Alicja, Labirynty i Magiczny Ogród

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Odczyt sponsorowany przez Katedrę Logiki
Uniwersytetu Wrocławskiego

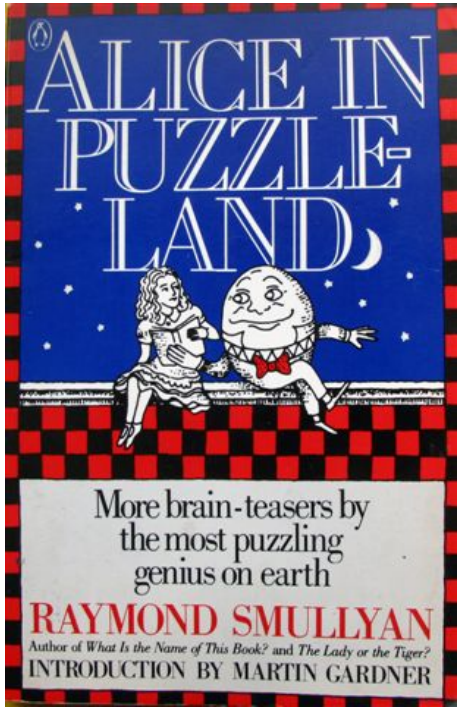
Szklarska Poręba 2010

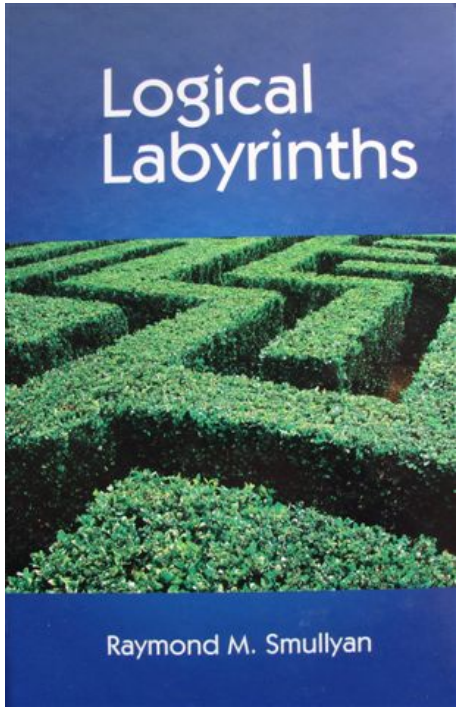
Plan na dziś

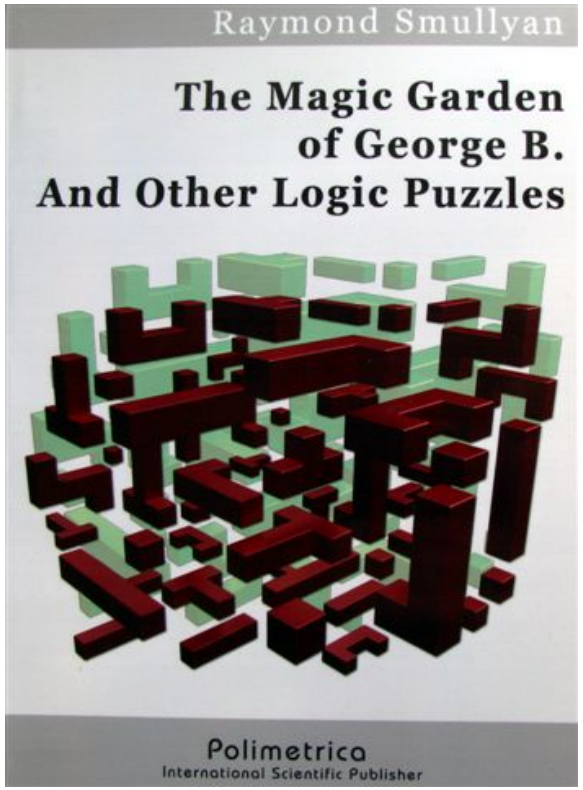
Opowiemy o wybranych zagadkach logicznych z dokonanych niedawno tłumaczeń książek Raymonda Smullyana:

- ***Alicja w Krainie Zagadek. Opowieść w Stylu Lewisa Carrolla dla Dzieci Poniżej Osiemdziesiątki***. Podstawa przekładu: *Alice in Puzzle-Land. A Carrollian Tale for Children Under Eighty*. Penguin Books, 1982. ISBN 0 14 00.7056 7. Pierwsze wydanie: Wiliam Morrow and Company, Inc., New York, 1982.
- ***Labirynty Logiczne***. Podstawa przekładu: *Logical Labyrinths*. A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 2009. ISBN 978-1-56881-443-8.
- ***Magiczny Ogród George'a B. i Inne Zagadki Logiczne***. Podstawa przekładu: *The Magic Garden of George B. And Other Logic Puzzles*. Polimetrica, International Scientific Publisher, Monza Milano, 2007. ISBN 978-88-7699-063-3.

