: przykład

Niech $n > 0$ i $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ będzie formułą otwartą. Jeśli $T \models \neg\varphi$, to φ jest T-równoważna z formułą $x_0 < x_0$. Jeśli zaś nie zachodzi $T \models \neg\varphi$, to rozważmy dowolny model $\mathfrak{A}$ dla T i dowolny ciąg $a_0, \ldots, a_n$, spełniający φ w $\mathfrak{A}$. Wiemy, że $a_0, \ldots, a_n$ spełnia w $\mathfrak{A}$ jakieś przestawienie ψ zmiennych $x_0, \ldots, x_n$. A zatem nie zachodzi $T \models \psi \to \neg\varphi$. Tak więc, musi zachodzić $T \models \psi \to \varphi$. Tworzymy alternatywę χ wszystkich przestawień ψ zmiennych $x_0, \ldots, x_n$, dla których zachodzi $T \models \psi \to \varphi$. Wtedy χ ma co najmniej jeden człon, ale ma tylko skończenie wiele członów. Mamy wtedy: $T \models \varphi \to \chi$. Z kolei z definicji χ mamy: $T \models \chi \to \varphi$. Tak więc, φ jest T-równoważna z kombinacją Boolowską χ formuł bazowych.

W dowodzie powyższego faktu korzystano tylko z własności liniowego porządku. Natomiast w dowodzie faktu poniższego trzeba już korzystać z własności gęstości porządku:

Eliminacja kwantyfikatorów: przykład

- *Każda formuła φ jest T-równoważna z pewną formułą otwartą ψ. Ponadto, jeśli wszystkie zmienne wolne φ są wśród $x_0, \ldots, x_n$, gdzie $n \geqslant 0$, to ψ może zostać dobrana tak, aby wszystkie jej zmienne wolne były wśród $x_0, \ldots, x_n$.*

Szkic dowodu. Aby dowieść, że każda formuła φ jest T-równoważna z pewną formułą otwartą ψ, wystarczy pokazać, iż dla każdej formuły otwartej $\psi(x_0, \ldots, x_n)$, formuła $\exists x_m \psi$ jest T-równoważna z formułą otwartą. Jeśli $m > n$, to $\exists x_m \psi$ jest oczywiście T-równoważna z ψ, gdyż x_m nie występuje w ψ. Możemy więc założyć, że $m \leqslant n$. Możemy nawet przyjąć $m = n$, poprzez stosowne przemianowanie zmiennych.

Eliminacja kwantyfikatorów: przykład

Na mocy przed chwilą udowodnionego faktu możemy założyć, że ψ jest albo postaci $x_0 < x_0$, albo $x_0 = x_0$, albo alternatywą skończenie wielu przestawień zmiennych $x_0, \ldots, x_n$. Jeżeli ψ jest postaci $x_0 < x_0$, albo $x_0 = x_0$, to $\exists x_n \psi$ jest T-równoważna z ψ. Rozważmy zatem pozostały przypadek. Niech ψ będzie alternatywą $\chi_0 \vee \ldots \vee \chi_p$, gdzie każda χ_i jest przestawieniem zmiennych $x_0, \ldots, x_n$. Wtedy:
$T \models \exists x_n \psi \ \equiv \ \exists x_n \chi_0 \vee \ldots \vee \exists x_n \chi_p$.

Jeżeli $n = 1$, to każda z formuł $\exists x_1 \chi_i$ musi być jednej z postaci:

- $\exists x_1 \; x_0 < x_1$
- $\exists x_1 \; x_0 \doteq x_1$
- $\exists x_1 \; x_1 < x_0$.

Eliminacja kwantyfikatorów: przykład

Na mocy własności teorii T wiemy, że każdy z tych przypadków jest twierdzeniem T. W konsekwencji, $\exists x_1\, \psi$ jest twierdzeniem w T i jest T-równoważna z $x_0 \doteq x_0$.
Niech teraz $n > 1$. Od każdego przestawienia χ_i zmiennych $x_0, \ldots, x_n$ możemy przejść do przestawienia χ_i^* zmiennych $x_0, \ldots, x_{n-1}$, poprzez opuszczenie zmiennej x_n. Wtedy dla $0 \leqslant i \leqslant p$ mamy:

- $T \models \exists x_n \chi_i \ \equiv \ \chi_i^*$, a stąd:
- $T \models \exists x_n \chi_i \ \equiv \ \chi_0^* \vee \ldots \vee \chi_p^*$.

Eliminacja kwantyfikatorów: przykład

Tak więc, pokazaliśmy, iż $\exists x_m \psi$ jest T-równoważna formule otwartej. W dodatku, pokazaliśmy, że jeśli $n > 0$ i $\psi(x_0, \ldots, x_n)$ jest formułą otwartą, to $\exists x_n \psi$ jest T-równoważna z formułą otwartą o postaci $\chi(x_0, \ldots, x_{n-1})$. Jeśli $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ jest dowolną formułą ($n \geqslant 0$), to:

- $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ jest T-równoważna z pewną formułą otwartą $\psi(x_0, \ldots, x_n, \ldots, x_{n+m})$ oraz
- $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ jest T-równoważna z $\exists x_{n+1} \ldots \exists x_{n+m} \varphi$, a zatem
- $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ jest T-równoważna z $\exists x_{n+1} \ldots \exists x_{n+m} \psi$;
- z kolei, $\exists x_{n+1} \ldots \exists x_{n+m} \psi$ jest T-równoważna z formułą otwartą o postaci $\chi(x_0, \ldots, x_n)$, a więc ostatecznie
- φ jest T-równoważna z χ.

Eliminacja kwantyfikatorów: przykład

Konsekwencją tego, że teoria T gęstych liniowych porządków bez końców dopuszcza eliminację kwantyfikatorów jest zupełność tej teorii. Niech bowiem φ będzie dowolnym zdaniem. Wtedy φ jest T-równoważna z pewną formułą otwartą $\psi(x_0)$. Mamy jednak dla dowolnej formuły otwartej tej teorii: albo $T \models \psi$, albo $T \models \neg\psi$. A zatem albo $T \models \varphi$, albo $T \models \neg\varphi$, czyli T jest zupełna.

Podobnymi metodami można pokazać, że np. czysta teoria identyczności dopuszcza eliminację kwantyfikatorów, a więc również jest zupełna.

Eliminacja kwantyfikatorów: przykłady

Metodę eliminacji kwantyfikatorów stosowano dla pokazania zupełności (oraz rozstrzygalności) wielu innych teorii, np.:

- arytmetyki z dodawaniem a bez mnożenia, Presburger 1929;
- teorii ciał algebraicznie domkniętych i ciał rzeczywiście domkniętych, Tarski 1948;
- teorii algebr Boole'a, Tarski 1949;
- teorii wszystkich modeli dobrze uporządkowanych, Mostowski i Tarski 1949;
- teorii grup przemiennych, Szmielew 1955.

W teoriach, które rozstrzygalne nie są (arytmetyka, teoria mnogości, teoria grup, teoria ciał, teoria częściowego porządku) metoda eliminacji kwantyfikatorów nie może mieć zastosowania.

Modelowa zupełność

Mówimy, że teoria T jest ***modelowo zupełna***, gdy dla każdych jej modeli $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$: jeśli $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

Pojęcia zupełności i modelowej zupełności nie pokrywają się — istnieją teorie, które są zupełne, lecz nie modelowo zupełne oraz na odwrót, np.:

- Teoria gęstego liniowego porządku z elementem pierwszym i ostatnim jest zupełna, ale nie jest modelowo zupełna. Podobnie: teoria następnika, teoria mniejszości, teoria standardowego liniowo uporządkowanego modelu arytmetyki.
- Teoria ciał algebraicznie domkniętych jest modelowo zupełna, ale nie jest zupełna.

Teorią modelowo zupełną jest teoria ciał rzeczywiście domkniętych, a także teoria uporządkowanych ciał rzeczywiście domkniętych.

Modelowa zupełność

- A. *Teoria T (w języku L) jest modelowo zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego jej modelu $\mathfrak{A}$, zbiór $T \cup \Delta(\mathfrak{A})$ jest teorią zupełną w języku $L_{dom(\mathfrak{A})}$.*
- B. *Jeśli T jest teorią modelowo zupełną, która ma model pierwszy, to T jest zupełna (model $\mathfrak{A}$ dla T jest modelem* ***pierwszym*** *dla T, gdy każdy model teorii T ma podstrukturę izomorficzną z $\mathfrak{A}$).*

- C. *Jeśli T jest teorią modelowo zupełną i dowolne jej dwa modele są izomorficznie wkładalne w jakiś jej trzeci model, to T jest zupełna.*

Modelowa zupełność

Szkic dowodu A. Przypuśćmy, że istnieje struktura $\mathfrak{A}$ taka, że:

- $\mathfrak{A} \models T$
- $T \cup \Delta(\mathfrak{A})$ nie jest teorią zupełną w języku $L_{dom(\mathfrak{A})}$.

Wtedy istnieje zdanie ψ w języku $L_{dom(\mathfrak{A})}$ takie, że ani ψ, ani $\neg\psi$ nie jest logiczną konsekwencją $T \cup \Delta(\mathfrak{A})$. Niech $\overrightarrow{a}$ będzie ciągiem wszystkich elementów zbioru $dom(\mathfrak{A})$. Niech np. $(\mathfrak{A}, \overrightarrow{a}) \models \psi$ (przypadek $(\mathfrak{A}, \overrightarrow{a}) \models \neg\psi$ rozpatrujemy analogicznie). Wtedy $T \cup \Delta(\mathfrak{A}) \cup \{\neg\psi\}$ jest niesprzeczny, a zatem ma model. Ponieważ jest to model dla $\Delta(\mathfrak{A})$, więc możemy założyć, że jest to model o postaci $(\mathfrak{B}, \overrightarrow{a})$, gdzie $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. Ponieważ $(\mathfrak{A}, \overrightarrow{a}) \models \psi$, a $(\mathfrak{B}, \overrightarrow{a}) \models \neg\psi$, więc $(\mathfrak{A}, \overrightarrow{a})$ oraz $(\mathfrak{B}, \overrightarrow{a})$ nie są elementarnie równoważne. W konsekwencji, $\mathfrak{B}$ nie jest elementarnym rozszerzeniem $\mathfrak{A}$. Ponieważ $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, więc tym samym pokazaliśmy, że T nie jest modelowo zupełna.

Modelowa zupełność

Z drugiej strony, załóżmy, że $T \cup \Delta(\mathfrak{A})$ jest zupełna dla każdego modelu $\mathfrak{A}$ dla T. Niech $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, gdzie $\mathfrak{B} \models T$. Ponieważ $T \cup \Delta(\mathfrak{A})$ jest zupełna, więc $(\mathfrak{A}, \overrightarrow{a}) \equiv \mathfrak{B}, \overrightarrow{a})$, a zatem $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, co oznacza, iż T jest modelowo zupełna.

Szkic dowodu B. Niech $\mathfrak{A}_1$ i $\mathfrak{A}_2$ będą dowolnymi modelami T. Aby pokazać, że T jest zupełna, musimy udowodnić, że modele te są elementarnie równoważne.

Modelowa zupełność

Niech $\mathfrak{A}_0$ będzie modelem pierwszym dla T. Istnieją zatem struktury $\mathfrak{B}_1$ i $\mathfrak{B}_2$ takie, że:

- $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{A}_1$ i $\mathfrak{B}_2 \subseteq \mathfrak{A}_2$ oraz
- $\mathfrak{A}_0 \cong \mathfrak{B}_1$ oraz $\mathfrak{A}_0 \cong \mathfrak{B}_2$, a zatem $\mathfrak{B}_1 \cong \mathfrak{B}_2$.

Ponieważ T jest modelowo zupełna, więc $\mathfrak{B}_1 \prec \mathfrak{A}_1$ oraz $\mathfrak{B}_2 \prec \mathfrak{A}_2$, co z kolei implikuje, iż $\mathfrak{B}_1 \equiv \mathfrak{A}_1$ oraz $\mathfrak{B}_2 \equiv \mathfrak{A}_2$. Ponieważ ponadto $\mathfrak{B}_1 \cong \mathfrak{B}_2$, więc otrzymujemy $\mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{A}_2$, co pokazuje, że T jest zupełna.

Test Robinsona

Zakładamy, że słuchacze pamiętają pojęcie prefiksowej postaci normalnej w KRP. Mówimy, że formuła ψ ***pierwotna***, jeśli jest ona formułą o prefiksie egzystencjalnym, której matryca jest koniunkcją formuł atomowych oraz negacji formuł atomowych. Zachodzi następujące twierdzenie, nazywane **Testem Robinsona na Modelową Zupełność**:

- *Teoria T jest modelowo zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych jej modeli $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$, jeśli $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, to dla każdej formuły pierwotnej ψ oraz dowolnego wartościowania w (w $\mathfrak{A}$): jeśli $\mathfrak{B} \models_w \psi$, to $\mathfrak{A} \models_w \psi$.*

- Inne jeszcze twierdzenia charakteryzujące modelową zupełność podajemy w punkcie dotyczącym łańcuchów modeli.

Modelowa zupełność

Własność modelowej zupełności charakteryzuje także następujące twierdzenie:

- *Następujące warunki są równoważne dla dowolnej teorii T w języku L:*
  1. *T jest modelowo zupełna.*
  2. *Dla każdego modelu $\mathfrak{A}$ teorii T, teoria $T \cup \Delta(\mathfrak{A})$ jest zupełna w języku $L_{dom(\mathfrak{A})}$.*
  3. *Jeśli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są modelami T takimi, że $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, to każde zdanie egzystencjalne, które jest prawdziwe w $\mathfrak{B}_{dom(\mathfrak{A})}$, jest też prawdziwe w $\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}$. (Tu $\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}$ oznacza $(\mathfrak{A}, \overrightarrow{a})$, gdzie $\overrightarrow{a}$ jest ciągiem wszystkich elementów $dom(\mathfrak{A})$).*
  4. *Dla każdej formuły egzystencjalnej φ istnieje formuła uniwersalna ψ taka, że $T \models \varphi \equiv \psi$.*

Modelowa zupełność

1. $\Rightarrow$ 2. Niech T będzie modelowo zupełna, a $\mathfrak{A}$ będzie modelem T. Ponieważ każde rozszerzenie $\mathfrak{A}$ jest rozszerzeniem elementarnym, więc $T \cup \Delta(\mathfrak{A})$ ma dokładnie takie same modele jak diagram elementarny $Th(\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})})$, a więc $T \cup \Delta(\mathfrak{A})$ jest zupełna.

2. $\Rightarrow$ 3. Jeśli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są modelami T takimi, że $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}$ i $\mathfrak{B}_{dom(\mathfrak{A})}$ są modelami teorii zupełnej $T \cup \Delta(\mathfrak{A})$. A zatem każde zdanie egzystencjalne, które jest prawdziwe w $\mathfrak{B}_{dom(\mathfrak{A})}$, jest też prawdziwe w $\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}$.

