Semiotyka logiczna (15)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

32 stycznia 2008

Plan na dziś

Plan na dziś:

- Minijęzyk Smullyana;
- Twierdzenie Gödla dla minijęzyka;
- Systemy regularne.

Dla oswojenia się z rozumowaniami przekątniowymi, które odgrywają istotną rolę np. w dowodzie Twierdzenia Gödla o niezupełności Arytmetyki Peana pobawimy się dzisiaj pewnym małym systemem logicznym, skonstruowanym przez Raymonda Smullyana (zob. rozdział 15 w *Szatan, Cantor i nieskończoność oraz inne łamigłówki.*).

Książki z zagadkami logicznymi Raymonda Smullyana

- *Jaki jest tytuł tej książki? Tajemnica Drakuli, zabawy i łamigłówki logiczne.* Warszawa 1993. Przełożył: Bohdan Chwedeńczuk. Trzy wydania polskie.
- *Dama czy tygrys oraz inne zagadki logiczne.* Warszawa 1995, 2004. Przełożył: Bohdan Chwedeńczuk.
- *Szatan, Cantor i nieskończoność oraz inne łamigłówki.* Warszawa 1998. Przełożyli z angielskiego: Anna i Krzysztof Wójtowicz.
- *Przedrzeźniać Przedrzeźniacza. Oraz Inne Zagadki Logiczne Łącznie z Zadziwiającą Przygodą w Krainie Logiki Kombinatorycznej.* Warszawa 2007. Przekład z języka angielskiego: Jerzy Pogonowski.
- *Forever Undecided. A Puzzle Guide to Gödel.* Oxford University Press, 1988. Z angielskiego przełożył Jerzy Pogonowski. Ukazało się w 2007 jako: *Na zawsze nierozstrzygnięte. Zagadkowy Przewodnik po Twierdzeniach Gödla*.

Proste pytania

Jakie pożytki może mieć Humanistka z:

- teorii obliczeń (funkcji rekurencyjnych, maszyn Turinga, ...);
- logiki modalnej (w szczególności, logiki epistemicznej);
- metalogiki?

Są to, jak sądzę, ważne pytania dydaktyczne.
Uprzejmie proszę zwrócić uwagę, że wiedza dotycząca obliczalności oraz matematycznych podstaw logik modalnych należy do standardu nauczania we współczesnych szkółach wyższych na kierunkach: językoznawczych, informatycznych, filozoficznych.

Warto to chyba wziąć pod uwagę układając program studiów Językoznawstwa i Nauk o Informacji.

Minijęzyk Smullyana

Rozważmy język o czterech symbolach: $\clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \heartsuit$.
Wyrażeniem tego języka jest dowolny skończony ciąg tych symboli.

Zbudujemy miniaturowy system S, w którym można dowodzić pewnych wyrażeń tego języka.
Nie będzie przy tym istotne, na czym polega owa dowodliwość.

Interesować nas będzie jedynie jej związek z określoną dla tego języka prawdziwością jego wyrażeń.
Wyrażenia, które nie są prawdziwe w S nazwiemy fałszywymi w S.

Nie będzie istotne, czym jest prawdziwość. Ważne będą jedynie wzajemne związki dowodliwości i prawdziwości.

Minijęzyk Smullyana

Przypiszemy wyrażeniom tego języka następującą interpretację:

- $\spadesuit X$ — stwierdza, że wyrażenie X jest dowodliwe w S;
- $\clubsuit X$ — stwierdza, że wyrażenie XX jest dowodliwe w S;
- $\heartsuit X$ — stwierdza, że wyrażenie X nie jest dowodliwe w S;
- $\diamondsuit X$ — stwierdza, że wyrażenie XX nie jest dowodliwe w S.

Powiemy, że:

- $\spadesuit X$ jest prawdziwe w S, gdy X jest dowodliwe w S;
- $\clubsuit X$ jest prawdziwe w S, gdy XX jest dowodliwe w S;
- $\heartsuit X$ jest prawdziwe w S, gdy X nie jest dowodliwe w S;
- $\diamondsuit X$ jest prawdziwe w S, gdy XX nie jest dowodliwe w S.

Poprawność systemu S

Widać, że ważną cechą systemu S jest jego samozwrotność — można w nim udowodnić różne zdania, stwierdzające, co w tym systemie jest, a co nie jest dowodliwe.
Jedyne założenie, które czynimy o systemie S to założenie jego poprawności: wszystkie zdania dowodliwe w S są prawdziwe w S.

Konsekwencjami tego założenia są:

- W_1 Jeśli $\spadesuit X$ jest dowodliwe w S, to X jest dowodliwe w S.
- W_2 Jeśli $\heartsuit X$ jest dowodliwe w S, to X nie jest dowodliwe w S.
- W_3 Jeśli $\clubsuit X$ jest dowodliwe w S, to XX jest dowodliwe w S.
- W_4 Jeśli $\diamondsuit X$ jest dowodliwe w S, to XX nie jest dowodliwe w S.