Oryginały; odpowiednio: 182, 327, 176 stron







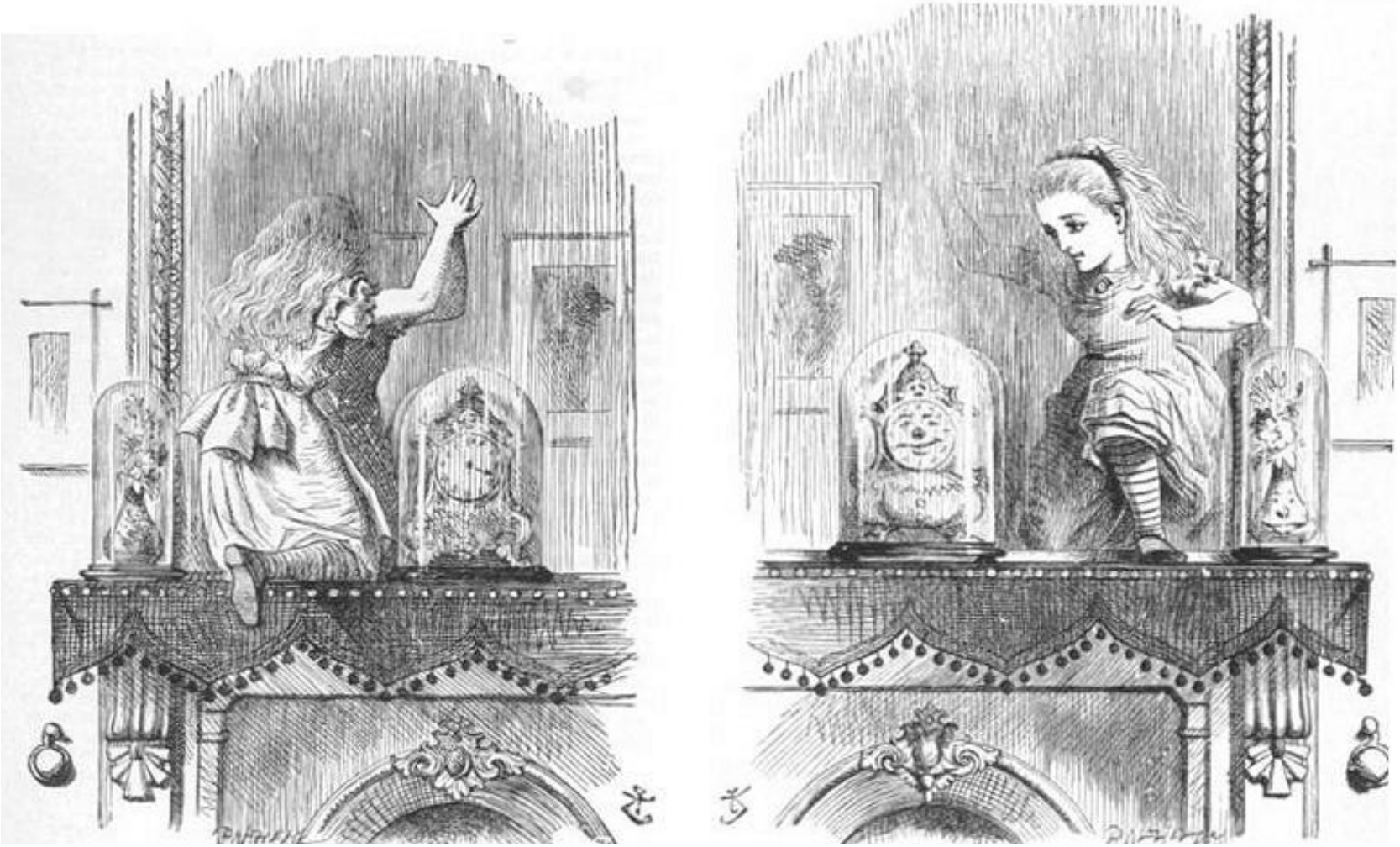
Pożytki z zagadek Smullyana

Oto kilka walorów dydaktycznych zagadek Smullyana:

- Żywe narracje logiczne. Humor. Zaopatrzenie wszystkich zagadek we wskazówki lub rozwiązania.
- Wyraźne odróżnienie pojęć semantycznych (sąd, prawda, fałsz) od pragmatycznych (przekonanie, szczerość, kłamstwo, stwierdzanie).
- Ciekawe interpretacje twierdzeń metalogicznych (maszyny logiczne Smullyana, dowodliwość jako żywienie przekonań).

- Studenci Matematyki: Logika = Balon Algebry przeciążony Balastem Filozoficznym.
- Studenci Humanistyki: Logika = Matrix (dla Maszyn, nie dla Ludzi).

Lustrzana Logika



Lustrzana Logika

Humpty Dumpty przedstawia zasady Lustrzanej Logiki:

- *Warunek 1.* Lustrzany Logik jest całkowicie szczery. Będzie utrzymywał te i tylko te stwierdzenia, w które rzeczywiście wierzy.
- *Warunek 2.* Jeśli Lustrzany Logik kiedykolwiek utrzymuje jakiś stwierdzenie, to utrzymuje także, że nie wierzy w to stwierdzenie.
- *Warunek 3.* Dla dowolnego stwierdzenia prawdziwego, Lustrzany Logik zawsze utrzymuje, że wierzy w to stwierdzenie.
- *Warunek 4.* Jeśli Lustrzany Logik w coś wierzy, to nie może wierzyć także w tego zaprzeczenie.
- *Warunek 5.* Dla dowolnego stwierdzenia, Lustrzany Logik albo wierzy w to stwierdzenie, albo wierzy w jego zaprzeczenie.

Lustrzana Logika

- *Twierdzenie 1.* Kiedykolwiek Lustrzany Logik w coś wierzy, to wierzy, że w to nie wierzy.
- *Twierdzenie 2.* Dla dowolnego stwierdzenia prawdziwego, Lustrzany Logik wierzy, że wierzy w to stwierdzenie.

- Dowód 1. Weź dowolne stwierdzenie α, w które wierzy Lustrzany Logik. Ponieważ wierzy on w α, więc utrzymuje α (na mocy warunku 1), a stąd utrzymuje, że nie wierzy w α (na mocy warunku 2), a stąd wierzy, że nie wierzy w α (na mocy warunku 1).
- Dowód 2. Weź dowolne stwierdzenie prawdziwe α. Na mocy warunku 3, utrzymuje on, że wierzy w α. Ponieważ utrzymuje, że wierzy w α, a jest szczery (warunek 1), więc wierzy, że wierzy w α.

