

OGRÓD DENDROLOGICZNY

Czyli o budowie drzew semantycznych

ZAŁÓŻMY

- ✓ Jednego z Was porwał okrutny PRL.
- ✓ W ramach okupu żąda, by obecni na sali udowodnili, że podane przez nich formuły są zawsze prawdziwe.
- ✓ Zaczynają zupełnie niewinnie od formuły:

$$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$$

CO POCZAĆ???



MOŻE ŁOPATOLOGICZNIE?

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$((p \vee q) \wedge \neg p)$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

UDAŁO SIĘ!

Metoda, którą tego dokonaliśmy nosi nazwę metody zerojedynkowej

MOŻE ŁOPATOLOGICZNIE?

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$((p \vee q) \wedge \neg p)$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$
1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1

UDAŁO SIĘ!

Metoda, którą tego dokonaliśmy nosi nazwę metody zerojedynkowej

KOLEJNY PRZYKŁAD

Formuła trochę bardziej złośliwa:

$$((p \wedge \neg q) \wedge (\neg r \rightarrow \neg q)) \wedge ((\neg q \wedge (p \vee r)))$$

A jakby było za mało nieszczęść – trzeba udowodnić, że ta formuła jest zawsze fałszywa.

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$p \vee \neg p$	$\neg r \leftrightarrow \neg r$	$((p \neg q) \vee (\neg r \rightarrow \neg q))$	$p \vee r$	$(\neg q \vee (p \vee r))$	całocisć
1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0

DOBRA WIADOMOŚĆ

Istnieją mniej żmudne i męczące metody rozwiązywania takich problemów 😊

I właśnie dlatego wybieramy się na

Wycieczkę do Ogrodu Drzew Semantycznych,
czyli miejsca ucieczki od gigantycznych tabel

a w nim:

- ✓ Jak budować drzewa
- ✓ O liściach, korzeniach i innych częściach drzewa
- ✓ Jak na podstawie korzenia wnioskować o liściach
- ✓ Po co w ogóle budować drzewa



COŚ STAREGO, COŚ NOWEGO

Na razie wiemy, jak na podstawie **liści** określić **korzeń**
tzw. *bottom-up*

Dziś tzw. *top to bottom*, czyli jak na podstawie **korzenia** powiedzieć coś o **gałęziach i liściach**