Twierdzenie Gödla dla S

Istnieje wyrażenie prawdziwe w S, które nie jest dowodliwe w S.

Dowód. Takim wyrażeniem jest $\diamondsuit\diamondsuit$.
Stwierdza ono, że podwojenie wyrażenia $\diamondsuit$ nie jest dowodliwe.
Podwojeniem $\diamondsuit$ jest $\diamondsuit\diamondsuit$.
Zatem $\diamondsuit\diamondsuit$ jest prawdziwe w S wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest dowodliwe w S.
Oznacza to, że $\diamondsuit\diamondsuit$ jest:

- prawdziwe w S i niedowodliwe w S; albo
- fałszywe w S i dowodliwe w S.

Drugi człon tej alternatywy jest wykluczony ze względu na poprawność S: tylko zdania prawdziwe są dowodliwe.
Zatem zachodzi pierwszy człon tej alternatywy.

Uwagi o interpretacji zamierzonej

Uwaga. Jest chyba dla wszystkich oczywiste, że nasza zamierzona interpretacja minijęzyka Smullyana jest jedną z wielu możliwych interpretacji.

To, co jest istotne, to:

- W_0 możliwość interpretowania ciągów symboli;
- warunki W_1—W_4.

Można więc myśleć o innych jeszcze interpretacjach, spełniających te warunki. Dla przykładu, symbol $\spadesuit$ możemy interpretować jako:

- drukowalny (przez jakąś maszynę);
- poznawalny (przez jakiś podmiot);
- akceptowalny (np. przez Watykan).

Anything goes, jeśli tylko spełnione są warunki W_0—W_4.

Operacja sprzężenia

- Sprzężeniem $\spadesuit X$ jest $\heartsuit X$.
- Sprzężeniem $\heartsuit X$ jest $\spadesuit X$.
- Sprzężeniem $\clubsuit X$ jest $\diamondsuit X$.
- Sprzężeniem $\diamondsuit X$ jest $\clubsuit X$.

Sprzężenie X oznaczamy przez $\overline{X}$. Dla dowolnej pary wyrażeń sprzężonych, jedno z nich jest prawdziwe w S, a drugie jest fałszywe w S.
Wyrażenie nazywamy obalalnym w S, gdy jego sprzężenie jest dowodliwe w S. Zatem:

- $\heartsuit X$ obalane w S wtedy i tylko wtedy, gdy $\spadesuit X$ dowodliwe w S.
- $\spadesuit X$ obalane w S wtedy i tylko wtedy, gdy $\heartsuit X$ dowodliwe w S.
- $\clubsuit X$ obalane w S wtedy i tylko wtedy, gdy $\diamondsuit X$ dowodliwe w S.
- $\diamondsuit X$ obalane w S wtedy i tylko wtedy, gdy $\clubsuit X$ dowodliwe w S.

Nierozstrzygalność S

Wyrażenie, które nie jest ani dowodliwe w S, ani obalalne w S nazwiemy nierozstrzygalnym w S.

Pokazaliśmy, że $\diamondsuit\diamondsuit$ jest prawdziwe i niedowodliwe w S.

Z prawdziwości $\diamondsuit\diamondsuit$ wynika, że wyrażenie z nim sprzężone, czyli $\clubsuit\diamondsuit$ jest fałszywe w S.

Stąd, na mocy poprawności S, wyrażenie $\clubsuit\diamondsuit$ jest także niedowodliwe w S.

Stąd i z definicji $\clubsuit$, mamy, iż $\diamondsuit\diamondsuit$ jest niedowodliwe w S.

Oznacza to, iż wyrażenie $\diamondsuit\diamondsuit$ jest nierozstrzygalne w S.

Nierozstrzygalność S

Uwaga. Można przeprowadzić powyższą argumentację wcale nie odwołując się do pojęcia prawdy.

Istotnie, nierozstrzygalność wyrażenia $\diamondsuit\diamondsuit$ udowodnić można bezpośrednio z warunków W_1—W_4.

(1) Przypuśćmy, że $\diamondsuit\diamondsuit$ jest dowodliwe.

Podstawiając za X w W_4 wyrażenie $\diamondsuit$ otrzymujemy, że podwojenie $\diamondsuit$ jest niedowodliwe, co znaczy, że $\diamondsuit\diamondsuit$ jest niedowodliwe. Sprzeczność.

Zatem $\diamondsuit\diamondsuit$ nie jest dowodliwe.

(2) Gdyby dowodliwe było sprzężenie wyrażenia $\diamondsuit\diamondsuit$, czyli wyrażenie $\clubsuit\diamondsuit$, to na mocy warunku W_3 (podstawiamy $\diamondsuit$ za X) wyrażenie $\diamondsuit\diamondsuit$ byłoby dowodliwe.