Lustrzana Logika

Pokażemy, że ponadto:

- *Twierdzenie 3.* Lustrzany Logik nie wierzy w żadne stwierdzenie prawdziwe.
- *Twierdzenie 4.* Lustrzany Logik wierzy we wszystkie stwierdzenia fałszywe.
- *Twierdzenie 5.* Ktokolwiek, kto wierzy we wszystkie stwierdzenia fałszywe i w żadne prawdziwe i kto jest nadto szczery w wyrażaniu swoich przekonań — każda taka osoba musi spełniać pięć powyższych warunków, które charakteryzują Lustrzanych Logików.

Lustrzana Logika jest zatem oparta na pewnej konsekwencji odrzucającej.

Lustrzana Logika

3. Weź dowolne stwierdzenie α, w które wierzy Lustrzany Logik. Na mocy twierdzenia 1, wierzy on, że nie wierzy w α. Wtedy nie może też wierzyć, że *wierzy* w α (ponieważ, na mocy warunku 4, nigdy nie wierzy w coś i zaprzeczenie tego czegoś). Ponieważ nie wierzy, że wierzy w α, więc α nie może być prawdziwe, bo *gdyby było* prawdziwe, to, na mocy twierdzenia 2, *wierzyłby*, że wierzy w α. Ale on *nie wierzy*, że wierzy w α — a zatem α nie może być prawdziwe. Tak więc, Lustrzany Logik nigdy nie wierzy w jakiekolwiek stwierdzenie prawdziwe: wszystkie rzeczy, w które wierzy Lustrzany Logik są fałszywe.

4. Weź dowolne stwierdzenie fałszywe α. Na mocy warunku 5, albo wierzy on w α, albo wierzy w $\neg\alpha$. Nie może wierzyć w $\neg\alpha$, ponieważ $\neg\alpha$ jest prawdziwe! A zatem wierzy w fałszywe stwierdzenie α.

Lustrzana Logika

5. Przypuśćmy, że osoba jest całkowicie szczera i nadto wierzy we wszystkie stwierdzenia fałszywe i tylko w takie stwierdzenia. Ponieważ jest szczera, więc spełnia oczywiście warunek 1.

Jeśli chodzi o warunek 2, to przypuśćmy, że utrzymuje ona stwierdzenie α. Wtedy rzeczywiście wierzy w α (ponieważ jest szczera). Jest zatem fałszem, że nie wierzy ona w α. Ale wierzy ona we *wszystko*, co jest fałszem — nawet w rzeczy fałszywe o jej własnych przekonaniach! Tak więc, ponieważ jest fałszem, że nie wierzy w α, i ponieważ wierzy we wszystko, co jest fałszem, więc musi wierzyć w fałszywy stan rzeczy, że nie wierzy ona w α — inaczej mówiąc, wierzy ona, że nie wierzy w α. A ponieważ *wierzy*, że nie wierzy w α, więc *utrzymuje*, że nie wierzy w α (ponieważ jest szczera). A zatem spełnia warunek 2.

Lustrzana Logika

Jeśli chodzi o warunek 3, to weźmy dowolne stwierdzenie prawdziwe α. Ponieważ α jest prawdziwe, więc osoba ta nie może wierzyć w α. Ponieważ *nie wierzy* w α, więc musi wierzyć, że *wierzy* w α (ponieważ wszystkie jej przekonania są nietrafne!). Wtedy, ponieważ wierzy, że wierzy w α, to musi utrzymywać, że wierzy w α (znowu, ponieważ jest szczera). Dowodzi to, że spełnia ona warunek 3.

Weźmy dowolne stwierdzenie i jego zaprzeczenie. Jedno z nich musi być prawdziwe, a pozostałe musi być fałszywe. A zatem osoba ta wierzy w to fałszywe i nie wierzy w to prawdziwe. Nie wierzy więc w oba z nich, a stąd spełnia warunek 4. Wierzy jednak w co najmniej jedno z nich, a więc spełnia warunek 5.

Prawda, wiara i sen

Teoria Czerwonego Króla

Czerwony Król wyznaje teorię, iż każdy na świecie jest jednego z dwóch typów: typu A lub typu B. Ci typu A są całkowicie trafni w swoich przekonaniach, gdy są obudzeni, lecz całkowicie nietrafni, gdy śpią. Wszystko, w co wierzą, gdy są obudzeni, jest prawdziwe, ale wszystko, w co wierzą, gdy śpią, jest fałszywe. Z ludźmi typu B jest na odwrót: wszystko, w co wierzą, gdy śpią, jest prawdziwe, a wszystko, w co wierzą, gdy są obudzeni, jest fałszywe.

- *Twierdzenie I.* Jeśli, w danym momencie, osoba wierzy, że jest obudzona, to musi być typu A.
- *Twierdzenie II.* Jeśli, w danym momencie, osoba wierzy, że jest typu A, to musi być wtedy obudzona.

Teoria Czerwonego Króla

Rozważmy najpierw twierdzenie I. Przypuśćmy, że osoba wierzy, że jest obudzona. Albo rzeczywiście jest obudzona, albo nie jest. Przypuśćmy, że jest obudzona. Wtedy jej przekonanie jest trafne, ale każdy, kto ma trafne przekonania, gdy jest obudzony, musi być typu A. Przypuśćmy, z drugiej strony, że osoba ta śpi. Wtedy jej przekonanie jest nietrafne, ale każdy, kto ma nietrafne przekonanie podczas snu, musi być typu A. A zatem, czy jest ona obudzona czy śpi, musi być typu A.