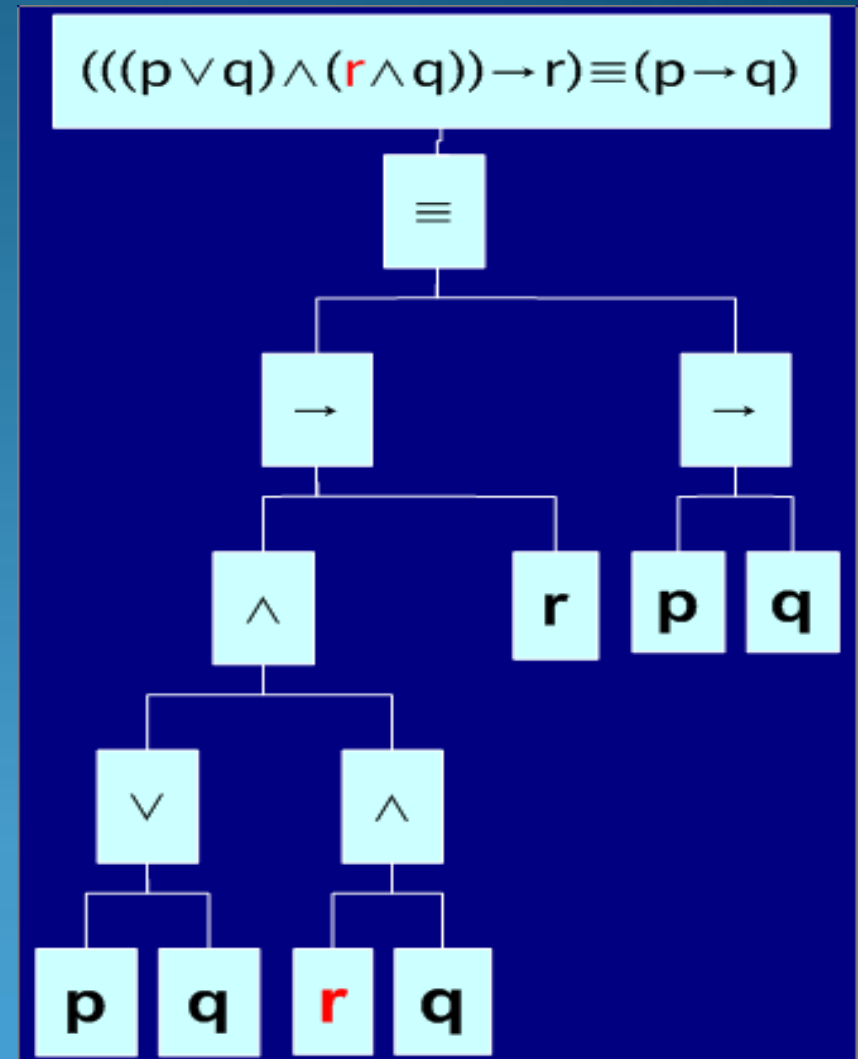


COŚ STAREGO, COŚ NOWEGO

Jak na razie było np. tak:

Teraz w dużym uproszczeniu będzie tak:

1. Przyjmiemy, że to co w korzeniu jest prawdziwe
2. Dalej będziemy zapisywać, co z tego wynika
3. Będziemy systematycznie sprawdzać, czy w danej gałęzi nie ma *sprzeczności*.



CO Z CZEGO WYNIKA

Najpierw coś łatwego:

$$\begin{array}{c} \neg\neg\alpha \\ | \\ \alpha \end{array}$$

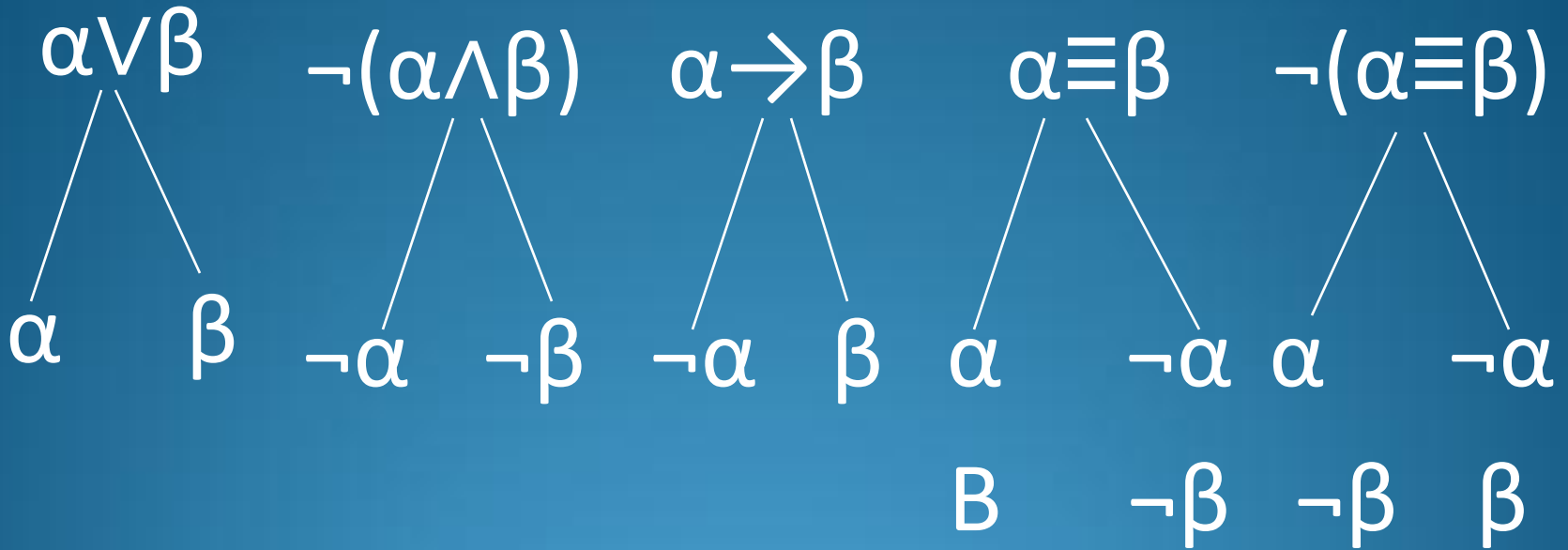
$$\begin{array}{c} \alpha\wedge\beta \\ | \\ \alpha \\ | \\ \beta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg(\alpha\vee\beta) \\ | \\ \neg\alpha \\ | \\ \neg\beta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg(\alpha\rightarrow\beta) \\ | \\ \alpha \\ | \\ \neg\beta \end{array}$$

