Rekurencyjna przeliczalność

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Funkcje rekurencyjne

Plan na dziś

Plan na dziś:

- zbiory i relacje rekurencyjne;
- zbiory rekurencyjnie przeliczalne;
- wybrane własności zbiorów i relacji rekurencyjnych i rekurencyjnie przeliczalnych.

Będziemy korzystać z definicji oraz przykładów zamieszczonych w:

- I.A. Ławrow, L.L. Maksimowa *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004. Z języka rosyjskiego przełożył Jerzy Pogonowski.

Zbiory i relacje rekurencyjne

W dalszym ciągu, używając terminu zbiór będziemy mieli na myśli tylko podzbiory zbioru $\mathcal{N}$ wszystkich liczb naturalnych, zaś *zbiorami* n-tek (*ciągów długości* n) będziemy nazywać podzbiory zbioru $\mathcal{N}^n$ ($n \geqslant 1$).

Niech P będzie dowolną n-argumentową relacją na zbiorze $\mathcal{N}$. Funkcję $\theta_P(x_1, \ldots, x_n)$ nazywamy *funkcją reprezentującą relację P* (lub *funkcją charakterystyczną relacji P*), jeśli funkcja ta spełnia warunek

$$\theta_P(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad P(x_1, \ldots, x_n) \text{ zachodzi,} \\ 1, & \text{gdy} \quad P(x_1, \ldots, x_n) \text{ nie zachodzi.} \end{cases}$$

Zbiory i relacje rekurencyjne

Relacja P jest *rekurencyjna* (*pierwotnie rekurencyjna*), jeśli jej funkcja charakterystyczna jest ogólnie rekurencyjna (pierwotnie rekurencyjna).

Zbiór n-tek M nazywamy *rekurencyjnym* (*pierwotnie rekurencyjnym*), jeśli relacja

$$P(x_1, \ldots, x_n) \text{ zachodzi} \Leftrightarrow \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in M$$

jest rekurencyjna (pierwotnie rekurencyjna).

Zbiory i relacje rekurencyjnie przeliczalne

Zbiór n-tek M nazywamy *rekurencyjnie przeliczalnym*, jeśli istnieje $(n+1)$-argumentowa relacja pierwotnie rekurencyjna

$$R_M(x_1, \ldots, x_n, y)$$

spełniająca dla każdych $x_1, \ldots, x_n$ warunek:

$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in M \Leftrightarrow \exists y R_M(x_1, \ldots, x_n, y).$$

Zbiory i relacje rekurencyjnie przeliczalne stanowią matematyczne odpowiedniki pojęć pozytywnie obliczalnych.

Zbiory i relacje rekurencyjnie przeliczalne

Mówimy, że relacja $R \subseteq \mathcal{N}^n$ jest pozytywnie obliczalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego układu liczb naturalnych $a_1, \ldots, a_n$, jeżeli zachodzi $R(a_1, \ldots, a_n)$, to metoda ta da w skończonej liczbie z góry określonych kroków odpowiedź na pytanie: „Czy zachodzi $R(a_1, \ldots, a_n)$?".
Jeżeli natomiast **nie** zachodzi $R(a_1, \ldots, a_n)$, to metoda ta może nie dać żadnej odpowiedzi na to pytanie.

Przykład. Klasyczny Rachunek Predykatów jest nierozstrzygalny. Nie istnieje efektywna metoda rozstrzygania, czy jakaś formuła języka tego rachunku jest jego tautologią. Klasyczny Rachunek Predykatów jest jednak półrozstrzygalny: własność bycia tautologią tego rachunku jest pozytywnie obliczalna. Metoda drzew semantycznych (tablic analitycznych) pozwala, gdy jakaś formuła jest tautologią tego rachunku, dowieść tego w sposób efektywny.

Zbiory i relacje rekurencyjnie przeliczalne

Dla dowolnego zbioru n-tek M zdefiniujemy *funkcję charakterystyczną* $\chi_M(x_1, \ldots, x_n)$ oraz *częściową funkcję charakterystyczną* $\chi^*_M(x_1, \ldots, x_n)$ w sposób następujący:

$$\chi_M(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in M, \\ 1, & \text{gdy} \quad \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \notin M; \end{cases}$$

$$\chi^*_M(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in M, \\ \text{nie określona}, & \text{gdy} \quad \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \notin M. \end{cases}$$