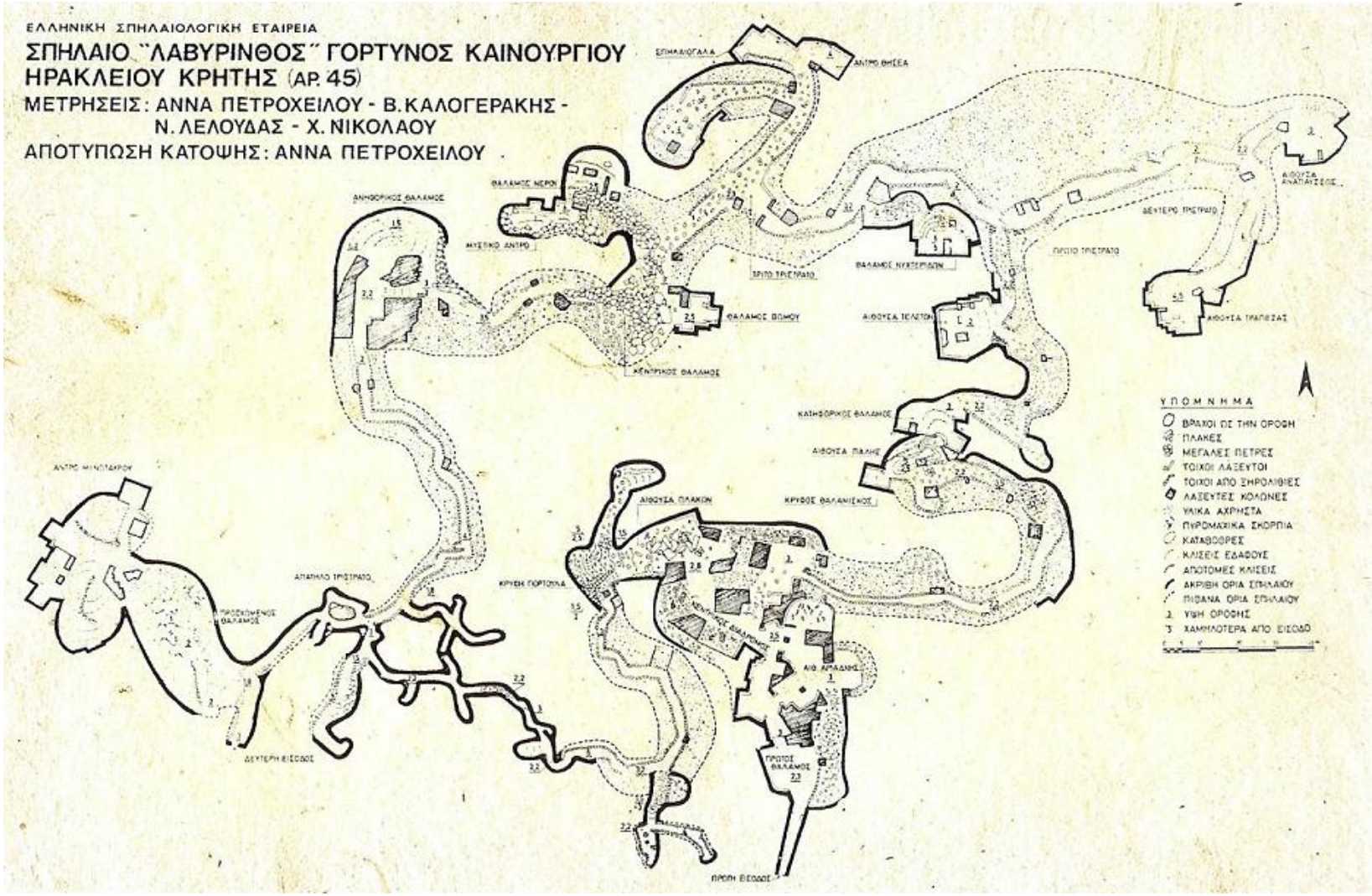
Jeśli chodzi o twierdzenie II, to przypuśćmy, że osoba wierzy, że jest typu A. Jeśli rzeczywiście jest typu A, to jej przekonanie jest trafne, ale osoba typu A może mieć trafne przekonania tylko wtedy, gdy jest obudzona. Z drugiej strony, jeśli jest ona typu B, to jej przekonanie jest nietrafne, ale osoba typu B może mieć nietrafne przekonanie tylko wtedy, gdy jest obudzona. Tak więc, w każdym przypadku jest obudzona, co dowodzi twierdzenia II.

Uwierz, a będziesz obudzony

Udowodnię trzy rzeczy — powiedział Król. — Udowodnię, że: (po pierwsze) jestem typu A; (po drugie) jestem obudzony; (po trzecie) moja teoria jest poprawna. Musisz uznać przesłankę, iż ja ***wierzę*** w te trzy rzeczy. Te trzy szczególne rzeczy mają tę godną uwagi własność, że uwierzenie we wszystkie trzy ***czyni*** je prawdziwymi!

- Ponieważ wierzę, że jestem obudzony, muszę być typu A.
- A na mocy twierdzenia II, ponieważ wierzę, że jestem typu A, więc muszę być obudzony.
- Ponieważ jestem zarazem obudzony i typu A, więc moje obecne przekonania muszą być wszystkie prawdziwe. Ponieważ moje obecne przekonania są prawdziwe i wierzę w teorię, którą zaproponowałem, teoria ***jest*** prawdziwa!

Labirynty Logiczne



Zasada Nelsona Goodmana

Pierwsza część *Labiryntów Logicznych* zawiera zagadki o rycerzach (mówiących zawsze prawdę) oraz łotrach (mówiących zawsze fałsz). Smullyan podaje też ważną zasadę (Nelsona Goodmana), pozwalającą w sposób jednolity rozwiązywać tego typu zagadki.

Przypuśćmy, że odwiedzasz Wyspę Rycerzy i Łotrów, gdyż usłyszałeś plotkę, że jest tam zakopane złoto. Spotykasz tubylca i chcesz się od niego dowiedzieć, czy istotnie jest tam złoto, ale nie wiesz, czy jest on rycerzem czy łotrem. Możesz mu zadać tylko jedno pytanie, na które odpowiedź może brzmieć *tak* lub *nie*. Jakie postawisz pytanie?