Modelowa zupełność

3. $\Rightarrow$ 4. Niech $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$ będzie formułą egzystencjalną. Tworzymy zdanie egzystencjalne $\varphi(c_1, \ldots, c_n)$, gdzie $c_1, \ldots, c_n$ są nowymi stałymi. Niech $L^* = L \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$. Niech Γ będzie zbiorem wszystkich zdań uniwersalnych γ z L^* takich, że $T \models \varphi \to \gamma$. Niech $(\mathfrak{A}, b_1, \ldots, b_n)$ będzie modelem dla $T \cup \Gamma$, a $\Delta(\mathfrak{A})$ diagramem prostym struktury $\mathfrak{A}$. Każda koniunkcja $\chi(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)$ zdań z $\Delta(\mathfrak{A})$ jest niesprzeczna z $T \cup \{\varphi\}$, ponieważ w $\mathfrak{A}$ zdanie uniwersalne

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m \neg\chi(x_1, \ldots, x_m, b_1, \ldots, b_n),$$

jest fałszywe a więc nie należy do Γ i nie jest konsekwencją $T \cup \{\varphi\}$. Tak więc, $T \cup \{\varphi\} \cup \Delta(\mathfrak{A})$ ma model, powiedzmy $\mathfrak{B}_{dom(\mathfrak{A})}$. Wtedy $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ oraz $\mathfrak{B} \models T$. Na mocy 3., każde zdanie egzystencjalne prawdziwe w $\mathfrak{B}_{dom(\mathfrak{A})}$ jest też prawdziwe w $\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}$. W szczególności, zdanie egzystencjalne φ jest prawdziwe w $(\mathfrak{A}, b_1, \ldots, b_n)$.

Modelowa zupełność

Otrzymujemy zatem, że $T \cup \Gamma \models \varphi$, czyli każdy model dla $T \cup \Gamma$ jest modelem φ. Na mocy twierdzenia o zwartości istnieją $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ takie, że $T \models (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n) \to \varphi$, a z tego wynika, że $T \models (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n) \equiv \varphi$. W koniunkcji $\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n$ przesuwamy wszystkie kwantyfikatory do prefiksu i zastępując stałe indywidualne $c_1, \ldots, c_n$ przez zmienne $x_1, \ldots, x_n$ otrzymujemy formułę uniwersalną ψ taką, że $T \models \varphi \equiv \psi$.

4. $\Rightarrow$ 1. Na mocy 4., stosując indukcję po złożoności formuł, widzimy, że dla *każdej* formuły φ istnieje formuła uniwersalna ψ taka, że $T \models \varphi \equiv \psi$.

Modelowa zupełność

Niech teraz:

- $\mathfrak{A} \models T$, $\mathfrak{B} \models T$ oraz $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$
- $a_1, \ldots, a_n \in dom(\mathfrak{A})$
- $\mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$
- oraz niech ψ będzie formułą uniwersalną taką, że $T \models \varphi \equiv \psi$.

Wtedy:

- $\mathfrak{B} \models \psi[a_1, \ldots, a_n]$
- $\mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n]$
- $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$.

Podobnie dla $\neg\varphi$. Zatem $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, czyli T jest modelowo zupełna.

Modelowa zupełność

Podobnymi metodami dowodzi się następującej charakterystyki teorii modelowo zupełnych:

Załóżmy, że T nie ma modeli skończonych i $\kappa \geqslant \overline{\overline{L}}$. Na to, aby T była modelowo zupełna potrzeba i wystarcza, aby zachodziły następujące dwa warunki:

1. *$T \cup \Delta(\mathfrak{A})$ jest zupełna, dla każdego modelu $\mathfrak{A}$ dla T mocy κ.*
2. *Jeśli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są modelami T mocy κ takimi, że $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, to każde zdanie egzystencjalne prawdziwe w $\mathfrak{B}_{dom(\mathfrak{A})}$, jest też prawdziwe w $\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}$.*

Modele ilorazowe

Niech $\mathfrak{A} = (A, \{r_i : i \in I\}, \{f_j : j \in J\})$ będzie strukturą, a E relacją równoważności na zbiorze A. Mówimy, że E jest ***kongruencją*** w strukturze $\mathfrak{A}$, gdy dla wszystkich $x_1, \ldots, x_n$, wszystkich $y_1, \ldots, y_n$, wszystkich n-argumentowych relacji r_i oraz wszystkich n-argumentowych funkcji f_j:

- jeśli $x_1 E y_1, \ldots, x_n E y_n$, to $r_i(x_1, \ldots, x_n)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi $r_i(y_1, \ldots, y_n)$;
- jeśli $x_1 E y_1, \ldots, x_n E y_n$, to $f_j(x_1, \ldots, x_n) E f_j(y_1, \ldots, y_n)$.

- Najmniejszą (względem inkluzji) kongruencją w strukturze $\mathfrak{A}$ jest relacja identyczności na zbiorze $dom(\mathfrak{A})$, a największą taką kongruencją jest relacja pełna w zbiorze $dom(\mathfrak{A})$.
- Wszystkie kongruencje dowolnej algebry tworzą kratę, będącą podkratą zupełną kraty wszystkich równoważności określonych na uniwersum tej algebry.

Modele ilorazowe

Niech $\mathfrak{A} = (A, \{r_i : i \in I\}, \{f_j : j \in J\})$ będzie strukturą, a E kongruencją na zbiorze A. ***Strukturę ilorazową*** $\mathfrak{A}/E$ definiujemy w sposób następujący:

- $\mathfrak{A}/E = (A/E, \{r_i^E : i \in I\}, \{f_j^E : j \in J\})$, gdzie
- dla każdej n-argumentowej relacji r_i definiujemy relację r_i^E: $r_i^E([x_1]_E, \ldots, [x_n]_E)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $r_i(x_1, \ldots, x_n)$;
- dla każdej n-argumentowej funkcji f_j definiujemy funkcję f_j^E: $f_j^E([x_1]_E, \ldots, [x_n]_E) = [f_j(x_1, \ldots, x_n)]_E$.

Ponieważ E jest kongruencją na A, więc powyższa definicja jest poprawna (nie zależy od wyboru elementów z klas abstrakcji).

Zachowawczość

Kongruencje związane są z homomorfizmami algebr. Każda funkcja $f : A \to B$ wyznacza pewną relacje równoważności na A. Definiujemy mianowicie: $x \sim_f y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) = f(y)$.
Jeśli $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ jest homomorfizmem algebry $\mathfrak{A}$ na algebrę $\mathfrak{B}$, to relacja $\sim_h$ zdefiniowana wzorem: $x \sim_f y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) = f(y)$ jest kongruencją algebry $\mathfrak{A}$.
Jeśli, z drugiej strony, E jest kongruencją algebry $\mathfrak{A}$, to ***odwzorowanie kanoniczne*** $\pi_E : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/E$ jest homomorfizmem.

- Każdy obraz homomorficzny algebry $\mathfrak{A}$ jest izomorficzny z pewną algebrą ilorazową algebry $\mathfrak{A}$.
- Każda algebra ilorazowa algebry $\mathfrak{A}$ jest izomorficzna z pewnym homomorficznym obrazem algebry $\mathfrak{A}$.

Produkty proste

Jeśli $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ jest rodziną struktur relacyjnych tej samej sygnatury σ, to ***produkt*** $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ tej rodziny definiujemy następująco. Najpierw kilka oznaczeń.

- Dziedziną struktury $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ jest produkt kartezjański $\prod_{i \in I} dom(\mathfrak{A}_i)$ (niejednoznaczność symbolu $\prod$ jest niegroźna; likwiduje ją kontekst).
- Dla $a \in dom(\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i)$ przyjmiemy oznaczenie: a^i dla i-tej współrzędnej ciągu a.
- Dla dowolnego symbolu $X \in \sigma$, przez X_i rozumiemy jego interpretację w strukturze $\mathfrak{A}_i$.

Produkty proste

Przy powyżej przyjętych oznaczeniach definiujemy:

- Jeśli c jest stałą indywidualną, to interpretacją c w $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ jest ciąg $(c_i)_{i \in I}$.
- Jeśli F jest n-argumentowym symbolem funkcyjnym, to interpretacją F w $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ jest odwzorowanie, które każdemu ciągowi $(a_1, \ldots, a_n) \in (\prod_{i \in I} dom(\mathfrak{A}_i))^n$ przyporządkowuje ciąg: $(F_i(a_1^i, \ldots, a_n^i))_{i \in I}$.
- Jeśli R jest n-argumentowym predykatem, to interpretacją R w $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ jest zbiór: $\{(a_1, \ldots, a_n) \in (dom(\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i))^n : \forall i \in I \ (a_1^i, \ldots, a_n^i) \in R_i\}$.

Produkty proste

Wprost z tej definicji widzimy, że dla dowolnej formuły atomowej $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ oraz dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in \prod_{i \in I} dom(\mathfrak{A}_i)$ następujące warunki są równoważne:

- $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models \psi[a_1, \ldots, a_n]$.
- Dla wszystkich $i \in I$, $\mathfrak{A}_i \models \psi[a_1^i, \ldots, a_n^i]$.

- Spełnianie formuły atomowej w produkcie prostym jest zatem równoważne jej spełnianiu we ***wszystkich*** czynnikach tego produktu.
- Jest to bardzo mocny warunek. Jego osłabienie uzyskujemy, gdy żądamy prawdziwości w ***prawie wszystkich*** czynnikach — to prowadzi do produktów zredukowanych.

Produkty zredukowane

Niech F będzie filtrem w algebrze Boole'a $\wp(I)$ wszystkich podzbiorów zbioru indeksów I. Niech $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ będzie rodziną struktur relacyjnych tej samej sygnatury σ. Definiujemy relację $\approx_F$ na zbiorze $\prod_{i \in I} dom(\mathfrak{A}_i)$ w sposób następujący:

- $(a^i)_{i \in I} \approx_F (b^i)_{i \in I}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{i \in I : a^i = b^i\} \in F$.

Wtedy $\approx_F$ jest relacją równoważności, czego dowodzi się korzystając z własności filtrów w rodzinach zbiorów.

Rodzinę klas relacji $\approx_F$ oznaczamy przez $\prod_{i \in I} dom(\mathfrak{A}_i)/F$. Jeśli $a \in \prod_{i \in I} dom(\mathfrak{A}_i)$, to klasę abstrakcji a względem $\approx_F$ będziemy oznaczali przez $[a]_F$.

Produkty zredukowane

Produkt zredukowany rodziny struktur $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ względem filtru F jest strukturą $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/F$ taką, że $dom(\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/F) = \prod_{i \in I} dom(\mathfrak{A}_i)/F$ oraz:

1. Jeśli c jest stałą indywidualną, to interpretacją c w $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/F$ jest klasa równoważności $[(c_i)_{i \in I}]_F$ (gdzie c_i jest interpretacją c w $\mathfrak{A}_i$).
2. Niech R będzie n-argumentowym predykatem i niech $[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F \in \prod_{i \in I} dom(\mathfrak{A}_i)/F$. Wtedy: $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/F \models R(x_1, \ldots, x_n)[[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models R(x_1, \ldots, x_n)[a_1^i, \ldots, a_n^i]\} \in F$.
3. Niech f będzie n-argumentowym symbolem funkcyjnym i niech $[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F \in \prod_{i \in I} dom(\mathfrak{A}_i)/F$. Wtedy interpretacją f w $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/F$ jest odwzorowanie, które każdemu układowi argumentów $[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F$ przyporządkowuje klasę równoważności $[(f_i(a_1^i, \ldots, a_n^i))_{i \in I}]_F$.

Produkty zredukowane

Poprawność powyższej definicji wynika z własności relacji $\approx_F$.
Wprost z tej definicji widzimy, że dla dowolnej formuły atomowej $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ oraz wszystkich $a_1, \ldots, a_n \in \prod_{i \in I} dom(\mathfrak{A}_i)$ zachodzi równoważność:

- $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F \models \psi[[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi[a_1^i, \ldots, a_n^i]\} \in F$.

- Ponieważ filtry (w rodzinie podzbiorów ustalonego zbioru indeksów) odpowiadają „dużym" zbiorom, więc otrzymujemy formalną charakterystykę zwrotu „zdanie prawdziwe prawie wszędzie."

Produkty zredukowane

- Maksymalne filtry właściwe nazywamy ***ultrafiltrami***.
- Filtr F (nad zbiorem T) jest ultrafiltrem wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru $A \subseteq T$: $A \in F$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T - A \notin F$.
- Każdy filtr daje się rozszerzyć do ultrafiltru.
- Jeśli F jest ultrafiltrem nad T, to produkt zredukowany $\prod\limits_{t \in T} \mathfrak{A}_t / F$ nazywamy ***ultraproduktem***.
- Jeśli wszystkie struktury $\mathfrak{A}_t$ są identyczne (czyli gdy $\mathfrak{A}_t = \mathfrak{A}$ dla $t \in T$), to ultraprodukt $\prod\limits_{t \in T} \mathfrak{A}_t / F$ nazywamy ***ultrapotęgą*** struktury $\mathfrak{A}$. Dla ultrapotęg używa się czasem oznaczenia $\mathfrak{A}^T / F$.

Twierdzenie Łosia

Twierdzenie Łosia.
Niech $\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ *będzie dowolną rodziną struktur tego samego typu, a* F *ultrafiltrem nad zbiorem* I. *Dla dowolnej formuły* $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ *o zmiennych wolnych* $x_1, \ldots, x_n$ *oraz dowolnych* $a_1, \ldots, a_n \in \prod_{i \in I} dom(\mathfrak{A}_i)$ *następujące warunki są równoważne:*

- $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F \models \psi[[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$
- $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi[a_1^i, \ldots, a_n^i]\} \in F$.

- Dowód przebiega przez indukcję po złożoności formuł. Dla formuł atomowych teza wynika bezpośrednio z definicji produktu zredukowanego, jak już wcześniej pisaliśmy.
- Pokażemy dla przykładu trzy kroki dowodu: dla negacji, implikacji oraz kwantyfikatora egzystencjalnego.

Dowód Twierdzenia Łosia

Niech $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ będzie formułą $\neg\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Dla wszystkich $a_1, \ldots, a_n \in \prod_{i \in I} dom(\mathfrak{A}_i)$ następujące warunki są równoważne:

- $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F \models \psi[[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$
- $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F \not\models \varphi[[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$.

Na mocy założenia indukcyjnego, ostatni warunek zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy: $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \not\models \varphi[a_1^i, \ldots, a_n^i]\} \notin F$. Ponieważ F jest ultrafiltrem, więc $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \not\models \varphi[a_1^i, \ldots, a_n^i]\} \notin F$ wtedy i tylko wtedy, gdy dopełnienie tego zbioru należy do F. A zatem następujące warunki są równoważne:

- $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F \models \psi[[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$
- $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi[a_1^i, \ldots, a_n^i]\} \in F$.

Dowód Twierdzenia Łosia

Z kolei, niech $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ będzie formułą $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \chi(x_1, \ldots, x_n)$. Dla wszystkich $a_1, \ldots, a_n \in \prod\limits_{i \in I} dom(\mathfrak{A}_i)$, zachodzi

$\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F \models \psi[[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą oba:

- $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F \models \varphi[[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$ oraz
- $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F \models \chi[[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$.

Na mocy założenia indukcyjnego, mamy:

- $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi[a_1^i, \ldots, a_n^i]\} \in F$ oraz
- $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \chi[a_1^i, \ldots, a_n^i]\} \in F$.