Jeżeli f jest n-argumentową funkcją częściową, to zbiór

$$\Gamma_f = \{\langle x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n) \rangle : \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in \delta_f\}$$

nazywamy *wykresem* funkcji f. Funkcję $f(x_1, \ldots, x_n)$ nazywamy *dookreśleniem* funkcji $g(x_1, \ldots, x_n)$, jeśli $\Gamma_g \subseteq \Gamma_f$ oraz $\delta_f = \mathcal{N}$.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

Następujące relacje są pierwotnie rekurencyjne:

- (a) $x = y$;
- (b) $x + y = z$;
- (c) $x \cdot y = z$;
- (d) x dzieli y;
- (e) x jest parzyste;
- (f) x oraz y są względnie pierwsze;
- (g) $\exists n(x = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$;
- (h) $\exists n(x = 1 + 2 + \ldots + n)$.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

Jeżeli relacje $P(x_1, \ldots, x_n)$ oraz $Q(x_1, \ldots, x_n)$ są rekurencyjne (pierwotnie rekurencyjne), to następujące relacje są również rekurencyjne (pierwotnie rekurencyjne):

- (a) $(P(x_1, \ldots, x_n) \wedge Q(x_1, \ldots, x_n))$;
- (b) $(P(x_1, \ldots, x_n) \vee Q(x_1, \ldots, x_n))$;
- (c) $\neg P(x_1, \ldots, x_n)$;
- (d) $(P(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow Q(x_1, \ldots, x_n))$;
- (e) $P(x_1, x_1, x_3, \ldots, x_n)$;
- (f) $P(f(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1})$, jeśli $f(x_1, \ldots, x_m)$ jest orf (prf).

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

- Jeżeli relacja $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ jest rekurencyjna (pierwotnie rekurencyjna), to relacje $\exists y(y \leqslant z \wedge R(x_1, \ldots, x_n, y))$ oraz $\forall y(y \leqslant z \rightarrow R(x_1, \ldots, x_n, y))$ również są rekurencyjne (pierwotnie rekurencyjne).
- Jeżeli relacja $R(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ jest pierwotnie rekurencyjna, to $M = \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle : \exists y \exists z R(x_1, \ldots, x_n, y, z)\}$ jest zbiorem rekurencyjnie przeliczalnym.
- Istnieje zbiór, który nie jest rekurencyjnie przeliczalny.
- Dowolny skończony zbiór liczb naturalnych jest pierwotnie rekurencyjny.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

- Zbiór n-tek jest rekurencyjny (pierwotnie rekurencyjny) wtedy i tylko wtedy, gdy jego funkcja charakterystyczna jest ogólnie rekurencyjna (pierwotnie rekurencyjna).
- Jeżeli f jest funkcją ogólnie rekurencyjną (pierwotnie rekurencyjną), zaś a jest ustaloną liczbą, to zbiór rozwiązań równania $f(x_1, \ldots, x_n) = a$ jest rekurencyjny (pierwotnie rekurencyjny).
- Niech f będzie funkcją częściowo, ale nie ogólnie rekurencyjną. Wtedy dziedzina funkcji f^{-1} jest zbiorem pierwotnie rekurencyjnym.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

- Jeżeli zbiory A oraz B są rekurencyjne (pierwotnie rekurencyjne), to również zbiory $A \cap B$, $A \cup B$, $\mathcal{N} \setminus A$ są rekurencyjne (pierwotnie rekurencyjne).
- Jeżeli zbiory A i B są rekurencyjnie przeliczalne, to zbiory $A \cap B$ i $A \cup B$ też są rekurencyjnie przeliczalne.
- Każdy zbiór pierwotnie rekurencyjny jest rekurencyjnie przeliczalny.
- Niech zbiory A i B różnią się skończoną liczbą elementów. Wtedy:
  - (a) jeśli A jest rekurencyjny, to B jest rekurencyjny;
  - (b) jeśli A jest rekurencyjnie przeliczalny, to B jest rekurencyjnie przeliczalny.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

- Jeżeli zbiór A oraz jego dopełnienie $\mathcal{N} \setminus A$ są rekurencyjnie przeliczalne, to A jest rekurencyjny (*twierdzenie Posta*).
- Niech $M \subseteq \mathcal{N}^n$. Przyjmijmy:

$$c^n(M) = \{c^n(x_1, \ldots, x_n) : \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in M\},$$

  gdzie c^n jest funkcją kodującą ciągi, zdefiniowaną w poprzednim wykładzie. Wtedy:
  - (a) M jest pierwotnie rekurencyjny wtedy i tylko wtedy, gdy $c^n(M)$ jest pierwotnie rekurencyjny;
  - (b) M jest rekurencyjny wtedy i tylko wtedy, gdy $c^n(M)$ jest rekurencyjny;
  - (c) M jest rekurencyjnie przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy $c^n(M)$ jest rekurencyjnie przeliczalny.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