Zasada Nelsona Goodmana

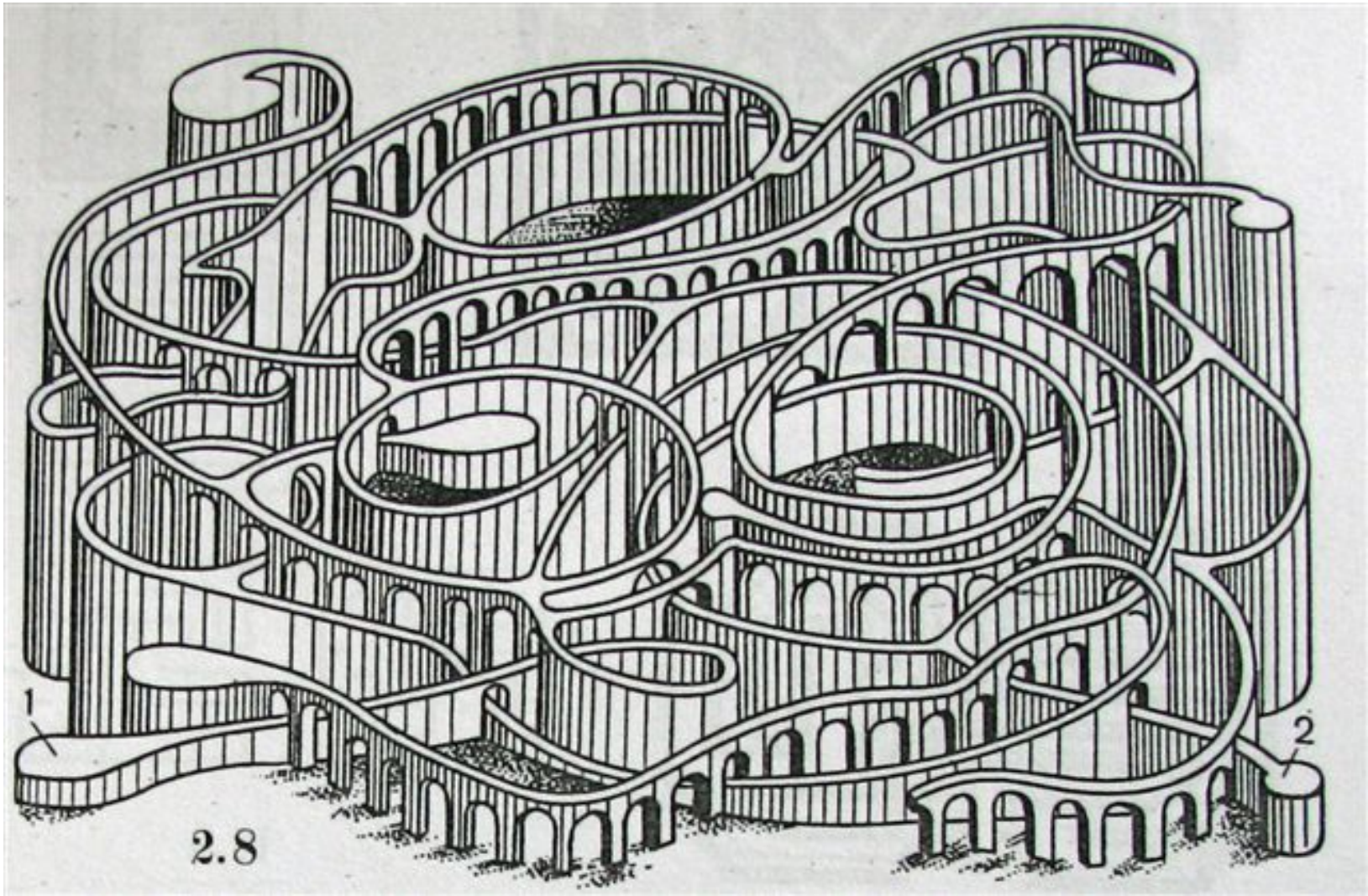
Odpowiedź. Pytaniem, które się nadaje, jest: „Czy jesteś tego typu, który mógłby twierdzić, że na wyspie jest złoto?" *Nie* pytasz go, czy złoto *jest* na wyspie, ale czy jest on typu, który mógłby *twierdzić* (uwaga!), że ono tam jest. Jeśli odpowie on *tak*, to na wyspie musi być złoto, niezależnie od tego, czy jest on rycerzem czy łotrem.

Prostszym dobrym pytaniem jest: „Czy jesteś rycerzem dokładnie wtedy, gdy na wyspie jest złoto?"

Następujące zdania są bowiem równoważne:

1. On może twierdzić, że na wyspie jest złoto.
2. Jest on rycerzem wtedy i tylko wtedy, gdy na wyspie jest złoto.
3. Albo jest on rycerzem i na wyspie jest złoto, albo jest on łotrem i na wyspie nie ma złota.

Najbardziej zakręcona wyspa



Najbardziej zakręcona wyspa

1. Każdy mieszkaniec był zaklasyfikowany jako rycerz lub łotr.
2. Męscy rycerze byli prawdomówni, a męscy łotrzy byli kłamcami, ale kobiecy rycerze kłamali, a kobiecy łotrzy byli prawdomówni.
3. Połowa mieszkańców była obłąkana i miała tylko fałszywe przekonania, podczas gdy druga połowa była zdrowa i miała tylko trafne przekonania.
4. Gdy zadałeś tubylcowi pytanie rozstrzygnięcia, to zamiast odpowiedzieć *tak* lub *nie*, on lub ona pokazywał albo czerwoną, albo czarną kartę, z których jedna oznaczała *tak*, a pozostała *nie*.
5. Jednakże różni mieszkańcy mogli rozumieć różne rzeczy poprzez te dwa kolory: niektórzy z nich pokazywali czerwoną kartę w znaczeniu *tak* i czarną kartę w znaczeniu *nie*, podczas gdy niektórzy inni czynili odwrotnie!