Ponieważ F jest filtrem, więc te dwa zbiory należą do F wtedy i tylko wtedy, gdy ich przekrój należy do F, a ich przekrój jest zbiorem:

- $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi[a_1^i, \ldots, a_n^i]\} \in F$.

Dowód Twierdzenia Łosia

Niech wreszcie $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ będzie formułą $\exists x_0\, \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Niech $a_1, \ldots, a_n \in \prod\limits_{i \in I} dom(\mathfrak{A}_i)$ i przypuśćmy, że:

- $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F \models \psi[[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$.

Wtedy istnieje $a_0 \in \prod\limits_{i \in I} dom(\mathfrak{A}_i)$ taki, że: $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F \models \varphi[[a_0]_F, [a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$.

Na mocy założenia indukcyjnego, mamy:

- $X = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi[a_0^i, a_1^i, \ldots, a_n^i]\} \in F$.

Jeżeli $i \in X$, to $\mathfrak{A}_i \models \exists x_0\, \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)[[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$. Tak więc, mamy:

- $X \subseteq \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi[a_1^i, \ldots, a_n^i]\} \in F$.

Dowód Twierdzenia Łosia

Z drugiej strony, przypuśćmy, że:

- $Y = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi[a_1^i, \ldots, a_n^i]\} \in F$.

Definiujemy ciąg $a_0 = (a_0^i)_{i \in I}$ w sposób następujący:

- jeśli $i \in Y$, to a_0^i jest elementem $dom(\mathfrak{A}_i)$ takim, że $\mathfrak{A}_i \models \varphi[a_0^i, a_1^i, \ldots, a_n^i]$;
- jeśli $i \in Y$, to a_0^i można wybrać dowolnie w $dom(\mathfrak{A}_i)$.

- Wtedy: $Y \subseteq \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi[a_0^i, a_1^i, \ldots, a_n^i]\} \in F$.

Tak więc, na mocy założenia indukcyjnego:

- $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F \models \psi[[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$, co kończy dowód.

Zastosowania Twierdzenia Łosia

- A. *Jeśli każdy skończony podzbiór teorii T ma model, to T ma model.*

Niech bowiem I będzie rodziną wszystkich skończonych podzbiorów zbioru T. Dla każdego $i \in I$ niech $\mathfrak{A}_i$ będzie modelem i (który istnieje, na mocy założenia).

Dla każdej formuły ψ z T, niech X_ψ będzie zbiorem $\{i \in I : \psi \in i\}$. Należy teraz zauważyć, że przekrój dowolnej skończonej liczby zbiorów o postaci X_ψ jest niepusty, ponieważ jeśli $\psi_1, \ldots, \psi_n$ należą do T, to $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ należy do $\bigcap\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} X_{\psi_i}$.

Tak więc, zbiór $\{X_\psi : \psi \in T\}$ jest bazą filtru i istnieje ultrafiltr F, zawierający ten zbiór. Wtedy, na mocy twierdzenia Łosia, $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F$ jest modelem dla T, ponieważ jeśli $\psi \in T$, to zbiór $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi\}$ jest nadzbiorem zbioru X_ψ, a zatem należy do ultrafiltru F.

Zastosowania Twierdzenia Łosia

- B. *Niech Ψ będzie zbiorem zdań. Jeśli Ψ ma modele dowolnie dużych mocy skończonych, to Ψ ma model nieskończony.*

- Niech ψ_n będzie zdaniem mówiącym, iż istnieje dokładnie n różnych przedmiotów. Przypomnijmy, że ψ_n jest definiowane jako koniunkcja zdań mówiących, że istnieje co najmniej n różnych przedmiotów oraz co najwyżej n różnych przedmiotów. Przy tym, „istnieje co najwyżej n różnych przedmiotów" wyrażamy jako „nieprawda, że istnieje co najmniej $n+1$ różnych przedmiotów", a zdanie „istnieje co najmniej n różnych przedmiotów" ma postać:

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \, (x_1 \neq x_2 \land \ldots \land x_1 \neq x_n \land x_2 \neq x_3 \land \ldots x_{n-1} \neq x_n).$$

- W powyższym, $x \neq y$ jest skrótem dla $\neg(x \doteq y)$.

Zastosowania Twierdzenia Łosia

- Jeśli teraz Ψ ma modele dowolnie dużych mocy skończonych, to istnieje ciąg $(\mathfrak{A}_i)_{i\in\omega}$ skończonych modeli dla Ψ taki, że jeśli $i < j$, to moc $dom(\mathfrak{A}_i)$ jest mniejsza od mocy $dom(\mathfrak{A}_j)$.
- Niech F będzie ultrafiltrem niegłównym na ω i niech $\mathfrak{A}$ będzie ultraproduktem $\prod\limits_{i\in\omega} \mathfrak{A}_i/F$. Ponieważ każde zdanie ze zbioru Ψ jest prawdziwe w każdej ze struktur $\mathfrak{A}_i$ więc, na mocy twierdzenia Łosia, także $\mathfrak{A}$ jest modelem dla Ψ.
- Dla każdej liczby naturalnej n, zdanie ψ_n jest prawdziwe w co najwyżej jednej strukturze $\mathfrak{A}_i$. Ponieważ F jest ultrafiltrem niegłównym, więc nie zawiera on żadnych zbiorów jednoelementowych.
- Korzystając znowu z twierdzenia Łosia otrzymujemy stąd, że dla żadnej liczby naturalnej n, zdanie ψ_n nie jest prawdziwe w $\mathfrak{A}$. To implikuje, że $\mathfrak{A}$ jest strukturą nieskończoną, a więc Ψ musi posiadać model nieskończony.

Ultraprodukty

Korzystając z ultraproduktów oraz twierdzenia Łosia, można podać również dowód twierdzenia o pełności KRP (zob. np. Bell, Slomson 1969, 234–236).

Za pomocą ultraproduktów otrzymać możemy także niestandardowe modele dla arytmetyki PA (zob. np. Bell, Slomson 1969, 236–240).

W obu wspomnianych wyżej twierdzeniach (a także w wielu innych) wykorzystujemy następujący fakt, ukazujący, że ultrapotęga dowolnej struktury może być uważana za jej elementarne rozszerzenie:

- *Dla dowolnej struktury $\mathfrak{A}$, zbioru indeksów I, ultrafiltru F na I, niech c będzie odwzorowaniem identycznościowym, które każdemu elementowi $a \in dom(\mathfrak{A})$ przyporządkowuje wartość a i niech h będzie odwzorowaniem przyporządkowującym a element $h(a) = [c(a)]_F$. Wtedy h jest elementarnym włożeniem $\mathfrak{A}$ w ultrapotęgę $\mathfrak{A}^I/F$.*

Ultraprodukty

Szkic dowodu. Na mocy twierdzenia Łosia wystarczy dowieść, że dla każdej formuły $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ oraz wszystkich elementów $a_1, \ldots, a_n \in dom(\mathfrak{A})$ następujące warunki są równoważne:

- $\mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n]$
- $\{i \in I : \mathfrak{A} \models \psi[c(a_1)^i, \ldots c(a_n)^i]\} \in F$.

Ponieważ mamy $c(a_k)^i = a_k$ dla wszystkich $1 \leqslant k \leqslant n$, więc równoważność tych warunków jest oczywista.

Zachodzi też oczywiście słabszy wynik:

- *Każda ultrapotęga $\mathfrak{A}^I/F$ jest elementarnie równoważna ze strukturą $\mathfrak{A}$ (czyli $\mathfrak{A}^I/F$ spełnia dokładnie te same zdania, co $\mathfrak{A}$).*

Ultraprodukty

- **Twierdzenie Frayne'a.** $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathfrak{A}$ *jest elementarnie wkładalna w jakąś ultrapotęgę* $\mathfrak{B}^I/F$.

- **Twierdzenie Keislera.** *Przy założeniu uogólnionej hipotezy kontinuum (GCH) dla dowolnych struktur* $\mathfrak{A}$ *i* $\mathfrak{B}$ *mocy co najwyżej* κ^+ *następujące warunki są równoważne:*
  - $\mathfrak{A}$ *i* $\mathfrak{B}$ *są elementarnie równoważne.*
  - *Istnieją ultrafiltry* F_1 *i* F_2 *takie, że ultrapotęgi* $\mathfrak{A}^\kappa/F_1$ *oraz* $\mathfrak{B}^\kappa/F_2$ *są izomorficzne.*

Ultraprodukty

Jedną z konsekwencji twierdzenia Keislera jest następujące twierdzenie, również zakładające uogólnioną hipotezę kontinuum:

- *Dla dowolnej klasy K struktur relacyjnych tego samego typu σ, K jest domknięta na elementarną równoważność wtedy i tylko wtedy, gdy K oraz $\overline{K}$ (czyli $Str_\sigma - K$) są obie domknięte na izomorfizm oraz tworzenie ultrapotęg.*

- Operację tworzenia ultrapotęgi można iterować (względem ciągu ultrafiltrów), i następnie wziąć sumę łańcucha (zobacz niżej) otrzymując tzw. ***ultragranice***.
- Dla tej konstrukcji zachodzi **Twierdzenie Kochena**, które głosi, że dwie struktury są elementarnie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają izomorficzne ultragranice (a więc podaje ono kolejną algebraiczną charakterystykę semantycznego pojęcia elementarnej równoważności).

Zachowawczość

Mówimy, że zdanie ψ jest ***zachowawcze względem produktów zredukowanych***, gdy dla każdego zbioru I, każdego filtru F na I oraz dowolnej rodziny $\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ struktur tego samego typu:

- jeśli $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi\} \in F$, to $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F \models \psi$.

- A. *Każde zdanie Hornowskie jest zachowawcze względem produktów zredukowanych.*
- B. *Każde zdanie zachowawcze względem produktów zredukowanych jest logicznie Hornowskie.*

Zachowawczość

Udowodnimy, dla przykładu, punkt A. Przypomnijmy, że czasem przez ***elementarną formułę Horna*** rozumie każdą formułę o postaci: $\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n$, gdzie co najwyżej jedna z ψ_i jest formułą atomową, podczas gdy pozostałe są negacjami formuł atomowych. Wtedy formuły Horna otrzymujemy z elementarnych formuł Horna poprzez domknięcie na koniunkcję oraz kwantyfikatory (uniwersalny i egzystencjalny). Na mocy faktów dotyczących spełniania uniwersalnego domknięcia formuły, wystarczy dowieść, że:

- Dla dowolnej formuły Horna $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, dowolnej rodziny $\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ struktur tego samego typu, dowolnego filtru F na I oraz wszystkich $a_1, \ldots, a_n \in \prod\limits_{i \in I} dom(\mathfrak{A}_i)$:
  jeśli $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi[a_1^i, \ldots, a_n^i]\} \in F$, to
  $$\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F \models \varphi[[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F].$$

Zachowawczość

Dowód jest prowadzony przez indukcję strukturalną: odpowiednie jego kroki dotyczą elementarnych formuł Horna, koniunkcji formuł oraz formuł tworzonych przez dołączenie kwantyfikatorów.
Niech zatem najpierw $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ będzie elementarną formułą Horna. Wtedy $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jest postaci: $\psi_1(x_1, \ldots, x_n) \vee \ldots \vee \psi_k(x_1, \ldots, x_n)$, gdzie ψ_1 jest albo formułą atomową, albo formułą zawsze fałszywą, a każda ψ_j $(2 \leqslant j \leqslant k)$ jest postaci $\neg\chi_j$, gdzie χ_j jest formułą atomową (wynika to wprost z definicji elementarnych formuł Horna).

Dla $1 \leqslant j \leqslant k$ niech:

- $X_j = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi_j[a^i_1, \ldots, a^i_n]\}$
- $Y_j = I - X_j$.

Zachowawczość

Z założenia, zachodzi:

- $\bigcup\limits_{1 \leqslant j \leqslant k} X_j = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi[a_1^i, \ldots, a_n^i]\} \in F$.

Mamy wtedy dwie możliwości, (a) oraz (b):

- (a) Istnieje j taka, że $2 \leqslant j \leqslant k$ oraz $Y_j \notin F$. Oznacza to, że $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \chi_j[a_1^i, \ldots, a_n^i]\} \notin F$. Ponieważ χ_j jest atomowa, więc z definicji produktu zredukowanego otrzymujemy, że zachodzą kolejno:
    1. $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F \not\models \chi_j[a_1^i, \ldots, a_n^i]$, a stąd
    2. $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F \models \varphi[a_1^i, \ldots, a_n^i]$.

Zachowawczość

- (b) W przeciwnym przypadku, $\bigcap\limits_{2\leqslant j\leqslant k} Y_j \in F$. Ale wtedy zachodzi: $(\bigcup\limits_{1\leqslant j\leqslant k} X_j) \cap (\bigcap\limits_{2\leqslant j\leqslant k} Y_j) \subseteq X_1$.
  To z kolei implikuje, iż: $X_1 = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi_1[a_1^i, \ldots, a_n^i]\} \in F$. Wtedy ψ_1 jest formułą atomową, gdyż w przeciwnym przypadku zbiór pusty należałby do F, co jest niemożliwe, bo F jest filtrem. Teraz, na mocy definicji produktu zredukowanego mamy kolejno:
  1. $\prod\limits_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F \models \psi_1[[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$, a stąd
  2. $\prod\limits_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F \models \varphi[[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$

Zachowawczość

Rozważmy teraz przypadek, gdy φ jest koniunkcją $\varphi_1 \wedge \varphi_2$. Jeśli zachodzi $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi[a_1^i, \ldots, a_n^i]\} \in F$, to mamy:

- $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi_1[a_1^i, \ldots, a_n^i]\} \in F$ oraz
- $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi_2[a_1^i, \ldots, a_n^i]\} \in F$.

Na mocy założenia indukcyjnego otrzymujemy stąd:

- $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F \models \varphi_1[[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$ oraz
- $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F \models \varphi_2[[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$.

A zatem ostatecznie w tym przypadku:

- $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F \models \varphi_1 \wedge \varphi_2[[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$, czyli
- $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F \models \varphi[[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$.

Zachowawczość

Z kolei, rozważmy przypadek, gdy φ jest postaci $\exists x_0\, \psi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Jeżeli zbiór $X = \{i \in I : \mathfrak{A}_i/F \models \psi[a^i_1, \ldots, a^i_n]\}$ jest elementem filtru F, to zdefiniujemy element $a_0 \in \prod\limits_{i \in I} dom(\mathfrak{A}_i)$ w sposób następujący:

- jeśli $i \in X$, to $a^i_0 \in dom(\mathfrak{A}_i)$ jest elementem takim, że:

$$\mathfrak{A}_i \models \psi[a^i_0, a^i_1, \ldots, a^i_n];$$

- jeśli $i \notin X$, to a_0 jest dowolnym elementem $dom(\mathfrak{A}_i)$.

Wtedy zbiór X jest identyczny ze zbiorem $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi[a^i_0, a^i_1, \ldots, a^i_n]\}$. Na mocy założenia indukcyjnego mamy:

- $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i/F \models \psi[[a_0]_F, [a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$.

Zachowawczość

A to z kolei implikuje, iż:

- $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F \models \varphi[[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$.