CO Z CZEGO WYNIKA

Teraz trochę bardziej złożone:



I JESZCZE DWA WAŻNE POJĘCIA

- *GAŁĄŻ OTWARTA*

Gałąź, która nie zawiera żadnych dwóch sprzecznych ze sobą formuł

- *GAŁĄŻ ZAMKNIĘTA*

Gałąź, która zawiera przynajmniej dwie wzajemnie sprzeczne formuły

- ~ Żeby oszczędzić sobie pracy gałęzie zamykamy tak szybko, jak to tylko możliwe, czyli zaraz po pojawieniu się sprzeczności.

PRZYKŁAD

$$(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$$

$(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$

$p \rightarrow q$

$p \vee q$

$\neg p$

q

p

q

p

q

x

o

o

o

OZNACZANIE

1. Formułę w korzeniu oznaczamy (0)

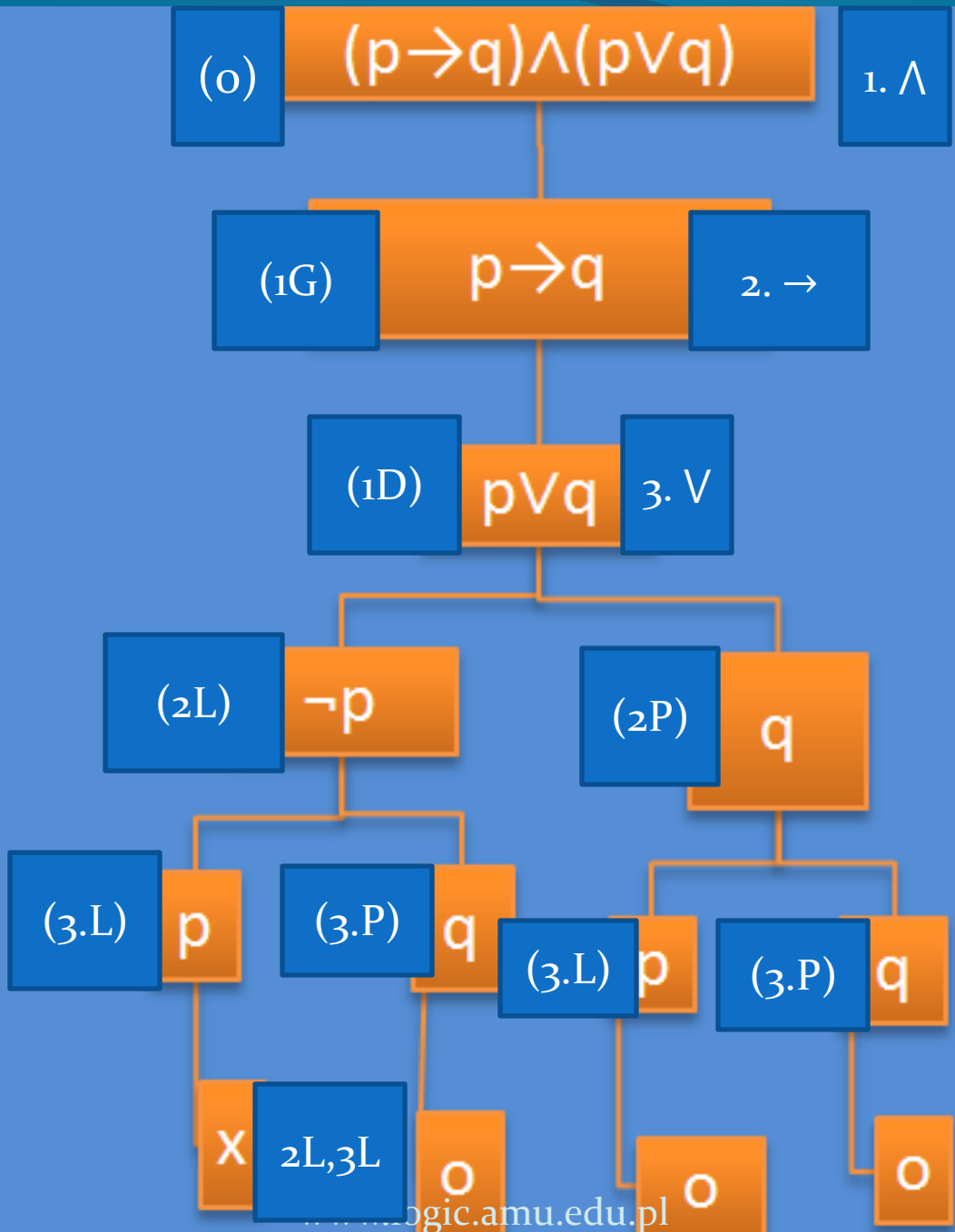
~ *Jeśli w korzeniu jest więcej niż jedna oznaczamy je odpowiednio (0.1, 0.2 itp.)*