Zasada Nelsona Goodmana

Czy można otrzymać jakąkolwiek informację, jaką się chce, poprzez zadanie tylko jednego pytania rozstrzygnięcia?

Dla przykładu, przypuśćmy, że odwiedzasz wyspę i chcesz wiedzieć, czy jest na niej złoto. Spotykasz zamaskowanego tubylca i nie znasz płci tego tubylca, nie wiesz czy jest on lub ona rycerzem czy łotrem ani czy jest obłąkany czy zdrowy, ani co kolory czerwony i czarny oznaczają dla niego lub niej.

Czy jest pojedyncze pytanie rozstrzygnięcia, które mógłbyś zadać, aby ustalić, czy na wyspie jest złoto, czy też niemożliwe jest takie pytanie?

Zasada Nelsona Goodmana

Powiemy, że mieszkaniec jest *typu 1*, gdy pokazuje on lub ona czerwoną kartę w odpowiedzi na pytania, dla których poprawną odpowiedzią jest *tak* (a więc pokazuje czarną w odpowiedzi na pytania, dla których poprawną odpowiedzią jest *nie*).

Mieszkańców, którzy nie są typu 1, nazwiemy mieszkańcami *typu 2*; pokazują oni zatem czarną kartę w odpowiedzi na pytania, na które poprawną odpowiedzią jest *tak*, a czerwoną w w odpowiedzi na pytania, na które poprawną odpowiedzią jest *nie*.

Odpowiedź. Aby ustalić, czy na wyspie jest złoto, zapytamy teraz: „Czy jesteś typu 1 wtedy i tylko wtedy, gdy na wyspie jest złoto?" Jeśli tubylec pokazuje czerwoną kartę, to jest złoto, a jeśli pokazuje czarną, to złota nie ma.

Zasada Nelsona Goodmana

Zasada Nelsona Goodmana

Ogólny schemat rozwiązania (niezależny od formy udzielania odpowiedzi: kartami, głosem, gestami, mimiką, itp.).

Mieszkańcy odpowiadają na pytania rozstrzygnięcia na jeden z dwóch sposobów, które będziemy nazywać *odpowiedzią 1* i *odpowiedzią 2*. Za odpowiedź 1 bierzemy akt odpowiedzenia *tak*, a za odpowiedź 2 akt odpowiedzenia *nie*.
Definiujemy tubylca jako będącego *typu 1*, gdy udziela odpowiedzi 1 na pytania rozstrzygnięcia, na które poprawną odpowiedzią jest *tak* (a więc odpowiedzi 2 na pytania rozstrzygnięcia, na które poprawną odpowiedzią jest *nie*). Pozostały typ nazwiemy *typem 2* — to typ, który udziela odpowiedzi 2 na pytania, na które poprawną odpowiedzią jest *tak*, a odpowiedzi 1 na pytania, na które poprawną odpowiedzią jest *nie*.

Zasada Nelsona Goodmana

Podamy teraz uogólnioną wersję zasady Nelsona Goodmana. Przypuśćmy, że chcesz ustalić, powiedzmy, czy na wyspie jest złoto. Pytasz: „Czy jesteś typu 1 wtedy i tylko wtedy, gdy na wyspie jest złoto?" Tak więc, pytasz, czy zachodzi jeden z członów alternatywy:

1. Tubylec jest typu 1 i na wyspie jest złoto.
2. Tubylec jest typu 2 i na wyspie nie ma złota.

Dygresja na marginesie. Aby zmusić tubylca do udzielenia odpowiedzi 1, pytasz go: „Czy jesteś typu 1?" Niezależnie od swojego typu, udzieli on odpowiedzi 1 (co słuchacze zechcą sprawdzić w Rozumie). To *dodatkowe* pytanie pozwala ustalić *znaczenia* udzielanych przez tubylców odpowiedzi.

Zasada Nelsona Goodmana

Przypuśćmy, że na pytanie „Czy jesteś typu 1 wtedy i tylko wtedy, gdy na wyspie jest złoto?" tubylec udzieli odpowiedzi 1.

- *Przypadek 1: tubylec jest typu 1.* Wtedy, ponieważ udzielił odpowiedzi 1, poprawną odpowiedzią na pytanie jest *tak*. Tak więc, jeden z członów alternatywy (1) $\vee$ (2) *zachodzi*. Nie może to być (2), ponieważ tubylec nie jest typu 2, a więc musi to być (1). A zatem w tym przypadku na wyspie jest złoto.
- *Przypadek 2: tubylec jest typu 2.* Wtedy, ponieważ udzielił odpowiedzi 1 i jest typu 2, poprawną odpowiedzią na pytanie jest *nie*. Tak więc, żaden z członów alternatywy (1) $\vee$ (2) nie zachodzi — w szczególności, (2) nie zachodzi. A stąd, na wyspie musi być złoto (bo gdyby nie było, to *zachodziłoby* (2), a tak nie jest).

Dowodzi to, że jeśli tubylec udzieli odpowiedzi 1, to na wyspie jest złoto.