Wreszcie, niech φ będzie formułą $\forall x_0\, \psi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Z założenia, mamy:

- $X = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \forall x_0\, \psi(x_0, x_1, \ldots, x_n)[a_1^i, \ldots, a_n^i]\} \in F$.

Niech teraz a_0 będzie dowolnym elementem $\prod_{i \in I} dom(\mathfrak{A}_i)$. Mamy pokazać, że $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / F \models \psi[[a_0]_F, [a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$. Dla wszystkich $i \in X$ zachodzi $\mathfrak{A}_i \models \psi[a_0^i, a_1^i, \ldots, a_n^i]$.

Zachowawczość

Tak więc, zachodzi kolejno:

- $X \subseteq \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi[a_0^i, a_1^i, \ldots, a_n^i]\}$
- $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi[a_0^i, a_1^i, \ldots, a_n^i]\} \in F$.

Na mocy hipotezy indukcyjnej mamy stąd:

- $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i/F \models \psi[[a_0]_F, [a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$, czyli
- $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i/F \models \forall x_0\, \psi(x_0, x_1, \ldots, x_n)[[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$, a zatem ostatecznie
- $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i/F \models \varphi[[a_1]_F, \ldots, [a_n]_F]$.

Twierdzenie zostało więc udowodnione.

Zachowawczość

Jeśli ψ jest formułą domkniętą, to następujące warunki są równoważne (zob. np. Cori, Lascar 2001, 215–217):

- (1) ψ jest równoważna uniwersalnej formule Horna.
- (2) ψ jest zachowawcza względem produktów zredukowanych oraz podstruktur.
- (3) ψ jest zachowawcza względem produktów skończonych oraz podstruktur.

Łańcuchy

Łańcuchem nazywamy każdą rodzinę struktur (tego samego typu) liniowo uporządkowaną poprzez relację bycia podstrukturą.

Niech $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta<\alpha}$ będzie łańcuchem struktur. Przez ***sumę*** tego łańcucha rozumiemy strukturę $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$ zdefiniowaną następująco:

- $dom(\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta) = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} dom(\mathfrak{A}_\beta)$
- każda relacja (funkcja) w $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$ jest sumą relacji (funkcji) z wszystkich $\mathfrak{A}_\beta$
- $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$ oraz wszystkie elementy łańcucha $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta<\alpha}$ mają te same interpretacje stałych indywidualnych.

Łańcuchy

Dla każdego łańcucha $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta<\alpha}$ struktura $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$ jest jedyną strukturą o uniwersum $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} dom(\mathfrak{A}_\beta)$ taką, że $\mathfrak{A}_\beta \subseteq \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$ dla wszystkich $\beta < \alpha$.

Mówimy, że łańcuch $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta<\alpha}$ jest ***elementarny***, gdy $\mathfrak{A}_\beta \prec \mathfrak{A}_\gamma$ dla wszystkich $\beta < \gamma < \alpha$.

Twierdzenie Tarskiego

- **Twierdzenie Tarskiego.** *Niech* $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta<\alpha}$ *będzie łańcuchem elementarnym. Wtedy* $\mathfrak{A}_\beta \prec \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$ *dla wszystkich* $\beta < \alpha$.

Założenie elementarności łańcucha nie może być tu zastąpione elementarną równoważnością wszystkich modeli łańcucha. Bezpośrednim wnioskiem z tego twierdzenia jest następujący fakt:

- *Jeśli* T *jest teorią modelowo zupełną, to suma każdego łańcucha modeli* T *jest modelem* T.

Łańcuchy: twierdzenie Tarskiego

Szkic dowodu. Trzeba pokazać, że dla każdej formuły φ o n zmiennych wolnych ($n \geqslant 1$), wszystkich $\beta < \alpha$ oraz wszystkich $a_1, \ldots, a_n \in dom(\mathfrak{A}_\beta)$ zachodzi:

- $\mathfrak{A}_\beta \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ dokładnie wtedy, gdy $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$.

Dowód przebiega przez indukcję po złożoności formuł. Dla formuł atomowych oraz kroków dotyczących spójników Boolowskich jest oczywisty. Niech φ będzie formułą $\exists x_1 \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, niech $\beta < \alpha$ oraz $a_2, \ldots, a_n \in dom(\mathfrak{A}_\beta)$.

Łańcuchy: twierdzenie Tarskiego

Jeśli $\mathfrak{A}_\beta \models \varphi[a_2, \ldots, a_n]$, to istnieje $a_1 \in dom(\mathfrak{A}_\beta)$ taki, że $\mathfrak{A}_\beta \models \psi[a_1, \ldots, a_n]$. Na mocy założenia indukcyjnego, $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta \models \psi[a_1, \ldots, a_n]$, a zatem:

$$\bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta \models \varphi[a_2, \ldots, a_n].$$

Z drugiej strony, jeśli $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta \models \varphi[a_2, \ldots, a_n]$, to dla pewnego $\gamma < \alpha$ oraz pewnego $a_1 \in dom(\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta)$ mamy: $a_1, \ldots, a_n \in dom(\mathfrak{A}_\gamma)$ oraz $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta \models \psi[a_1, \ldots, a_n]$. Ponieważ $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta<\alpha}$ jest łańcuchem, więc możemy założyć, że $\gamma \leqslant \beta$.

Łańcuchy: twierdzenie Tarskiego

Skoro $a_1, \ldots, a_n \in dom(\mathfrak{A}_\gamma)$, to, na mocy założenia indukcyjnego:

- $\mathfrak{A}_\gamma \models \psi[a_1, \ldots, a_n]$, czyli
- $\mathfrak{A}_\gamma \models \varphi[a_2, \ldots, a_n]$.

Wreszcie, ponieważ $\mathfrak{A}_\beta \prec \mathfrak{A}_\gamma$, więc $\mathfrak{A}_\beta \models \varphi[a_2, \ldots, a_n]$.

Twierdzenie Lindströma

Inną jeszcze charakterystyką modelowej zupełności w terminach łańcuchów modeli jest **Twierdzenie Lindströma**:

- *Jeśli T jest teorią (w języku przeliczalnym) taką, że:*
  1. *wszystkie modele T są nieskończone;*
  2. *suma dowolnego łańcucha modeli teorii T jest modelem teorii T;*
  3. *T jest κ-kategoryczna w jakiejś mocy nieskończonej κ,*

  to T jest modelowo zupełna.

Twierdzenie Lindströma

Szkic dowodu. W dowodzie wykorzystamy dwa pojęcia:

- Mówimy, że $\mathfrak{B}$ jest *T-rozszerzeniem* $\mathfrak{A}$, gdy $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ oraz $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są modelami T.
- Model $\mathfrak{A}$ dla T jest *algebraicznie domknięty*, gdy dla każdego T-rozszerzenia $\mathfrak{B}$ struktury $\mathfrak{A}$, każde zdanie egzystencjalne, które jest prawdziwe w $\mathfrak{B}_{dom(\mathfrak{A})}$, jest też prawdziwe w $\mathfrak{A}_{dom(\mathfrak{A})}$.

Jak wiemy z punktu dotyczącego modelowej zupełności, T jest modelowo zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej model mocy κ jest algebraicznie domknięty.
Pokażemy, że z punktów 1. i 2. wynika, iż T ma model algebraicznie domknięty w każdej mocy nieskończonej κ. Niech $\mathfrak{A}$ będzie dowolnym modelem T mocy κ. Niech $\{\varphi_\beta : \beta < \kappa\}$ będzie zbiorem wszystkich zdań egzystencjalnych języka $L_{dom(\mathfrak{A})}$.

Twierdzenie Lindströma

Tworzymy łańcuch modeli $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta<\kappa}$ taki, że:

- $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$;
- jeśli φ_β jest prawdziwe w pewnym T-rozszerzeniu $\mathfrak{A}_{\beta,dom(\mathfrak{A})}$, to φ_β jest prawdziwe w $\mathfrak{A}_{\beta+1,dom(\mathfrak{A})}$;
- w krokach granicznych bierzemy sumę łańcucha (na mocy 2., suma łańcucha modeli dla T jest modelem T).

Niech $\mathfrak{A}' = \bigcup\limits_{\beta<\kappa} \mathfrak{A}_\beta$. Wtedy każde zdanie egzystencjalne φ, które jest prawdziwe w pewnym T-rozszerzeniu struktury $\mathfrak{A}'_{dom(\mathfrak{A})}$, jest też prawdziwe w $\mathfrak{A}'_{dom(\mathfrak{A})}$.

Twierdzenie Lindströma

Iterując tę konstrukcję ω razy otrzymujemy łańcuch $(\mathfrak{A}^m)_{m<\omega}$ taki, że:

- $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^0$
- dowolne zdanie egzystencjalne prawdziwe w pewnym T-rozszerzeniu struktury $\mathfrak{A}^{m+1}_{dom(\mathfrak{A}^m)}$ jest prawdziwe w $\mathfrak{A}^{m+1}_{dom(\mathfrak{A}^m)}$.

Suma $\bigcup_{m<\omega} \mathfrak{A}^m$ tego łańcucha jest algebraicznie domkniętym modelem T mocy κ.
Na mocy κ-kategoryczności T, każdy model mocy κ dla T jest algebraicznie domknięty. Ponieważ T nie ma modeli skończonych, więc T jest modelowo zupełna.

Zachowawczość

Mówimy, że formuła ψ jest ***zachowawcza względem sumy łańcuchów***, gdy suma każdego łańcucha modeli dla ψ także jest modelem dla ψ. Ogólniej, teoria T jest ***zachowawcza względem sumy łańcuchów***, gdy suma każdego łańcucha modeli dla T także jest modelem dla T.

Przez $\forall\exists$-***teorię*** rozumiemy teorię o aksjomatach, będących zdaniami uniwersalno-egzystencjalnymi. Pamiętajmy, że zarówno zdania egzystencjalne, jak i zdania uniwersalne są zdaniami uniwersalno-egzystencjalnymi.

- *Formuła jest zachowawcza względem sumy łańcuchów wtedy i tylko wtedy, gdy jest logicznie równoważna formule uniwersalno-egzystencjalnej. Ogólniej, teoria T jest zachowawcza względem sumy łańcuchów wtedy i tylko wtedy, gdy jest $\forall\exists$-teorią.*

Zachowawczość

Szkic dowodu. Dowód, iż każda domknięta formuła uniwersalno-egzystencjalna jest zachowawcza względem sumy łańcuchów jest stosunkowo prosty. Wynika też z niego, że każda logicznie uniwersalno-egzystencjalna formuła domknięta jest zachowawcza względem sumy łańcuchów oraz że każda $\forall\exists$-teoria jest zachowawcza względem sumy łańcuchów.

Rozważmy zatem dowolną formułę uniwersalno-egzystencjalną ψ o postaci: $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists x_{n+1} \ldots \exists x_{n+p} \varphi(x_1, \ldots, x_{n+p})$, gdzie φ jest formułą bez kwantyfikatorów. Niech $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta<\alpha}$ będzie łańcuchem modeli dla ψ i niech $\mathfrak{A} = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$. Chcemy pokazać, że $\mathfrak{A} \models \psi$. W tym celu, dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in dom(\mathfrak{A})$ pokażemy, że:
$\mathfrak{A} \models \exists x_{n+1} \ldots \exists x_{n+p} \varphi(x_1, \ldots, x_{n+p})[a_1, \ldots, a_n]$.

Zachowawczość

Ponieważ $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta<\alpha}$ jest łańcuchem, więc uniwersa poszczególnych modeli tworzą $\subseteq$-łańcuch zbiorów. Istnieje zatem $\gamma < \alpha$ taka, że wszystkie $a_1, \ldots, a_n$ należą do $dom(\mathfrak{A}_\gamma)$. Ponieważ $\mathfrak{A}_\gamma$ jest modelem ψ, więc istnieją $a_{n+1}, \ldots, a_{n+p} \in dom(\mathfrak{A}_\gamma)$ takie, że $\mathfrak{A}_\gamma \models \varphi[a_1, \ldots, a_{n+p}]$. Skoro φ jest formułą bez kwantyfikatorów, a $\mathfrak{A}$ jest rozszerzeniem $\mathfrak{A}_\gamma$, to $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_{n+p}]$. Tak więc, $\mathfrak{A} \models \psi$.

Dla dowodu, że teoria T, która jest zachowawcza względem sum łańcuchów jest $\forall\exists$-teorią wygodnie będzie wprowadzić pewne pojęcie pomocnicze, o którym udowodnimy dwa fakty. Najpierw jednak zauważmy, że zbiór Ψ złożony ze wszystkich domkniętych formuł uniwersalno-egzystencjalnych χ takich, że $T \vdash \chi$ zawiera się w zbiorze wszystkich konsekwencji teorii T. Pokażemy, że zachodzi także inkluzja odwrotna.

Zachowawczość

Jeśli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są dwiema L-strukturami takimi, że $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, to mówimy, ż $\mathfrak{A}$ jest 1-*elementarną podstrukturą* $\mathfrak{B}$, co zapisujemy $\mathfrak{A} \prec_1 \mathfrak{B}$, gdy dla każdej formuły uniwersalnej $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ z L oraz każdych elementów $a_1, \ldots, a_n \in dom(\mathfrak{A})$: jeśli $\mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n]$, to $\mathfrak{B} \models \psi[a_1, \ldots, a_n]$.

Zachodzą następujące fakty:

- A. Jeśli $\mathfrak{A} \prec_1 \mathfrak{B}$, to istnieje $\mathfrak{C}$ taki, że $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$ oraz $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$.
- B. Niech $\mathfrak{B}$ będzie modelem Ψ. Wtedy istnieje 1-elementarne rozszerzenie modelu $\mathfrak{B}$, które jest modelem T.

Zachowawczość

Szkic dowodu A. Tworzymy diagram prosty dla $\mathfrak{B}$ oraz diagram elementarny dla $\mathfrak{A}$:

- $\Delta(\mathfrak{B})$ = zbiór wszystkich zdań o postaci $\varphi(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n)$ gdzie φ jest L-formułą bez kwantyfikatorów, $a_1, \ldots, a_n \in dom(\mathfrak{B})$, $\overline{a}_i$ jest interpretowana w $\mathfrak{B}$ jako a_i oraz $\mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$;
- $D(\mathfrak{A})$ = zbiór wszystkich zdań o postaci $\psi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a}_n)$ gdzie ψ jest L-formułą, $a_1, \ldots, a_n \in dom(\mathfrak{A})$, $\overline{a}_i$ jest interpretowana w $\mathfrak{A}$ jako a_i oraz $\mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n]$.

Pokażemy, że $\Delta(\mathfrak{B}) \cup D(\mathfrak{A})$ jest teorią niesprzeczną. To wystarczy dla dowodu A., ponieważ wiemy, że istnieje wtedy rozszerzenie modelu $\mathfrak{B}$, które jest jednocześnie modelem $D(\mathfrak{A})$, czyli elementarnym rozszerzeniem $\mathfrak{A}$.

Zachowawczość

Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że zbiór $\Delta(\mathfrak{B}) \cup D(\mathfrak{A})$ jest sprzeczny. Wtedy jakiś jego skończony podzbiór jest sprzeczny. Zbiór $\Delta(\mathfrak{B})$ jest domknięty na koniunkcję.