Pokazaliśmy już jednak, że $\diamondsuit\diamondsuit$ nie jest dowodliwe.

Wynika stąd, że $\clubsuit\diamondsuit$ również nie jest dowodliwe.

Ostatecznie, wyrażenie $\diamondsuit\diamondsuit$ nie jest rozstrzygalne w S.

Niektóre inne ciekawe wyrażenia S

- $\heartsuit\diamondsuit$ stwierdza o sobie, że jest obalalne.
- $\diamondsuit\clubsuit$ stwierdza o sobie, że nie jest obalalne.
- $\clubsuit\clubsuit$ stwierdza o sobie, że jest dowodliwe.

- Dla dowolnego wyrażenia E istnieje wyrażenie X, które stwierdza, że EX jest dowodliwe (tj. X jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy EX jest dowodliwe). Dowód. $X = \heartsuit E \heartsuit$.
- Dla dowolnego wyrażenia E istnieje wyrażenie X, które stwierdza, że EX nie jest dowodliwe. Dowód. $X = \diamondsuit E \diamondsuit$.
- Dla dowolnego wyrażenia E istnieje wyrażenie X, które stwierdza, że $E\overline{X}$ jest dowodliwe. Ćwiczenie.
  Dla dowolnego wyrażenia E istnieje wyrażenie X, które stwierdza, że $E\overline{X}$ nie jest dowodliwe. Ćwiczenie.

Niektóre inne ciekawe wyrażenia S

- Istnieją wyrażenia X i Y takie, że:
  - X stwierdza, że Y jest dowodliwe.
  - Y stwierdza, że X nie jest dowodliwe.

  Co najmniej jedno z wyrażeń X, Y musi być prawdziwe, ale nie ma metody ustalenia, które.
- Istnieją wyrażenia X i Y takie, że:
  - X stwierdza, że Y jest obalalne.
  - Y stwierdza, że X nie jest obalalne.

  Co najmniej jedno z wyrażeń X, Y musi być fałszywe, ale nieobalalne.
- Istnieją wyrażenia X i Y takie, że:
  - X stwierdza, że Y jest dowodliwe.
  - Y stwierdza, że X jest obalalne. Jedno z nich jest prawdziwe, ale niedowodliwe, a drugie fałszywe, ale nieobalalne.

Niektóre inne ciekawe wyrażenia S

- Istnieją wyrażenia X i Y takie, że:
  - X stwierdza, że Y nie jest dowodliwe.
  - Y stwierdza, że X nie jest obalalne.

- Istnieją wyrażenia X, Y i Z takie, że:
  - X stwierdza, że Y jest obalalne.
  - Y stwierdza, że Z jest nieobalalne.
  - Z stwierdza, że X jest dowodliwe.

  Nadto, zachodzi jedna z trzech możliwości:
  - X jest prawdziwe, ale nie jest dowodliwe.
  - Y jest fałszywe, ale nie jest obalalne.
  - Z jest fałszywe, ale nie jest obalalne.

Systemy regularne

Powiemy, że system S, spełniający warunki W_1—W_4 jest regularny, jeśli spełnione są także warunki:

- Jeśli X jest dowodliwe w S, to $\spadesuit X$ jest dowodliwe w S.
- Jeśli XX jest dowodliwe w S, to $\clubsuit X$ jest dowodliwe w S.

Z tej definicji oraz z warunków W_1 i W_3 wynika, że jeśli S jest systemem regularnym, to:

- $\spadesuit X$ jest dowodliwe wtedy i tylko wtedy, gdy X jest dowodliwe.
- $\clubsuit X$ jest dowodliwe wtedy i tylko wtedy, gdy XX jest dowodliwe.

Wyrażenia pozytywne to wyrażenia postaci $\spadesuit X$ lub $\clubsuit X$.
Wyrażenia negatywne to wyrażenia postaci $\heartsuit X$ lub $\diamondsuit X$.

Systemy regularne

- System S jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie prawdziwe wyrażenia pozytywne S są dowodliwe w S.
- Jeśli system S jest regularny, to każde fałszywe wyrażenie negatywne jest obalalne w S.
- Jeśli S jest regularny, to dla dowolnego wyrażenia X oraz dowolnego ciągu E symboli $\spadesuit$: wyrażenie EX jest dowodliwe wtedy i tylko wtedy, gdy X jest dowodliwe.
- W systemie regularnym $\clubsuit X$ jest dowodliwe wtedy i tylko wtedy, gdy $\spadesuit XX$ jest dowodliwe.
- Jeśli E jest dowolnym ciągiem symboli $\spadesuit$, to wyrażenie $\diamondsuit E \diamondsuit$ jest prawdziwe i niedowodliwe we wszystkich systemach regularnych. Zatem istnieje nieskończenie wiele wyrażeń prawdziwych i niedowodliwych we wszystkich systemach regularnych.