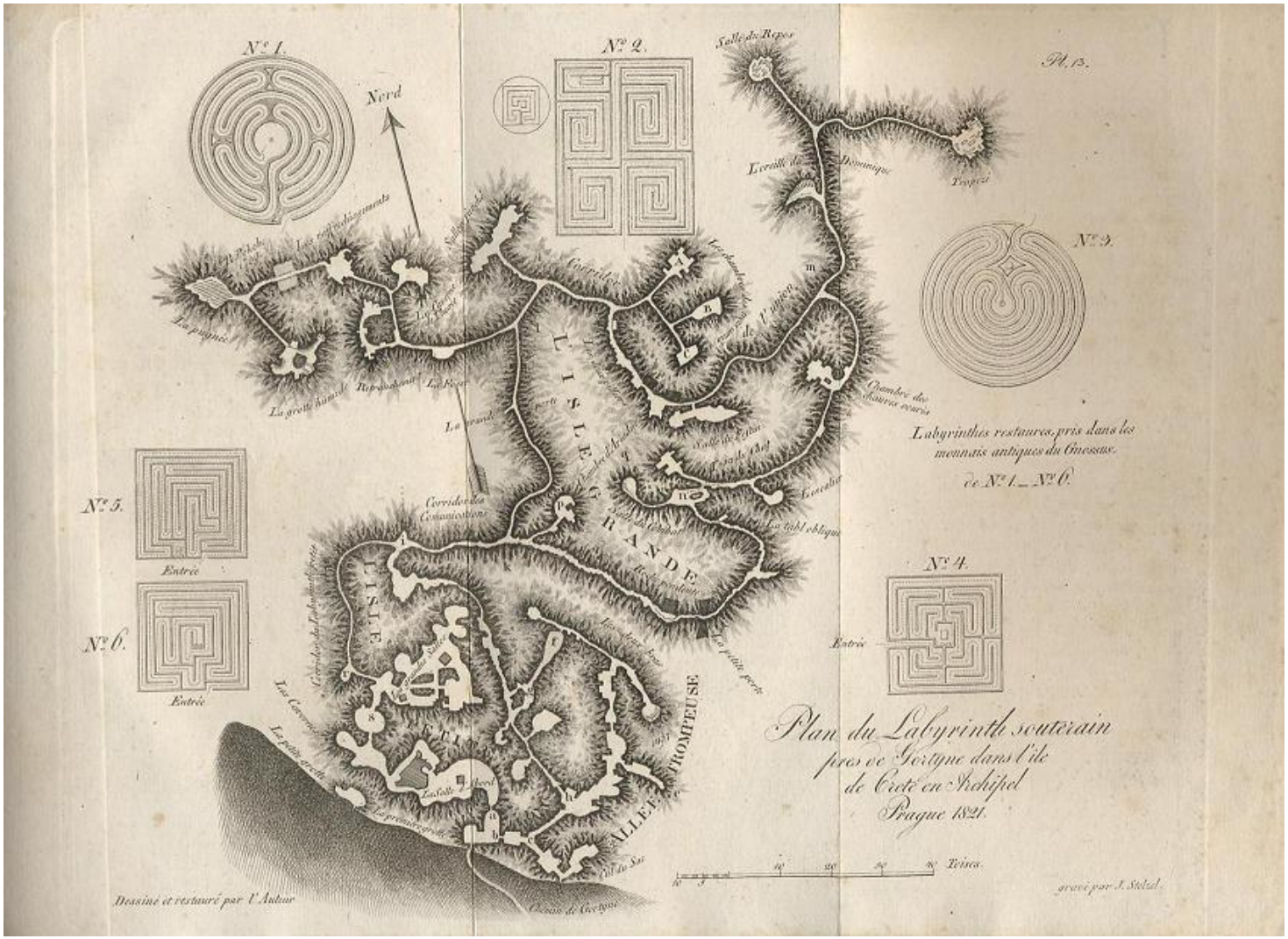
Zasada Nelsona Goodmana

A co będzie, gdy udzieli on odpowiedzi 2? Jeśli jest on typu 2, to poprawną odpowiedzią na pytanie jest *tak*; a więc jeden z członów alternatywy (1) $\vee$ (2) *zachodzi*, i musi to być (2); a zatem nie ma złota; podczas gdy jeśli tubylec jest typu 1, to poprawną odpowiedzią na pytanie jest *nie*; a stąd, żaden z członów alternatywy nie zachodzi; stąd nie zachodzi (1); a zatem nie ma złota na wyspie. Dowodzi to, że odpowiedź 2 implikuje, że na wyspie nie ma złota.

Nelson Goodman (1906–1998):

- Problemy indukcji: Wszystkie szmaragdy są ziebieskie (*grue*).
- Nominalizm i mereologia. Rachunek indywiduów (Goodman–Leonard).
- Project Zero.
- Estetyka.

Wykład logiki pierwszego rzędu



Wykład logiki pierwszego rzędu

„Poważna" część książki zawiera wykład logiki pierwszego rzędu:

- Wstęp: o nieskończoności, indukcji matematycznej, Lemacie Königa.
- Metoda tablic analitycznych.
- Zwartość, pełność (względem TA), twierdzenie Löwenheima-Skolema, twierdzenie o regularności.
- Metoda aksjomatyczna.
- Twierdzenia: Craiga, Robinsona, Betha (dowody metodą TA).
- Analytic Consistency Properties & The Model Existence Theorem.
- Uwagi o niezupełności.

Szukamy Magicznego Ogrodu

Motto Kartezjańskie

Francouzský matematik a filozof René Descartes ve své době prohlásil:

Každý druh problému převeď na matematický problém, každý matematický problém převeď na algebraický problém a každý algebraický problém převeď na řešení rovnice.

Bedřich Pondělíček: *Algebraické struktury s binárními operacemi.* Matematický seminář SNTL, Praha, 1977.

Zagadki o kwiatach

Wielki Problem. Mały chłopiec, George B., miał ogród magicznych kwiatów. Każdy kwiat mógł zmieniać kolor z dnia na dzień, ale dopuszczalne były tylko dwa kolory — czerwony i niebieski (jak na papierku lakmusowym). Każdego dnia dany kwiat jest przez cały dzień czerwony, albo przez cały dzień niebieski. Zachodzi ponadto następujący warunek.

Warunek B. Dla dowolnych kwiatów A oraz B, czy to tego samego czy też różnych kolorów, istnieje kwiat C, który jest czerwony w tych i tylko w tych dniach, w których oba A i B są niebieskie. (Tak więc, dowolnego dnia, w którym co najmniej jeden z kwiatów A lub B jest czerwony, C jest niebieski, ale w dowolny dzień, w którym oba A i B są niebieskie, C jest czerwony.)