Na mocy twierdzenia o zwartości istnieje formuła z $\Delta(\mathfrak{B})$ o postaci: $\varphi(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n, \overline{a}_{n+1}, \ldots, \overline{a}_{n+p})$ taka, że:

- φ jest formułą bez kwantyfikatorów;
- $a_1, \ldots, a_n \in dom(\mathfrak{A})$;
- $a_{n+1}, \ldots, a_{n+p} \in dom(\mathfrak{B}) - dom(\mathfrak{A})$;
- $D(\mathfrak{A}) \vdash_{krp} \neg\varphi(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n, \overline{a}_{n+1}, \ldots, \overline{a}_{n+p})$.

Zachowawczość

Ponieważ $\overline{a}_{n+1}, \ldots, \overline{a}_{n+p}$ nie występują w $D(\mathfrak{A})$, więc mamy kolejno:

- $D(\mathfrak{A}) \vdash_{krp} \forall x_1 \ldots \forall x_p \neg\varphi(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n, x_1 \ldots, x_p)$
- $\mathfrak{A} \models \forall x_1 \ldots \forall x_p \neg\varphi(x_1, \ldots, x_p)[a_1, \ldots, a_n]$
- $\forall x_1 \ldots \forall x_p \neg\varphi(x_1, \ldots, x_p)$ nie jest prawdziwa w $\mathfrak{B}$, ponieważ:

$$\mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+p}].$$

Otrzymujemy zatem sprzeczność z warunkiem $\mathfrak{A} \prec_1 \mathfrak{B}$.

Zachowawczość

Szkic dowodu B. Rozważmy teorię:

- $\Delta_1(\mathfrak{B})$ = zbiór zdań o postaci $\varphi(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n)$, gdzie φ jest koniunkcją zdań uniwersalnych z L, $a_1, \ldots, a_n \in dom(\mathfrak{B})$ oraz $\mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$.

Pokażemy, że $\Delta_1(\mathfrak{B}) \cup T$ jest teorią niesprzeczną. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że jest to teoria sprzeczna. Wtedy istnieje formuła $\varphi(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n)$ z $\Delta_1(\mathfrak{B})$ taka, że $T \vdash \neg\varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n})$. Ponieważ $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n$ nie występują w T, więc:

$$T \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \, \neg\varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

Zachowawczość

Ponieważ φ jest równoważna formule uniwersalnej, więc $\neg\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jest równoważna formule egzystencjalnej. W konsekwencji, $\forall x_1 \ldots \forall x_n \neg\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jest równoważna formule uniwersalno-egzystencjalnej, należącej do Ψ, zgodnie z definicją Ψ. Przeczy to jednak faktowi, iż $\mathfrak{B} \models \Psi$.

Istnieje zatem model $\mathfrak{C}$ dla $\Delta_1(\mathfrak{B}) \cup T$, który jest rozszerzeniem $\mathfrak{B}$. Ponieważ $\mathfrak{C} \models \Delta_1(\mathfrak{B})$, więc $\mathfrak{B} \prec_1 \mathfrak{C}$.

Wykorzystamy teraz fakty A. i B. w dowodzie głównego twierdzenia, czyli pokażemy, iż każdy model dla Ψ jest także modelem T.

Zachowawczość

Dla dowolnego modelu $\mathfrak{A}_0$ dla Ψ otrzymujemy model $\mathfrak{A}_1$ dla T taki, że $\mathfrak{A}_0 \prec_1 \mathfrak{A}_1$. Następnie, na mocy B., otrzymujemy elementarne rozszerzenie $\mathfrak{A}_2$ modelu $\mathfrak{A}_0$, które jest modelem Ψ oraz rozszerzeniem $\mathfrak{A}_1$. W ten sposób, stosując na przemian A. oraz B., otrzymujemy łańcuch $(\mathfrak{A}_k)_{k\in\omega}$ struktur dla języka L taki, że dla wszystkich $k \in \omega$:

- $\mathfrak{A}_{2k} \models \Psi$
- $\mathfrak{A}_{2k+1} \models T$
- $\mathfrak{A}_{2k} \prec_1 \mathfrak{A}_{2k+1}$
- $\mathfrak{A}_{2k} \prec \mathfrak{A}_{2k+2}$.

Zachowawczość

Niech $\mathfrak{A} = \bigcup\limits_{k\in\omega} \mathfrak{A}_k$. Wtedy oczywiście:

- $\mathfrak{A} = \bigcup\limits_{k\in\omega} \mathfrak{A}_{2k}$
- $\mathfrak{A} = \bigcup\limits_{k\in\omega} \mathfrak{A}_{2k+1}$.

Ponieważ T jest zachowawcza ze względu na sumy łańcuchów, więc $\mathfrak{A}$ jest modelem T. Łańcuch $(\mathfrak{A}_k)_{k\in\omega}$ jest elementarny, a zatem, na mocy twierdzenia Tarskiego o łańcuchach elementarnych, $\mathfrak{A}$ jest elementarnym rozszerzeniem $\mathfrak{A}_0$, a stąd $\mathfrak{A}_0$ jest modelem T, co kończy dowód całego twierdzenia.

Zachowawczość

Przykładami $\forall\exists$-teorii (a więc teorii zachowawczych ze względu na sumy łańcuchów) są, m.in.:

- teoria gęstego liniowego porządku bez końców;
- teoria grup;
- teoria ciał.

- Z kolei, np. teoria gęstego liniowego porządku z elementem pierwszym i ostatnim nie jest zachowawcza ze względu na sumy łańcuchów.

Podjęzyki

Powiemy, że język L_1 jest ***podjęzykiem*** języka L_2 (a L_2 jest rozszerzeniem języka L_1), gdy:

- każdy predykat z L_1 jest predykatem w L_2;
- każdy symbol funkcyjny z L_1 jest symbolem funkcyjnym w L_2;
- każda stała indywidualna z L_1 jest stałą indywidualną w L_2;
- funkcja przyporządkowująca liczbę argumentów predykatom i symbolom funkcyjnym w L_1 jest ograniczeniem takiej funkcji z L_2 do sygnatury języka L_1.

- Jeśli język L_1 jest podjęzykiem języka L_2, przy czym mają one takie same zbiory predykatów oraz symboli funkcyjnych, to mówimy, że L_2 ***jest rozszerzeniem*** L_1 ***o stałe***.

Redukty i rozszerzenia

Jeśli $L(\sigma)$ jest podjęzykiem $L(\tau)$, $\mathfrak{A} \in Str_\sigma, \mathfrak{B} \in Str_\tau$, to mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest ***$L(\sigma)$-reduktem*** $\mathfrak{B}$ (a $\mathfrak{B}$ jest ***$L(\tau)$-rozszerzeniem*** $\mathfrak{A}$), gdy:

- $dom(\mathfrak{A}) = dom(\mathfrak{B})$
- dla każdego n-argumentowego predykatu $R \in \sigma$: $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}}$
- dla każdego n-argumentowego symbolu funkcyjnego $F \in \sigma$: $F^{\mathfrak{A}} = F^{\mathfrak{B}}$
- dla każdej stałej indywidualnej $c \in \sigma$: $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

Twierdzenie Robinsona

- **Twierdzenie Robinsona.** *Niech T będzie teorią zupełną w języku L i niech L_1 oraz L_2 będą rozszerzeniami L takimi, że $L = L_1 \cap L_2$. Jeśli T_i jest teorią niesprzeczną w języku L_i oraz $T \subseteq T_i$, gdzie $i = 1, 2$, to $T_1 \cup T_2$ jest niesprzeczna.*

- Twierdzenie Robinsona podaje zatem warunki, przy których można łączyć teorie niesprzeczne, otrzymując w wyniku również teorię niesprzeczną.

Twierdzenie Robinsona

Szkic dowodu. Przyjmiemy umowę notacyjną: jeśli $\mathfrak{A}$ jest L_1-strukturą lub L_2-strukturą, to $\mathfrak{A}^-$ oznacza redukt $\mathfrak{A}$ do L.
W dowodzie twierdzenia Robinsona wykorzystamy trzy lematy:

- A. Niech $\mathfrak{A}$ będzie modelem T. Wtedy istnieje model $\mathfrak{B}$ teorii T_2 taki, że $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}^-$.
- B. Niech $\mathfrak{A}_1$ będzie modelem T_1. Załóżmy, że $\mathfrak{A}_1^- \prec \mathfrak{A}$. Wtedy istnieje L_1-struktura $\mathfrak{A}_2$ taka, że: $\mathfrak{A}_1 \prec \mathfrak{A}_2$ oraz $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}_2^-$. W tym przypadku $\mathfrak{A}_2$ jest modelem T_1.
- C. Niech $\mathfrak{B}_1$ będzie modelem T_2, a $\mathfrak{A}$ modelem T. Załóżmy, że $\mathfrak{B}_1^- \prec \mathfrak{A}$. Wtedy istnieje model $\mathfrak{B}_2$ dla T_2 taki, że: $\mathfrak{B}_1 \prec \mathfrak{B}_2$ oraz $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}_2^-$.

Twierdzenie Robinsona

Szkic dowodu A. Wystarczy pokazać, że zbiór $T_2 \cup D(\mathfrak{A})$ jest niesprzeczny, gdyż gwarantuje to istnienie modelu $\mathfrak{B}$ o wymaganych własnościach. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że $T_2 \cup D(\mathfrak{A})$ jest sprzeczny. Wtedy jakiś jego skończony podzbiór jest sprzeczny, na mocy twierdzenia o zwartości. Ponieważ $D(\mathfrak{A})$ jest domknięty na koniunkcję, oznacza to, że istnieje formuła $\psi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n})$ taka, że:

$$T \vdash \neg\psi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}).$$

Stałe $\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}$ nie należą przy tym do języka L_2 teorii T_2. W konsekwencji:

$$T \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n\, \neg\psi(x_1, \ldots, x_n).$$

Twierdzenie Robinsona

Formuła $\forall x_1 \ldots \forall x_n \, \neg\psi(x_1, \ldots, x_n)$ jest z języka L, a $T \subseteq T_2$. Tak więc, $\neg\forall x_1 \ldots \forall x_n \, \neg\psi(x_1, \ldots, x_n)$ nie jest konsekwencją T. Ponieważ T jest zupełna, więc $\forall x_1 \ldots \forall x_n \, \neg\psi(x_1, \ldots, x_n)$ jest konsekwencją T. To jednak jest sprzeczne z tym, iż $\mathfrak{A} \models T$ oraz $\mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n]$. Przypuszczenie dowodu nie wprost musimy zatem odrzucić, co oznacza niesprzeczność $T_2 \cup D(\mathfrak{A})$ oraz istnienie modelu $\mathfrak{B}$ o wymaganych własnościach.

Szkic dowodu B. Podobnie jak w przypadku A., wystarczy pokazać, że model ma teoria $T' = D(\mathfrak{A}) \cup D(\mathfrak{A}_1)$, gdzie:

- $D(\mathfrak{A})$ = zbiór wszystkich zdań o postaci $\psi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n})$, gdzie $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ jest formułą z L, $a_1, \ldots, a_n \in dom(\mathfrak{A})$ oraz $\mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n]$
- $D(\mathfrak{A}_1)$ = zbiór wszystkich zdań o postaci $\psi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n})$, gdzie $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ jest formułą z L_1, $a_1, \ldots, a_n \in dom(\mathfrak{A}_1)$ oraz $\mathfrak{A}_1 \models \psi[a_1, \ldots, a_n]$.

Twierdzenie Robinsona

Językiem teorii T' jest zatem język L_1 rozszerzony o stałe nazywające elementy $\mathfrak{A}$. Przy tym, dla elementu $a \in dom(\mathfrak{A}) \cap dom(\mathfrak{A}_1)$ wprowadzamy jedną tylko stałą $\underline{a}$, występującą zarówno w $D(\mathfrak{A})$, jak i w $D(\mathfrak{A}_1)$. Wtedy bowiem model dla T' będzie elementarnym rozszerzeniem $\mathfrak{A}_1$, a jednocześnie jego redukt będzie elementarnym rozszerzeniem $\mathfrak{A}$.

Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że T' jest sprzeczna. Otrzymamy formułę z $D(\mathfrak{A})$, która będzie sprzeczna z $D(\mathfrak{A}_1)$. Poszukiwana formuła może być zapisana w postaci:

$$\psi(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, \underline{a}_{n+1}, \ldots, \underline{a}_{n+p}),$$

gdzie ψ jest formułą z L, $a_1, \ldots, a_n \in dom(\mathfrak{A}_1)$, a $a_{n+1}, \ldots, a_{n+p} \in dom(\mathfrak{A}) - dom(\mathfrak{A}_1)$.

Twierdzenie Robinsona

Ponieważ mamy kolejno:

- $D(\mathfrak{A}_1) \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_p \, \neg\psi(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, x_1, \ldots, x_p)$
- $\mathfrak{A}_1 \models \forall x_1 \ldots \forall x_p \, \neg\psi(x_1, \ldots, x_p)[a_1, \ldots, a_n]$,

więc otrzymujemy stąd, iż:

$$\mathfrak{A} \models \exists x_1 \ldots \exists x_p \, \psi(x_1, \ldots, x_p)[a_1, \ldots, a_n],$$

a to jest sprzeczne z faktem, że $\mathfrak{A}_1^- \prec \mathfrak{A}$. Przypuszczenie dowodu nie wprost musimy zatem odrzucić i istnienie modelu o wymaganych własnościach zostało tym samym wykazane.

Twierdzenie Robinsona

Szkic dowodu C. Wystarczy zastąpić T_1 przez T_2 w dowodzie punktu B.

Możemy teraz przystąpić do dowodu głównego twierdzenia. Skonstruujemy model dla $T_1 \cup T_2$. Bierzemy model $\mathfrak{A}_1$ dla T_1. Wtedy jego redukt $\mathfrak{A}_1^-$ jest modelem dla T. Na mocy A., istnieje model $\mathfrak{B}_1$ dla T_2 taki, że $\mathfrak{A}_1^- \prec \mathfrak{B}_1^-$. Następnie wykorzystujemy B. do znalezienia modelu $\mathfrak{A}_2$ dla T_1 takiego, iż $\mathfrak{A}_1 \prec \mathfrak{A}_2$ oraz $\mathfrak{B}_1 \prec \mathfrak{A}_2^-$. Stosujemy teraz na przemian B. i C. dla otrzymania modeli $\mathfrak{A}_n$ dla T_1 oraz $\mathfrak{B}_n$ dla T_2 takich, że dla każdej k:

- $\mathfrak{A}_n \prec \mathfrak{A}_{n+1}$
- $\mathfrak{B}_n \prec \mathfrak{B}_{n+1}$
- $\mathfrak{A}_n^- \prec \mathfrak{B}_n^-$
- $\mathfrak{B}_n^- \prec \mathfrak{A}_{n+1}^-$.

Twierdzenie Robinsona

Niech teraz $\mathfrak{A} = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} \mathfrak{A}_n$ oraz $\mathfrak{B} = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} \mathfrak{B}_n$. Na mocy twierdzenia o sumach łańcuchów:

- $\mathfrak{A}$ jest elementarnym rozszerzeniem $\mathfrak{A}_1$, a więc modelem T_1;
- $\mathfrak{B}$ jest elementarnym rozszerzeniem $\mathfrak{B}_1$, a więc modelem T_2.