- Niech $M \subseteq \mathcal{N}$ będzie zbiorem niepustym. M jest rekurencyjnie przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja pierwotnie rekurencyjna $\alpha(x)$ taka, że $M = \{\alpha(x) : x \in \mathcal{N}\}$.
- Niech M będzie niepustym zbiorem n-tek. Wtedy zbiór M jest rekurencyjnie przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją jednoargumentowe funkcje pierwotnie rekurencyjne $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ takie, że:

$$M = \{\langle \alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x) \rangle : x \in \mathcal{N}\}.$$

- Niech funkcja ogólnie rekurencyjna $f(x)$ spełnia warunek: $f(x) \geqslant x$ dla wszystkich $x \in \mathcal{N}$. Wtedy zbiór wartości ρ_f funkcji f jest rekurencyjny.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

- Zbiór nieskończony A jest rekurencyjny wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zbiorem wartości ściśle rosnącej funkcji ogólnie rekurencyjnej.
- Niepusty zbiór A jest rekurencyjny wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zbiorem wartości rosnącej (niekoniecznie ściśle) funkcji ogólnie rekurencyjnej.
- Każdy nieskończony zbiór rekurencyjnie przeliczalny zawiera nieskończony zbiór rekurencyjny.
- Każdy nieskończony zbiór rekurencyjnie przeliczalny daje się przedstawić w postaci $A = \rho_f$, dla pewnej wzajemnie jednoznacznej funkcji ogólnie rekurencyjnej f.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

- Wykres funkcji ogólnie rekurencyjnej jest zbiorem rekurencyjnym.
- Jeśli wykres Γ_f funkcji f jest rekurencyjnie przeliczalny, to funkcja f jest częściowo rekurencyjna.
- Przeciwobraz zbioru rekurencyjnego względem funkcji ogólnie rekurencyjnej jest rekurencyjny.
- Niech A będzie zbiorem rekurencyjnym, f funkcją ogólnie rekurencyjną i przy tym niech $\rho_f = \mathcal{N}$, $f(A) \cap f(\mathcal{N} \setminus A) = \emptyset$. Wtedy $f(A)$ jest rekurencyjny.
- Niech A, B będą zbiorami rekurencyjnie przeliczalnymi, zaś C zbiorem rekurencyjnym takim, że $A \cap B = \emptyset$, $A \subseteq C \subseteq A \cup B$. Wtedy A jest rekurencyjny.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

- Niech f, g będą funkcjami ogólnie rekurencyjnymi i niech g będzie 1–1 funkcją. Niech także $f(x) \geqslant g(x)$ dla wszystkich x. Jeśli ρ_g jest rekurencyjny, to ρ_f też jest rekurencyjny.
- Niech A, B będą zbiorami rekurencyjnie przeliczalnymi. Wtedy istnieją zbiory rekurencyjnie przeliczalne $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$ takie, że $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, $A_1 \cup B_1 = A \cup B$.
  Można udowodnić, że:
  - (a) funkcja otrzymana za pomocą superpozycji z funkcji o wykresie rekurencyjnie przeliczalnym ma wykres rekurencyjnie przeliczalny;
  - (b) funkcja utworzona za pomocą schematu rekursji prostej z funkcji o wykresie rekurencyjnie przeliczalnym ma wykres rekurencyjnie przeliczalny;
  - (c) funkcja utworzona z pomocą μ-operatora z funkcji o wykresie rekurencyjnie przeliczalnym ma wykres rekurencyjnie przeliczalny;
  - (d) wykres dowolnej funkcji częściowo rekurencyjnej jest rekurencyjnie przeliczalny.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

- Funkcja jest częściowo rekurencyjna wtedy i tylko wtedy, gdy jej wykres jest rekurencyjnie przeliczalny (*twierdzenie o wykresie*).
- Dziedzina funkcji częściowo rekurencyjnej jest zbiorem rekurencyjnie przeliczalnym.
- Zbiór wartości funkcji częściowo rekurencyjnej jest zbiorem rekurencyjnie przeliczalnym.
- Każdy zbiór rekurencyjny jest rekurencyjnie przeliczalny.
- Zbiór n-tek jest rekurencyjnie przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy jego funkcja charakterystyczna jest częściowo rekurencyjna.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

- Można udowodnić, że:
  - (a) obraz zbioru rekurencyjnie przeliczalnego względem funkcji częściowo rekurencyjnej jest rekurencyjnie przeliczalny;
  - (b) przeciwobraz zbioru rekurencyjnie przeliczalnego względem funkcji częściowo rekurencyjnej jest rekurencyjnie przeliczalny.
- Zbiór A rozwiązań równania