Zagadki o kwiatach

Mówimy, że dwa kwiaty są *podobne*, lub że są *tego samego typu*, jeśli są one tego samego koloru przez wszystkie dni. [Czyli nie różnią się kolorem żadnego dnia.] Pewnego dnia George postanowił oczyścić swój ogród i usunął wiele kwiatów. Po tym oczyszczeniu w dalszym ciągu zachodził warunek B, ale dodatkowo żadne dwa różne kwiaty nie były tego samego typu. Tak więc, dla dowolnych dwóch *różnych* kwiatów był co najmniej jeden dzień, w którym jeden z nich był czerwony, a drugi był niebieski.

A teraz „wielki" problem! Po oczyszczeniu ogrodu liczba kwiatów w nim mieściła się między dwieście a pięćset. Ile było tam kwiatów?

Zagadki o kwiatach

Powyższy warunek **B** wprowadza operację, która ma własności ***kreski Sheffera***.

- Następnie wprowadza się pozostałe operacje Boolowskie, kwiaty *bazowe* (odpowiadające atomom algebry Boole'a) i dalsze konstrukcje algebraiczne.
- Rozwiązanie powyższej zagadki brzmi: 256 (czyli 2^8).
- W książce rozważa się jedynie skończone algebry Boole'a i podaje się dowód, że skończona algebra Boole'a o n atomach ma 2^n elementów.

A teraz poważnie

Algebry Boole'a

Na treść matematyczną zagadek składają się:

- Omówienie kilku ważnych pojęć, dotyczących algebr Boole'a: operacje Boolowskie, porządek, atomy, izomorfizm, itd.
- Przedstawienie kilku ważnych przykładów algebr Boole'a (logika zdaniowa, rachunek zbiorów). Wzmianka o pierścieniach Boolowskich.
- Dowody adekwatności kilku systemów postulatów dla algebr Boole'a.

Opuszczamy Magiczny Ogród

Koniec?

Dokonanie tych przekładów (łącznie z wcześniejszymi pracami niniejszego oraz innych tłumaczy) pozwala czytelnikowi polskiemu na zapoznanie się ze ***wszystkimi*** dotąd opublikowanymi książkami z zagadkami logicznymi autorstwa Raymonda Smullyana. ***Przekłady omawiane w odczycie czekają na zainteresowanie wydawców.***

Inne (oprócz czysto matematycznych) prace Raymonda Smullyana:

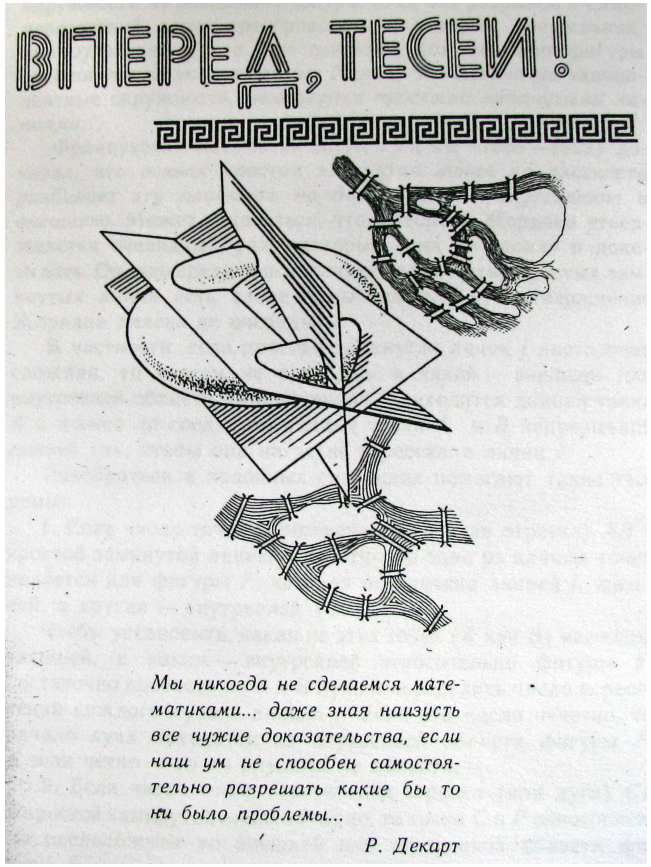
- *This Book Needs No Title. A Budget of Living Paradoxes.* 1980. (Przygotowywany przekład polski.)
- *5000 B.C. and Other Philosophical Fantasies. Puzzles and Paradoxes, Riddles and Reasonings.* 1983.
- *Some Interesting Memories. A Paradoxical Life.* 2002.
- *Who Knows? A Study of Religious Consciousness.* 2003.

Tłumaczenia Smullyana wydane przez *Książkę i Wiedzę*:

- *Jaki jest tytuł tej książki? Tajemnica Drakuli, zabawy i łamigłówki logiczne*. Tłumacz: Bohdan Chwedeńczuk.
- *Dama czy tygrys oraz inne zagadki logiczne*. Bohdan Chwedeńczuk.
- *Szatan, Cantor i nieskończoność oraz inne łamigłówki*. Anna & Krzysztof Wójtowicz.
- *Zagadki szachowe Sherlocka Holmesa*. Anna Wójtowicz.
- *Zagadki Szeherezady i inne zdumiewające łamigłówki, dawne i współczesne*. Paweł Kliber.
- *Przedrzeźniać Przedrzeźniacza. Oraz inne zagadki logiczne łącznie z zadziwiającą przygodą w krainie logiki kombinatorycznej*. Jerzy Pogonowski.
- *Na zawsze nierozstrzygnięte. Zagadkowy przewodnik po twierdzeniach Gödla*. Jerzy Pogonowski.

Żegnaj, Alicjo! Naprzód, Tezeuszu!

Alice Liddell



Kartezjusz