Zauważmy, że: $\mathfrak{A}^- = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} \mathfrak{A}_n^- = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} \mathfrak{B}_n^- = \mathfrak{B}^-$. Otrzymujemy zatem model dla $T_1 \cup T_2$; jest to mianowicie struktura $\mathfrak{C}$ taka, że:

- reduktem $\mathfrak{C}$ do L_1 jest $\mathfrak{A}$
- reduktem $\mathfrak{C}$ do L_2 jest $\mathfrak{B}$.

Tu założenie, że $L_1 \cap L_2 = L$ pozwala na jednoznaczną interpretację symboli z $L_1 \cup L_2$, które nie należą do L.

Twierdzenie Craiga

- **Twierdzenie Craiga o Interpolacji.** *Niech ψ i φ będą zdaniami i załóżmy, że $\psi \rightarrow \varphi$ jest tautologią KRP. Wtedy istnieje formuła χ taka, że:*
  1. $\vdash \psi \rightarrow \chi$
  2. $\vdash \chi \rightarrow \varphi$
  3. *każdy symbol (predykat, symbol funkcyjny, stała indywidualna), który występuje w χ, występuje także zarówno w ψ, jak i w φ.*

- Formułę χ spełniającą warunki powyższego twierdzenia nazywamy ***interpolantem*** dla ψ oraz φ.
- Dodajmy, że istnieje zarówno czysto syntaktyczny dowód twierdzenia Craiga, jak i dowód odwołujący się do klas elementarnych modeli (zobacz niżej).

Twierdzenie Craiga

Szkic dowodu. Niech L będzie językiem, w którym występuje predykat identyczności oraz wszystkie symbole występujące zarówno w ψ, jak i w φ. Poszukujemy formuły domkniętej χ z L takiej, że:

$$\vdash (\psi \to \chi) \land (\chi \to \varphi).$$

Poprowadzimy dowód metodą nie wprost. Przypuśćmy zatem, że nie istnieje interpolant między ψ a φ.

Chcemy zbudować teorię zupełną T w języku L taką, że zarówno $T \cup \{\psi\}$ jak i $T \cup \{\neg\varphi\}$ są niesprzeczne. Na mocy twierdzenia Robinsona, $T \cup \{\psi, \neg\varphi\}$ byłaby wtedy niesprzeczna, co sprzeczne jest z założeniem, iż $\vdash \psi \to \varphi$.

Twierdzenie Craiga

Ponieważ język L jest przeliczalny, więc możemy ustawić w ciąg wszystkie domknięte formuły L. Niech będzie to ciąg $(\gamma_n)_{n\in\omega}$. Załóżmy przy tym, że γ_0 jest formułą $\exists x_0\ (x_0 = x_0)$. Przez indukcję zdefiniujemy ciąg formuł $(\kappa_n)_{n\in\omega}$ z L taki, że dla wszystkich $n \in \omega$:

1. $\vdash \kappa_{n+1} \rightarrow \kappa_n$
2. $\vdash \kappa_n \rightarrow \gamma_n$ lub $\kappa_n \rightarrow \neg\gamma_n$
3. nie istnieje interpolant między formułami $\psi \wedge \kappa_n$ oraz $\varphi \wedge \kappa_n$.

Niech κ_0 będzie formułą $\exists x_0\ (x_0 = x_0)$. Dla tej formuły powyższe warunki są spełnione, gdyż przypuściliśmy, że nie istnieje interpolant między ψ a φ.

Twierdzenie Craiga

Przy konstrukcji κ_{n+1}, gdy κ_n jest już skonstruowana, zauważmy, że musi mieć miejsce co najmniej jedna z następujących sytuacji:

- (†) Nie istnieje interpolant między formułami $\psi \wedge \kappa_n \wedge \gamma_{n+1}$ a $\varphi \wedge \kappa_n \wedge \gamma_{n+1}$.
- (‡) Nie istnieje interpolant między formułami $\psi \wedge \kappa_n \wedge \neg\gamma_{n+1}$ a $\varphi \wedge \kappa_n \wedge \neg\gamma_{n+1}$.

Gdyby bowiem nie miała miejsca żadna z tych sytuacji, to istniałyby formuły domknięte φ_0 oraz φ_1 z L takie, że:

- $\vdash (\psi \wedge \kappa_n \wedge \gamma_{n+1}) \to \varphi_0$
- $\vdash \varphi_0 \to (\varphi \wedge \kappa_n \wedge \gamma_{n+1})$
- $\vdash (\psi \wedge \kappa_n \wedge \neg\gamma_{n+1}) \to \varphi_1$
- $\vdash \varphi_1 \to (\varphi \wedge \kappa_n \wedge \neg\gamma_{n+1})$.

Twierdzenie Craiga

To jednak nie jest możliwe, gdyż mielibyśmy wtedy:

- $\vdash (\psi \wedge \kappa_n) \to (\varphi_0 \vee \varphi_1)$ oraz
- $\vdash (\varphi_0 \vee \varphi_1) \to (\varphi \wedge \kappa_n)$,

a to znaczyłoby przecież, że $\varphi_0 \vee \varphi_1$ jest interpolantem między $\psi \wedge \kappa_n$ a $\varphi \wedge \kappa_n$.

Możemy zatem przyjąć za κ_{n+1}:

- $\kappa_n \wedge \gamma_{n+1}$, o ile zachodzi †
- $\kappa_n \wedge \neg\gamma_{n+1}$, o ile zachodzi ‡.

W konsekwencji, $\psi \wedge \kappa_{n+1}$ oraz $\varphi \wedge \kappa_{n+1}$ nie mają interpolanta i zachodzą warunki 1.–3. Niech $T = \{\kappa_n : n \in \omega\}$.

Twierdzenie Craiga

Dla każdej n, formuła $\psi \wedge \kappa_n$ jest niesprzeczna, gdyż w przeciwnym przypadku $\exists x_0 \neg(x_0 = x_0)$ byłaby interpolantem między $\psi \wedge \kappa_n$ i $\varphi \wedge \kappa_n$. Na mocy warunku 1. oraz twierdzenia o zwartości, teoria $T \cup \{\psi\}$ jest niesprzeczna. Podobnie, formuła $\neg\varphi \wedge \kappa_n$ jest niesprzeczna, gdyż w przeciwnym przypadku κ_n byłaby interpolantem między $\psi \wedge \kappa_n$ i $\varphi \wedge \kappa_n$. A zatem również $T \cup \{\neg\varphi\}$ jest teorią niesprzeczną.

Wreszcie, T jest teorią zupełną, ponieważ jeśli γ jest dowolnym zdaniem z L, to γ jest formułą γ_n dla pewnej $n \in \omega$, a na mocy punktu 2. mamy: $\vdash \kappa_n \rightarrow \gamma_n$ lub $\vdash \kappa_n \rightarrow \neg\gamma_n$.

Dodajmy, że dowodzi się także innych jeszcze twierdzeń o interpolacji.

Twierdzenie Betha

Niech L będzie językiem oraz niech L^* powstaje z L poprzez dodanie nowego predykatu n-argumentowego P. Niech Q będzie innym jeszcze n-argumentowym predykatem, który nie występuje w L i niech L^+ powstaje z L poprzez dodanie Q. Dla dowolnej formuły ψ języka L^* oznaczmy przez $\psi_{Q/P}$ formułę otrzymaną z ψ poprzez zastąpienie wszystkich wystąpień P przez Q. Wtedy oczywiście $\psi_{Q/P}$ jest formułą języka L^+.

Niech T będzie teorią w języku L^*. Następujące warunki są równoważne:

- Dla każdej L-struktury $\mathfrak{A}$ istnieje najwyżej jedna interpretacja symbolu P w modelu teorii T rozszerzającym $\mathfrak{A}$ do L^*-struktury.
- Niech T^+ będzie teorią otrzymaną z T poprzez zastąpienie wystąpień P poprzez Q (we wszystkich formułach teorii T). Wtedy dla każdego modelu $\mathfrak{B}$ teorii $T \cup T^+$ mamy: $\mathfrak{B} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \, (P(x_1, \ldots, x_n) \equiv Q(x_1, \ldots, x_n))$.

Twierdzenie Betha

Drugi z powyższych warunków jest równoważny z:

$$T \cup T^{+} \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \, (P(x_1, \ldots, x_n) \equiv Q(x_1, \ldots, x_n)).$$

Jeśli spełniony jest ten warunek, to mówimy, że P jest ***niejawnie definiowalny w T***. Powiemy z kolei, że P jest ***wyraźnie definiowalny w T***, gdy istnieje formuła $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ z L taka, że:

$$T \vdash (P(x_1, \ldots, x_n) \equiv \psi(x_1, \ldots, x_n)).$$

Jeśli P jest wyraźnie definiowalny w T, to jest oczywiście także niejawnie definiowalny w T. Implikację odwrotną ustanawia:

Twierdzenie Betha

- **Twierdzenie Betha o Definiowalności.** *Jeśli P jest niejawnie definiowalny w T, to P jest wyraźnie definiowalny w T.*

Szkic dowodu. Niech $c_1, \ldots, c_n$ będą nowymi stałymi indywidualnymi. Ponieważ P jest niejawnie definiowalny, więc teoria $T \cup \{P(c_1, \ldots, c_n)\} \cup T^+ \cup \{\neg Q(c_1, \ldots, c_n)\}$ jest sprzeczna. Posługujemy się tu oznaczeniami używanymi powyżej.

Na mocy twierdzenia o zwartości, istnieją formuły domknięte: ψ w L^* oraz φ w L^+ takie, że formuła: $\psi \wedge \varphi \wedge P(c_1, \ldots, c_n) \wedge \neg Q(c_1, \ldots, c_n)$ jest sprzeczna oraz $T \vdash \psi$ i $T^+ \vdash \varphi$. Wykorzystując prawa rachunku zdań, możemy wyrazić fakt sprzeczności formuły $\psi \wedge \varphi \wedge P(c_1, \ldots, c_n) \wedge \neg Q(c_1, \ldots, c_n)$ warunkiem: $\vdash (\psi \wedge P(c_1, \ldots, c_n)) \rightarrow (\varphi \rightarrow Q(c_1, \ldots, c_n))$.

Twierdzenie Betha

Korzystamy z twierdzenia Craiga o interpolacji, aby uzyskać formułę $\gamma(x_1, \ldots, x_n)$ z L, nie zawierającą ani P, ani Q, która jest interpolantem między $\psi \wedge P(c_1, \ldots, c_n)$ oraz $\varphi \rightarrow Q(c_1, \ldots, c_n)$. Ponieważ $T \vdash \psi$, więc: $T \vdash P(c_1, \ldots, c_n) \rightarrow \gamma(x_1, \ldots, x_n)$, a ponieważ stałe c_i nie występują w T, więc:
(†) $T \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \, (P(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \gamma(x_1, \ldots, x_n))$.

Podobnie, dla predykatu Q mamy:
$T^+ \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \, (\gamma(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow Q(x_1, \ldots, x_n))$.
Jeśli teraz podstawimy P za Q, to otrzymujemy:
(‡) $T \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \, (\gamma(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow P(x_1, \ldots, x_n))$.
Warunki (†) i (‡) pokazują, iż P jest definiowalny wyraźnie w T, co kończy dowód twierdzenia.

Klasy elementarne

Niech C_{krp} będzie operacją konsekwencji w $L(\sigma)$, wyznaczoną przez aksjomatykę dla klasycznego rachunku predykatów. Tak więc, dla każdego zbioru zdań Σ języka $L(\sigma)$, zbiór $C_{krp}(\Sigma)$ zawiera wszystkie zdania języka $L(\sigma)$ będące konsekwencjami zdań z Σ. Niech zapis $\alpha \in L(\sigma)$ oznacza, że α jest zdaniem języka $L(\sigma)$, a $\Sigma \subseteq L(\sigma)$ oznacza, że Σ jest zbiorem zdań tego języka. Dla dowolnej $K \subseteq Str_\sigma$ niech $\overline{K}$ oznacza klasę $Str_\sigma - K$.

Dla dowolnych $K \subseteq Str_\sigma$ oraz zbioru zdań Σ języka $L(\sigma)$ niech:

- $Th(K) = \{\alpha \in L(\sigma) : \mathfrak{A} \models \alpha \text{ dla wszystkich } \mathfrak{A} \in K\}$
- $Mod(\Sigma) = \{\mathfrak{A} \in Str_\sigma : \mathfrak{A} \models \alpha \text{ dla wszystkich } \alpha \in \Sigma\}$.

Pomijamy indeks σ przy symbolach tych operacji. W dalszym ciągu zakłada się, że sygnatura σ jest ustalona.

Klasy elementarne

Będziemy używać skrótowych oznaczeń:

- $Th(\alpha)$ dla $Th(\{\alpha\})$
- $Mod(\mathfrak{A})$ dla $Mod(\{\mathfrak{A}\})$.

Bezpośrednio z twierdzenia o pełności klasycznego rachunku predykatów otrzymujemy, że dla każdego zbioru $\Sigma \subseteq L(\sigma)$:

- $Th(Mod(\Sigma)) = C_{krp}(\Sigma)$.

Z kolei, bezpośrednią konsekwencją twierdzenia o zwartości jest:

- Jeśli $\{K_i : i \in I\} = \{Mod(\psi_i) : i \in I\}$ jest rodziną klas taką, że $\bigcap\limits_{i \in I} K_i = \emptyset$, to istnieje skończony zbiór $J \subseteq I$ taki, że $\bigcap\limits_{i \in J} K_i = \emptyset$.

Klasy elementarne

Szkic dowodu. Przypuśćmy, że $K_i = Mod(\psi_i)$. Ponieważ $\bigcap\limits_{i \in I} K_i = \emptyset$, więc zbiór zdań $\{\psi_i : i \in I\}$ nie ma modelu.

Na mocy twierdzenia o zwartości, istnieje skończony zbiór $J \subseteq I$ taki, że $\{\psi_i : i \in J\}$ nie ma modelu.

To jest równoważne temu, że $\bigcap\limits_{i \in J} K_i = \emptyset$, czyli twierdzenie zostało udowodnione.

Klasy elementarne

- Mówimy, że $K \subseteq Str_\sigma$ jest ***klasą elementarną***, gdy $K = Mod(\alpha)$ dla pewnego zdania $\alpha \in L(\sigma)$. Jeśli K jest klasą elementarną, to piszemy $K \in EC$.
- Mówimy, że K jest ***klasą Δ-elementarną***, gdy $K = Mod(\Sigma)$ dla pewnego zbioru zdań $\Sigma \subseteq L(\sigma)$. Jeśli K jest klasą Δ-elementarną, to piszemy $K \in EC_\Delta$. Wprost z definicji wynika, że $K \in EC_\Delta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $K = \bigcap_{i \in I} Mod(\alpha_i)$.
- Mówimy, że K jest ***klasą Σ-elementarną***, gdy K jest sumą klas elementarnych. Jeśli K jest klasą Σ-elementarną, to piszemy $K \in EC_\Sigma$.