2. Numer każdego kroku piszemy z prawej strony formuły, do której go stosujemy. Oznaczamy przy nim jaką regułę wykorzystujemy przy tym kroku. Między jednym a drugim dodajemy kropkę 😊

np. 3. →

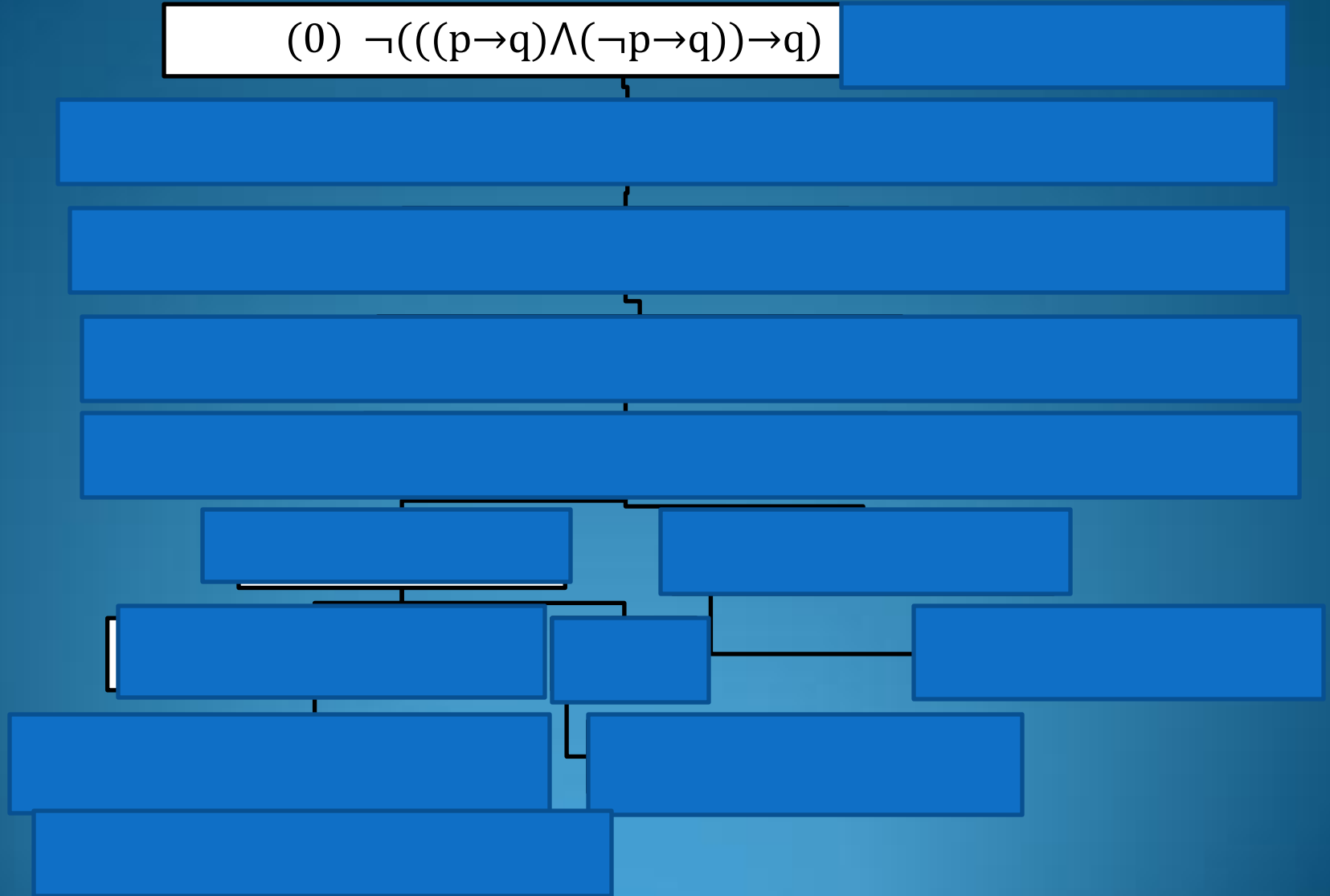
OZNACZANIE

3. Formułę otrzymaną w wyniku wykonania kroku n . numerujemy z lewej strony w nawiasie *np.* (3)
 - ~ gdy w wyniku kroku otrzymujemy dwie formuły nierozgałęzione numerujemy je (nG) i (nD)
 - ~ gdy w wyniku kroku otrzymujemy dwie formuły rozgałęzione numerujemy je (nL) i (nP)
4. Gałąź zamkniętą oznaczamy x i podajemy przy nim numery formuł, które są sprzeczne *np.* $x_{3,7}$
5. Gałąź, otwartą oznaczamy o



JESZCZE JEDEN PRZYKŁAD

(0) $\neg(((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q)$



CO WIEM Z DRZEWA?

- OTWARTA GAŁĄŻ –
wartościowanie, przy którym formuła w korzeniu jest prawdziwa.
- WSZYSTKIE GAŁĘZIE ZAMKNIĘTE –
nie istnieje wartościowanie, dla którego formuła w korzeniu jest prawdziwa *stąd* jest ona *zawsze fałszywa*
- MIN. JEDNA GAŁĄŻ OTWARTA –
istnieje wartościowanie, dla którego formuła w korzeniu jest prawdziwa

PO CO DRZEWA?

M.in. by stwierdzić:

- ✓ Czy dana formuła jest tautologią lub kontrtautologią
- ✓ Czy dany zbiór formuł jest semantycznie niesprzeczny
- ✓ Czy wniosek aby na pewno wynika z przesłanek

Która to wiedza jest **bardzo** przydatna w ściganiu przestępców z PRL.



Za tydzień:

*O rozpoznawaniu przestępców wśród innych,
zwyczajnych ludzi*

przy pomocy:

- ✓ tautologii
- ✓ kontrtautologii
- ✓ zbiorów zdań semantycznie niesprzecznych



Bibliografia:

Opis metody, notacja i przykłady na podstawie

J. Pogonowski, *Wykłady z logiki matematycznej*,
rok akademicki 2007/2008, źródło: www.logic.amu.edu.pl