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a$$

  jest rekurencyjnie przeliczalny, jeśli f jest częściowo rekurencyjną funkcją n-argumentową.
- Jeśli f^{n+1} jest funkcją częściowo rekurencyjną, to zbiór $M = \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle : \exists y f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0\}$ jest rekurencyjnie przeliczalny.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

- Niech $M_1, \ldots, M_n$ będą parami rozłącznymi rekurencyjnie przeliczalnymi zbiorami n-tek, a $f_1, \ldots, f_k$ częściowo rekurencyjnymi funkcjami n-argumentowymi. Wtedy funkcja g zdefiniowana następująco:

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n), & \text{gdy} \quad \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in M_1, \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n), & \text{gdy} \quad \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in M_k, \\ \text{nie określona} & \qquad\quad \text{w pozostałych} \\ & \qquad\quad \text{przypadkach,} \end{cases}$$

jest częściowo rekurencyjna.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

- Każdą funkcję częściowo rekurencyjną $f(x_1, \ldots, x_n)$ można przedstawić *w postaci normalnej Kleene'go*, tj. w następującej postaci:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = l(\mu t[g(x_1, \ldots, x_n, t) = 0]),$$

  gdzie $g(x_1, \ldots, x_n, t)$ jest stosowną funkcją pierwotnie rekurencyjną, zaś l funkcją zdefiniowaną w poprzednim wykładzie.
- Funkcję częściową $f(x_1, \ldots, x_n)$ można przedstawić w postaci

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu t[g(x_1, \ldots, x_n, t) = 0]$$

  dla stosownej funkcji pierwotnie rekurencyjnej $g(x_1, \ldots, x_n, t)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wykres funkcji $f(x_1, \ldots, x_n)$ jest pierwotnie rekurencyjny.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

- Niech $F(x, y)$ będzie funkcją zdefiniowaną z pomocą *schematu rekursji względem dwu zmiennych*:

$$\begin{cases} F(0, y) = \varphi(y), \\ F(x+1, 0) = \psi(x, F(x, \alpha(x)), F(x, F(x, \gamma(x)))), \\ F(x+1, y+1) = \tau(x, y, F(x, F(x+1, y))). \end{cases}$$

- Wtedy, jeśli funkcje $\varphi, \psi, \alpha, \gamma, \tau$ są ogólnie rekurencyjne, to funkcja F jest ogólnie rekurencyjna.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

- Zbiór $H = \{x : \exists y T_1(x, x, y) = 0\}$, jest rekurencyjnie przeliczalny, ale nie jest rekurencyjny. Tu T_1 jest funkcją pierwotnie rekurencyjną taką, że:

$$U(m, x) = p(\mu y[T_1(m, x, y) = 0])$$

  gdzie $U(m, x)$ jest funkcją uniwersalną dla rodziny wszystkich jednoargumentowych funkcji częściowo rekurencyjnych, a p jest pewną funkcją pierwotnie rekurencyjną.
- Jeśli dziedzina częściowo rekurencyjnej funkcji f^n jest zbiorem rekurencyjnym, to f^n ma rekurencyjne dookreślenie.
- Jeśli $V(n, x)$ jest częściowo rekurencyjną funkcją uniwersalną dla klasy wszystkich jednoargumentowych funkcji częściowo rekurencyjnych, to zbiór $M = \{x : V(x, x) = 0\}$ jest rekurencyjnie przeliczalny, ale nie jest rekurencyjny.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

- Istnieje funkcja częściowo rekurencyjna $f(x)$, która nie ma ogólnie rekurencyjnego dookreślenia.
- Istnieje funkcja częściowo rekurencyjna $f(x)$, która nie daje się przedstawić w postaci

$$f(x) = \mu y[g(x, y) = 0]$$

dla żadnej ogólnie rekurencyjnej funkcji g.

- Jeśli $V(n, x)$ jest częściowo rekurencyjną funkcją uniwersalną dla klasy wszystkich jednoargumentowych funkcji pierwotnie rekurencyjnych, to zbiór

$$\boldsymbol{G} = \{n : V(n, x) \text{ jest ogólnie rekurencyjna}\}$$

nie jest rekurencyjnie przeliczalny.

Koniec

Na dziś wystarczy.

Na następnym wykładzie zobaczymy, jak funkcje i relacje rekurencyjne opisywać można w Arytmetyce Peana.

Dowiemy się również, czym jest hierarchia arytmetyczna.