Klasy elementarne

- Mówimy, że K jest ***klasą $\Delta\Sigma$-elementarną***, gdy K jest sumą klas Δ-elementarnych. Jeśli K jest klasą $\Delta\Sigma$-elementarną, to piszemy $K \in EC_{\Delta\Sigma}$.
- Jeśli K jest przekrojem rodziny klas Σ-elementarnych, to mówimy, że K jest ***klasą $\Sigma\Delta$-elementarną*** i piszemy $K \in EC_{\Sigma\Delta}$.

- $\bigcap\limits_{i \in I} Mod(\alpha_i) = Mod(\bigcup\limits_{i \in I} \{\alpha_i\})$
- $Mod(Th(Mod(\Sigma))) = Mod(\Sigma)$
- $Th(Mod(Th(K))) = Th(K)$.

Klasy elementarne

- A. $K \in EC$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{K} \in EC$.
- B. $K \in EC_{\Delta}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $K = Mod(Th(K))$.
- C. $K \in EC_{\Delta}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{K} \in EC_{\Sigma}$.
- D. Następujące warunki są równoważne:
  1. $K \in EC_{\Delta\Sigma}$
  2. $\overline{K} \in EC_{\Sigma\Delta}$
  3. $\overline{K} \in EC_{\Delta\Sigma}$
  4. $K \in EC_{\Sigma\Delta}$.
- E. $K \in EC_{\Delta\Sigma}$ wtedy i tylko wtedy, gdy K jest domknięta na elementarną równoważność, czyli: jeśli $\mathfrak{A} \in K$ oraz $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{B} \in K$.
- F. Jeśli $K \in EC$ lub $K \in EC_{\Delta}$ lub $K \in EC_{\Sigma}$, to K jest domknięta na elementarną równoważność.
- G. $EC = EC_{\Delta} \cap EC_{\Sigma}$.

Klasy elementarne

Szkic dowodu.

- A. Niech $K \in EC$, powiedzmy $K = Mod(\psi)$. Wtedy $\overline{K} = Mod(\neg\psi)$, czyli $\overline{K} \in EC$. W drugą stronę podobnie.
- B. Jeśli $K = Mod(Th(K))$, to oczywiście $K \in EC_\Delta$. Na odwrót, jeśli $K \in EC_\Delta$, to $K = Mod(\Sigma)$ dla pewnego zbioru zdań Σ. Tak więc (na mocy definicji operacji Th oraz Mod):

$$Mod(Th(K)) = Mod(Th(Mod(\Sigma))) = Mod(\Sigma) = K.$$

Klasy elementarne

- C. Przypuśćmy, że $K \in EC_\Delta$, czyli $K = Mod(\Psi)$ dla pewnego zbioru zdań Ψ. Zachodzą wtedy następujące równości:
  - $\overline{K} =$
  - $= Str_\sigma - Mod(\Psi) =$
  - $= Str_\sigma - \bigcap\limits_{\psi \in \Psi} Mod(\psi) =$
  - $= \bigcup\limits_{\psi \in \Psi} (Str_\sigma - Mod(\psi)) =$
  - $= \bigcup\limits_{\psi \in \Psi} Mod(\neg\psi)$
  - a zatem $\overline{K} \in EC_\Sigma$.

  Dowód implikacji w drugą stronę jest podobny.

Klasy elementarne

- D. Przypuśćmy, że $K \in EC_{\Sigma\Delta}$. Wtedy $K = \bigcap\limits_{i \in I} K_i$, gdzie, dla $i \in I$ mamy $K_i = \bigcup\limits_{j \in J_i} Mod(\psi_{ij})$. Niech teraz $J = \prod\limits_{i \in I} J_i$. Wtedy (na mocy aksjomatu wyboru) zachodzą równości:

$$K = \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} Mod(\psi_{ij}) = \bigcup_{f \in J} \bigcap_{i \in I} Mod(\psi_{if(i)}),$$

a zatem $K \in EC_{\Delta\Sigma}$. Z drugiej strony, jeśli $K \in EC_{\Delta\Sigma}$, to $\overline{K} \in EC_{\Sigma\Delta}$, a stąd $\overline{K} \in EC_{\Delta\Sigma}$ oraz $K \in EC_{\Sigma\Delta}$.

Klasy elementarne

- E. Jeśli $K \in EC_{\Delta\Sigma}$, to oczywiście K jest domknięta na elementarną równoważność. Z drugiej strony, przypuśćmy, że K jest domknięta na elementarną równoważność. Jeśli $\mathfrak{A} \in K$, to (na mocy definicji operacji Th i Mod) $Mod(Th(\mathfrak{A})) \subseteq K$, a więc dostajemy $\bigcup\limits_{\mathfrak{A} \in K} Mod(Th(\mathfrak{A})) \subseteq K$. Oczywiście zachodzi również inkluzja odwrotna, co razem daje równość $K = \bigcup\limits_{\mathfrak{A} \in K} Mod(Th(\mathfrak{A}))$. A to oznacza, że $K \in EC_{\Delta\Sigma}$.
- F. Wynika bezpośrednio z E.

Klasy elementarne

- G. Inkluzja $EC \subseteq EC_\Delta \cap EC_\Sigma$ jest oczywista. Z drugiej strony, niech $K \in EC_\Delta \cap EC_\Sigma$. Wtedy zarówno K jak i $\overline{K}$ są obie w EC_Δ. Niech zatem:
  - $K = \bigcap\limits_{i \in I} Mod(\psi_i)$,
  - $\overline{K} = \bigcap\limits_{j \in J} Mod(\varphi_j)$.

  Wtedy zachodzą równości:
  - $\emptyset = K \cap \overline{K} = \bigcap\limits_{i \in I} Mod(\psi_i) \cap \bigcap\limits_{j \in J} Mod(\varphi_j)$.

  Wtedy, jak już wiemy, istnieją skończone podzbiory I_0 i J_0, odpowiednio, zbiorów I oraz J takie,że:
  - $(*) \quad \emptyset = \bigcap\limits_{i \in I_0} Mod(\psi_i) \cap \bigcap\limits_{j \in J_0} Mod(\varphi_j)$.

Klasy elementarne

- Niech ψ będzie koniunkcją zdań $\{\psi_i : i \in I_0\}$. Wtedy $Mod(\psi) = \bigcap\limits_{i \in I_0} Mod(\psi_i)$.

  Ponieważ zachodzą inkluzje:

  - $K \subseteq Mod(\psi)$
  - $\overline{K} \subseteq \bigcap\limits_{i \in I_0} Mod(\psi_i)$,

  więc zachodzi również inkluzja:

  - $\overline{\bigcap\limits_{j \in J_0} Mod(\varphi_j)} \subseteq K$.

  Jednak, na mocy $(*)$, mamy:

  - $Mod(\psi) \subseteq \overline{\bigcap\limits_{j \in J_0} Mod(\varphi_j)} \subseteq K$.

  To pokazuje, że $K = Mod(\psi)$, a więc, że $K \in EC$.

Klasy elementarne

Różne rodzaje klas elementarnych charakteryzować można także w terminach algebraicznych. Zdefiniujmy:

- $Pow(K) =$ klasa struktur izomorficznych z ultrapotęgą jakiejś struktury z K.
- $Prod(K) =$ klasa struktur izomorficznych z ultraproduktem jakichś struktur z K.

Używamy skrótów:

- $Pow(\mathfrak{A})$ dla $Pow(\{\mathfrak{A}\})$
- $Prod(\mathfrak{A})$ dla $Prod(\{\mathfrak{A}\})$.

Mówimy, że klasa K jest domknięta na tworzenie:

- utrapotęg, gdy $K = Pow(K)$
- ultraproduktów, gdy $K = Prod(K)$.

Klasy elementarne

- A. Jeśli K jest domknięta na elementarną równoważność, to K oraz $\overline{K}$ są domknięte na izomorfizm oraz tworzenie ultrapotęg.
- B. Jeśli $K \in EC_{\Delta\Sigma}$, to K i $\overline{K}$ są domknięte na tworzenie ultrapotęg.
- C. $K \in EC_{\Delta}$ wtedy i tylko wtedy, gdy K jest domknięta na: izomorfizm, elementarną równoważność oraz tworzenie ultraproduktów.
- D. $K \in EC_{\Delta}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $K \in EC_{\Delta\Sigma}$ oraz K jest domknięta na tworzenie ultraproduktów.
- E. $K \in EC$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
  1. K oraz $\overline{K}$ są domknięte na izomorfizm oraz tworzenie ultraproduktów;
  2. K jest domknięta na elementarną równoważność.
- F. $K \in EC$ wtedy i tylko wtedy, gdy: $K \in EC_{\Delta\Sigma}$ oraz K i $\overline{K}$ są domknięte na tworzenie ultraproduktów.

Klasy elementarne

Szkic dowodu.

- A. Wynika bezpośrednio z tego, że każda ultrapotęga struktury $\mathfrak{A}$ jest elementarnie równoważna z $\mathfrak{A}$.
- B. Bezpośrednia konsekwencja A.
- C. Przypuśćmy, że $K \in EC_\Delta$, czyli $K = Mod(\Psi)$ dla pewnego zbioru zdań Ψ. Wtedy oczywiście K jest domknięta zarówno na izomorfizm, jak i na elementarną równoważność. Ponadto, na mocy twierdzenia Łosia, jest także domknięta na tworzenie ultraproduktów.
  Z drugiej strony, przypuśćmy, że K jest domknięta na: izomorfizm, elementarną równoważność oraz tworzenie ultraproduktów. Wtedy zachodzi inkluzja
  $$K \subseteq Mod(Th(K)).$$

Klasy elementarne

- Dla dowodu inkluzji odwrotnej weźmy dowolną strukturę $\mathfrak{A} \in Mod(Th(K))$. Niech $\{\psi_i : i \in I\}$ będzie zbiorem wszystkich zdań prawdziwych w $\mathfrak{A}$. Dla każdego $i \in I$ istnieje struktura $\mathfrak{B}_i \in K$ taka, że $\mathfrak{B}_i$ jest modelem ψ_i (gdyż w przeciwnym razie mielibyśmy $\neg\psi_i \in Th(\mathfrak{A})$, czyli $\mathfrak{A} \models \neg\psi_i$). Dla dowolnego $j \in I$, niech $J_i = \{i \in I : \mathfrak{B}_i \models \psi_j\}$. Wtedy rodzina $\{J_j : j \in I\}$ ma własność przekrojów skończonych, a zatem może zostać rozszerzona do ultrafiltru F na I. Niech $\mathfrak{B} = \prod\limits_{i \in I} \mathfrak{B}_i / F$. Wtedy $\mathfrak{B} \in K$, ponieważ K jest domknięta na tworzenie ultraproduktów. Na mocy konstrukcji ultrafiltru F, każde zdanie ψ_i jest prawdziwe w $\mathfrak{B}$. Wynika stąd, że $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Klasy elementarne

- Ponieważ K jest domknięta na elementarną równoważność, więc $\mathfrak{A} \in K$. Zakończyliśmy zatem dowód inkluzji:

$$Mod(Th(K)) \subseteq K.$$

  Obie inkluzje dają równość $K = Mod(Th(K))$, a to oznacza, że $K \in EC_{\Delta}$.
- D. Wynika bezpośrednio z C.
- E. Wynika bezpośrednio z C.
- F. Wynika bezpośrednio z E.

Częściowe izomorfizmy

Dla dowolnego zbioru formuł Δ oraz struktur $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, mówimy, że funkcja $f : dom(\mathfrak{A}) \to dom(\mathfrak{B})$ jest ***częściowym Δ-włożeniem*** $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$, co zapisujemy $f : \mathfrak{A} \hookrightarrow_p^\Delta \mathfrak{B}$, gdy istnieje zbiór $X \subseteq dom(\mathfrak{A})$ taki, że ograniczenie $f : X \to dom(\mathfrak{B})$ jest injekcją oraz dla każdej formuły $\psi(x_1, \ldots, x_n) \in \Delta$ i każdego ciągu $a_1, \ldots, a_n$ elementów X: $\mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n]$ dokładnie wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models \psi[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$.

W szczególności, gdy $f : \mathfrak{A} \hookrightarrow_p^\Delta \mathfrak{B}$ oraz:

- Δ jest zbiorem wszystkich formuł bez kwantyfikatorów, to f nazywamy ***włożeniem częściowym***.
- Δ jest zbiorem wszystkich formuł, to f nazywamy ***elementarnym włożeniem częściowym***.

Częściowe izomorfizmy

Piszemy $\mathfrak{A} \equiv^{\Delta} \mathfrak{B}$, gdy $Th(\mathfrak{A}) \cap \Delta = Th(\mathfrak{B}) \cap \Delta$, czyli gdy $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ spełniają te same zdania ze zbioru Δ. Dla dowolnego zbioru formuł Δ oraz dowolnych $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ następujące warunki są równoważne:

- $\mathfrak{A} \equiv^{\Delta} \mathfrak{B}$.
- Istnieje (skończone) częściowe Δ-włożenie $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$.

Dla dowolnej rodziny E częściowych włożeń $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$ mówimy, że:

- E ma własność ***rozszerzania w przód***, gdy dla każdego $f \in E$ oraz każdego $a \in dom(\mathfrak{A})$ istnieje $g \in E$ takie, że $f \subseteq g$ oraz $a \in dom(g)$.
- E ma własność ***rozszerzania w tył***, gdy dla każdego $f \in E$ oraz każdego $b \in dom(\mathfrak{B})$ istnieje $g \in E$ takie, że $f \subseteq g$ oraz $b \in dom(g)$.
- E ma własność ***rozszerzania w przód i w tył***, gdy E ma zarówno własność rozszerzania w przód jak i własność rozszerzania w tył.

Częściowe izomorfizmy

Struktury $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są ***częściowo izomorficzne***, co zapisujemy $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$, gdy istnieje niepusta rodzina częściowych włożeń $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$, która ma własność rozszerzania w przód i w tył.

- (★) *Jeżeli $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są strukturami przeliczalnymi, to ich częściowy izomorfizm pociąga za sobą ich izomorfizm.*

Szkic dowodu. Niech $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ będą przeliczalne i niech E będzie rodziną częściowych izomorfizmów o własności rozszerzania w tył i w przód ustalającą, że $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.

Częściowe izomorfizmy

Ustawiamy uniwersa struktur $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ w ciągi:

- $dom(\mathfrak{A}) = (a_k)_{k\in\omega}$
- $dom(\mathfrak{B}) = (b_k)_{k\in\omega}$.

- Ustalamy $f_0 \in E$. Zbudujemy wstępujący łańcuch $f_0 \subseteq f_1 \subseteq \ldots \subseteq f_k \subseteq \ldots$ elementów E.
- Dla zbudowanego już f_{2k} niech f_{2k+1} będzie rozszerzeniem f_{2k} takim, że $a_k \in dom(f_{2k})$.
- Dla zbudowanego już f_{2k} niech f_{2k+2} będzie rozszerzeniem f_{2k+1} takim, że $b_k \in dom(f_{2k+1})$.
- Wtedy suma $f = \bigcup\limits_{k\in\omega} f_k$ jest izomorfizmem między $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$.

Częściowe izomorfizmy

Powiemy, że $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są ***skończenie izomorficzne***, gdy istnieje ciąg $(I_n)_{n\in\omega}$ o następujących własnościach:

- Każdy I_n jest niepustym zbiorem częściowych izomorfizmów z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$.
- Jeśli $f \in I_{n+1}$ oraz $a \in dom(\mathfrak{A})$, to istnieje $g \in I_n$ taki, że $f \subseteq g$ oraz $a \in dom(g)$.
- Jeśli $f \in I_{n+1}$ oraz $b \in dom(\mathfrak{B})$, to istnieje $g \in I_n$ taki, że $f \subseteq g$ oraz $b \in rng(g)$.

Jeśli rodzina $(I_n)_{n\in\omega}$ ma powyższe własności, to piszemy: $(I_n)_{n\in\omega} : \mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$. Jeśli $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są skończenie izomorficzne, to piszemy $\mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$.

Twierdzenie Fraïssé'go

- **Twierdzenie Fraïssé'go.** *Dla dowolnej skończonej σ oraz $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$.*

Przypomnijmy pojęcie ***kwantyfikatorowego rzędu formuły***:

- $qr(\varphi) = 0$, gdy φ jest atomowa;
- $qr(\neg\varphi) = qr(\varphi)$
- $qr(\varphi \vee \psi) = \max\{qr(\varphi), qr(\psi)\}$ (podobnie dla innych funktorów dwuargumentowych);
- $qr(\exists x\varphi) = qr(\varphi) + 1$.

Twierdzenie Fraïssé'go

Powiemy, że struktury $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są ***m-izomorficzne***, gdy istnieje ciąg $I_0, \ldots, I_m$ niepustych zbiorów częściowych izomorfizmów z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$ taki, że:

- Jeśli $n+1 \leqslant m$, $f \in I_{n+1}$ oraz $a \in dom(\mathfrak{A})$, to istnieje $g \in I_n$ taki, że $f \subseteq g$ oraz $a \in dom(g)$.
- Jeśli $n+1 \leqslant m$, $f \in I_{n+1}$ oraz $b \in dom(\mathfrak{B})$, to istnieje $g \in I_n$ taki, że $f \subseteq g$ oraz $b \in rng(g)$.

Jeśli $I_0, \ldots, I_m$ jest ciągiem o powyższych własnościach, to piszemy $(I_n)_{n \leqslant m} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$. Jeśli $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są m-izomorficzne, to piszemy $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$.

W dowodzie twierdzenia Fraïssé'go wykorzystujemy następujące fakty:

- Niech $(I_n)_{n \in \omega} : \mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$. Wtedy dla każdej formuły φ o k zmiennych wolnych: jeśli $qr(\varphi) \leqslant n$, $f \in I_n$ oraz $a_0, \ldots a_{k-1} \in dom(f)$: $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots a_{k-1}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} \models \varphi[f(a_0), \ldots f(a_{k-1})]$.
- Jeśli $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ spełniają te same zdania o rzędzie kwantyfikatorowym $\leqslant m$.
- Dla każdych n i r istnieje tylko skończenie wiele klas równoważności względem relacji równoważności logicznej w zbiorze wszystkich formuł o r zmiennych wolnych i o rzędzie kwantyfikatorowym $\leqslant n$.
- Jeśli $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$.
- Jeśli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ spełniają te same zdania o rzędzie kwantyfikatorowym $\leqslant m$, to $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$.
- Niech σ będzie skończona i czysto relacyjna. Wtedy dla każdych struktur $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str_\sigma$ następujące warunki są równoważne:
  1. $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$
  2. $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ spełniają te same zdania o rzędzie kwantyfikatorowym $\leqslant m$.

Produkty podproste

- Jeśli $\prod_{t\in T} \mathfrak{A}_t$ jest produktem prostym rodziny algebr $(\mathfrak{A}_t)_{t\in T} = ((A_t, \{f_j^t : j \in J\}))_{t\in T}$, to dla każdego $k \in T$ określamy funkcję rzutu $Pr_k : \prod_{t\in T} A_t \to A_k$ warunkiem: $Pr_k((a_t)_{t\in T}) = a_k$.
- Niech $\mathfrak{B}$ będzie podalgebrą produktu prostego $\prod_{t\in T} \mathfrak{A}_t$. Mówimy, że $\mathfrak{B}$ jest ***produktem podprostym*** rodziny $(\mathfrak{A}_t)_{t\in T} = ((A_t, \{f_j^t : j \in J\}))_{t\in T}$, gdy dla każdego $k \in T$ odwzorowanie $Pr_k : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}_t$ (ograniczone do $dom(\mathfrak{B})$) jest homomorfizmem $\mathfrak{B}$ na $\mathfrak{A}_k$.
- Niech $\mathfrak{B}$ będzie podalgebrą produktu prostego $\prod_{t\in T} \mathfrak{A}_t$. Mówimy, że $\mathfrak{B}$ jest ***trywialnym produktem podprostym*** rodziny $(\mathfrak{A}_t)_{t\in T} = ((A_t, \{f_j^t : j \in J\}))_{t\in T}$, gdy istnieje $k \in T$ taki, że $\mathfrak{B}$ jest izomorficzna z $\mathfrak{A}_k$.

Twierdzenie Birkhoffa o faktoryzacji

- Mówimy, że $\mathfrak{B}$ jest ***podprosto nieredukowalna***, gdy dla dowolnej rodziny algebr $\{\mathfrak{A}_t : t \in T\}$, jeśli $\mathfrak{B}$ jest produktem podprostym rodziny $\{\mathfrak{A}_t : t \in T\}$, to $\mathfrak{B}$ jest trywialnym produktem podprostym rodziny $\{\mathfrak{A}_t : t \in T\}$.

Twierdzenie Birkhoffa o faktoryzacji

- *Każda algebra jest izomorficzna z podprostym produktem pewnej rodziny algebr podprosto nieredukowalnych.*

Twierdzenie Birkhoffa o faktoryzacji

Dowód twierdzenia o faktoryzacji sprowadza się do pokazania, że:

- Dla dowolnej algebry $\mathfrak{A}$ oraz dowolnych $a, b \in dom(\mathfrak{A})$ takich, że $a \neq b$ istnieje kongruencja $\theta_{a,b}$ maksymalna w zbiorze kongruencji $\{\theta : \neg a\theta b\}$.
- Każda algebra $\mathfrak{A}/\theta_{a,b}$ jest podprosto nieredukowalna.
- $\mathfrak{A}$ jest izomorficzna z podprostym produktem algebr $\mathfrak{A}/\theta_{a,b}$.

- Twierdzenie o faktoryzacji jest zatem algebraicznym odpowiednikiem twierdzenia arytmetycznego o rozkładzie każdej liczby na czynniki pierwsze.

Klasy równościościowe

- Poniższe konstrukcje dotyczą języków KRP z identycznością oraz wyłącznie symbolami funkcyjnymi (a więc języków, w których „mówimy" o algebrach).
- Przez ***równość*** rozumiemy formułę atomową, będącą identycznością termów.
- Powiemy, że klasa K algebr (tego samego typu) jest ***klasą równościową***, gdy istnieje zbiór równości Q taki, że $K = Mod(Q)$.

Rozmaitości algebr

Powiemy, że K algebr (tego samego typu) jest ***rozmaitością*** (algebr), gdy K jest domknięta na:

- (S) tworzenie podalgebr, czyli: jeśli $\mathfrak{A} \in K$ oraz $\mathfrak{B}$ jest podalgebrą $\mathfrak{A}$, to $\mathfrak{B} \in K$;
- (H) obrazy homomorficzne, czyli: jeśli $\mathfrak{A} \in K$ oraz $\mathfrak{B}$ jest obrazem homomorficznym $\mathfrak{A}$, to $\mathfrak{B} \in K$;
- (P) tworzenie produktów prostych, czyli: jeśli $\mathfrak{A}_t \in K$ dla wszystkich $t \in T$, to $\prod\limits_{t \in T} \mathfrak{A}_t \in K$.

Uwaga. Niektórzy autorzy rozważają wyłącznie „abstrakcyjne” klasy algebr, tj. klasy domknięte na izomorfizm.

Twierdzenie Birkhoffa

Twierdzenie Birkhoffa.

- *Każda klasa równościowa jest rozmaitością.*
- *Każda rozmaitość jest klasą równościową.*

- Twierdzenie Birkhoffa podaje zatem związek między semantyczną oraz algebraiczną charakterystyką klas algebr.

Algebry wolne

- Przez klasę (rozmaitość) ***zdegenerowaną*** rozumiemy klasę (rozmaitość) zawierającą wyłącznie algebry jednoelementowe.
- Niech K będzie klasą algebr tego samego typu, a $\mathfrak{A}$ algebrą tego typu oraz niech $X \subseteq dom(\mathfrak{A})$. Powiemy, że X jest ***wolny w $\mathfrak{A}$ względem K*** (***K-wolny w $\mathfrak{A}$***), gdy dla każdej algebry $\mathfrak{B}$ w K oraz każdego odwzorowania $f : X \to dom(\mathfrak{B})$ istnieje homomorfizm h z $\mathfrak{A}_{[X]}$ na $\mathfrak{B}$ taki, że $f \subseteq h$ (czyli h rozszerza f).
- Jeśli X jest K-wolny w $\mathfrak{A}$ oraz X generuje $\mathfrak{A}$ (czyli $\mathfrak{A}_{[X]} = \mathfrak{A}$), to mówimy, że X ***w sposób wolny generuje $\mathfrak{A}$ względem K*** (***X K-swobodnie generuje $\mathfrak{A}$***). Mówimy też wtedy (czyli gdy istnieje X o powyższej własności), że $\mathfrak{A}$ jest algebrą ***K-wolną***. Zbiór X o powyższej własności nazywamy zbiorem ***wolnych generatorów*** algebry $\mathfrak{A}$. Jeśli $\mathfrak{A}$ jest algebrą K-wolną oraz $\mathfrak{A} \in K$, to mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest ***wolną K-algebrą***.

Algebry wolne

- K-algebra generowana w sposób swobodny przez n elementów (gdzie n jest liczbą kardynalną) jest wyznaczona w sposób jednoznaczny (z dokładnością do izomorfizmu).
- Dla wszystkich K oraz wszystkich liczb naturalnych n istnieje algebra $\mathfrak{A}$ o n generatorach taka, że $\mathfrak{A}$ jest K-wolna (choć niekoniecznie $\mathfrak{A} \in K$).
- Dla każdej niezdegenerowanej rozmaitości K i każdej liczby naturalnej n istnieje $\mathfrak{A} \in K$ taka, że $\mathfrak{A}$ ma n wolnych generatorów (czyli: istnieje wolna K-algebra o n generatorach).
- Każda algebra w rozmaitości K jest izomorficzna z jakąś algebrą ilorazową wolnej K-algebry.
- Niech K będzie klasą niezdegenerowaną domkniętą na podalgebry i produkty proste. Wtedy dla każdej liczby naturalnej n istnieje wolna K-algebra o n generatorach.
- Jeśli K jest domknięta na podalgebry i produkty proste, to każda algebra $\mathfrak{A} \in K$ jest izomorficzna z algebrą ilorazową wolnej K-algebry.

Twierdzenie Malcewa

- Przez ***quasi-równość*** rozumiemy każdą formułę o postaci: $(s_1 \doteq t_1 \wedge s_2 \doteq t_2 \wedge \ldots \wedge s_n \doteq t_n) \rightarrow s \doteq t$, gdzie wszystkie s_i, t_i, s, t są termami.
- Mówimy, że klasa algebr K jest:
  - ***quasi-równościowa***, gdy istnieje system Q quasi-równości taki, że $K = Mod(Q)$;
  - ***quasi-rozmaitością***, gdy K jest domknięta na: izomorfizmy, podalgebry, produkty proste oraz ultraprodukty.

Twierdzenie Malcewa.

- *Każda quasi-rozmaitość jest klasą quasi-równościową.*
- *Każda klasa quasi-równościowa jest quasi-rozmaitością.*

Wykorzystywana literatura

- Adamowicz, Z., Zbierski, P. 1991. *Logika matematyczna*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Addison, J.W., Henkin, L., Tarski, A. (eds.) 1965. *The theory of models*. North-Holland, Amsterdam.
- Badesa, C. 2004. *The birth of model theory. Löwenheim's theorem in the frame of the theory of relatives*. Princeton University Press, Princeton and Oxford.
- Batóg, T. 1999. *Podstawy logiki*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.
- Bell, J.L., Machover, M. 1977. *A course in mathematical logic*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Bell, J.L., Slomson, A.B. 1969. *Models and ultraproducts: an introduction*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam London.

Wykorzystywana literatura

- Chang, C.C., Keisler, J.H. 1973. *Model theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam London; American Elsevier Publishing Company, Inc., New York.
- Cohn, P. 1965. *Universal algebra*. Harper & Row Publishers, New York Evanstone and London.
- Cori, R., Lascar, D. 2001. *Mathematical logic. A course with exercises*. Oxford University Press, Oxford.
- Ebbinghaus, H.D., Flum, J. 1995. *Finite Model Theory.* Springer Verlag.
- Grzegorczyk, A. 1975. *Zarys logiki matematycznej*. PWN, Warszawa.
- Hedman, S. 2004. *A First Course in Logic. An Introduction to Model Theory, Proof Theory, Computability, and Complexity.* Oxford University Press, Oxford.

Wykorzystywana literatura

- Hinman, P.G. 2005. *Fundamentals of mathematical logic*. A K Peters, Wellesley, Massachusetts.
- Hodges, W. 1993. *Model theory*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Ježek, J. 1976. *Univerzálni algebra a teorie modelů*. Matematický seminář SNTL, Praha.
- Keisler, J.H. 1977. Fundamentals of model theory. W: J. Barwise (ed.) *Handbook of mathematical logic*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam New York Oxford, Part A: Model Theory, 47–103.
- Ławrow, I.A., Maksimowa, Ł.L. 2004. *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Marciszewski, W. 1987. *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny.* PWN, Warszawa.

Wykorzystywana literatura

- Marcja, A., Toffalori, C. 2003. *A guide to classical and modern model theory*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.
- Marek, I. 2002. *Elementy logiki formalnej*. Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice.
- Marker, D. 2002. *Model theory: an introduction*. Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg.
- Monk, J.D. 1976. *Mathematical logic.* Springer Verlag, New York Heidelberg.
- Piękosz, A. 2008. *Wstęp do teorii modeli.* Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków.
- Pogorzelski, W.A. 1981. *Klasyczny rachunek predykatów*. PWN, Warszawa.

Wykorzystywana literatura

- Pogorzelski, W.A. 1992. *Elementarny słownik logiki formalnej*. Uniwersytet Warszawski, Filia w Białymstoku, Białystok.
- Poizat, B. 2000. *A course in model theory*. Springer.
- Porębska, M., Suchoń, W. 1991. *Elementarne wprowadzenie w logikę formalną*. PWN, Warszawa.
- Sacks, G.E. 1972. *Saturated model theory* . W.A. Benjamin, Inc., Reading, Massachusetts.
- Shoenfield, J. 1973. *Mathematical logic*. Reading, Massachusetts.
- Surma, S. (ed.) 1973. *Studies in the history of mathematical logic*. Zakład Narodowy imienia Ossolińskich, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, Wrocław, Warszawa, Kraków, Gdańsk.