Logika Matematyczna, I rok Językoznawstwa i Nauk o Informacji UAM, 20 VI 2008.

Imię i Nazwisko: .... GRUPA: I

1. Sprawdź, czy następujący zbiór formuł języka KRZ jest ***semantycznie*** niesprzeczny:

$$\{\alpha \to \beta,\ \gamma \to \delta,\ \neg\beta \lor \gamma,\ \alpha \land \neg\delta\}.$$

2. Pokaż, że w systemie założeniowym KRZ można wyprowadzić formułę β z następującego zbioru formuł:

$$\{(\alpha \to \beta) \to \gamma,\ \neg\gamma \land \neg\delta,\ (\alpha \to \beta) \lor \lambda,\ \lambda \to (\gamma \lor \beta)\}.$$

3. Ustal, dowolną poprawną metodą, czy następujący sylogizm jest poprawny:

Nie wszystkie Myszaste są Pierzaste. Żaden Sierściasty nie jest Myszasty. A zatem wśród Sierściastych nie ma Pierzastego.

4. Sprawdź, czy następujący zbiór formuł języka KRP jest semantycznie niesprzeczny:

$$\{\forall x \forall y\ ((P(x) \land Q(y)) \to R(x,y)), \exists x\ (P(x) \land Q(x)),\ \neg\exists x\ (P(x) \land R(x,x))\}.$$

5. Sformułuj:

- (a) Semantyczne twierdzenie o dedukcji nie wprost w KRZ.
- (b) Prawo komutacji w KRZ.
- (c) Definicję formuły tablicowo wyprowadzalnej w KRP.

PISZ WYRAŹNIE.

JASNO FORMUŁUJ CZYNIONE ZAŁOŻENIA.

ODPOWIEDZI PODAWAJ W FORMIE PEŁNEGO ZDANIA.

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

Logika Matematyczna, I rok Językoznawstwa i Nauk o Informacji UAM, 20 VI 2008.

Imię i Nazwisko: .... GRUPA: II

1. Sprawdź, czy następujący zbiór formuł języka KRZ jest ***semantycznie*** niesprzeczny:

$$\{\alpha \to \neg\beta,\ \beta \to \neg\gamma,\ \delta \to \beta,\ \delta,\ \alpha \vee \gamma\}.$$

2. Pokaż, że w systemie założeniowym KRZ można wyprowadzić formułę λ z następującego zbioru formuł:

$$\{(\alpha \vee \beta) \to \gamma,\ \neg\delta,\ (\gamma \vee \delta) \to \lambda,\ \delta \vee \alpha\}.$$

3. Ustal, dowolną poprawną metodą, czy następujący sylogizm jest poprawny:

Wszystkie Myszaste są Pierzaste. Wśród Sierściastych jest Myszasty. A zatem żaden Sierściasty nie jest Pierzasty.

4. Sprawdź, czy następujący zbiór formuł języka KRP jest semantycznie niesprzeczny:

$$\{\forall x \forall y\ ((P(x) \wedge Q(y)) \to R(x,y)), \exists x\ (P(x) \wedge Q(x)),\ \forall x\ (P(x) \to \neg R(x,x))\}.$$

5. Sformułuj:

- (a) Syntaktyczne twierdzenie o dedukcji wprost w KRZ.
- (b) Prawo *modus tollendo tollens* w KRZ.
- (c) Definicję zbioru tablicowo sprzecznego w KRP.

PISZ WYRAŹNIE.

JASNO FORMUŁUJ CZYNIONE ZAŁOŻENIA.

ODPOWIEDZI PODAWAJ W FORMIE PEŁNEGO ZDANIA.

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

Rozwiązania

GRUPA: I

1. Budujemy tablicę analityczną rozpoczynającą się od podanych formuł. Odpowiada to przyjęciu założenia, że istnieje wartościowanie, przy którym wszystkie te formuły przyjmują wartość 1.

- $(0.1)\ \alpha \to \beta\ ^{2.\to}$
- $(0.2)\ \gamma \to \delta\ ^{4.\to}$
- $(0.3)\ \neg\beta \vee \gamma\ ^{3.\vee}$
- $(0.4)\ \alpha \wedge \neg\delta\ ^{1.\wedge}$
- $(1_g)\ \alpha$
- $(1_d)\ \neg\delta$
  - $(2_l)\ \neg\alpha$
    - $\times_{1_g,2_l}$
  - $(2_p)\ \beta$
    - $(3_l)\ \neg\beta$
      - $\times_{2_p,3_l}$
    - $(3_p)\ \gamma$
      - $(4_l)\ \neg\gamma$
        - $\times_{3_p,4_l}$
      - $(4_p)\ \delta$
        - $\times_{1_d,4_p}$

Tablica jest zamknięta, a więc nie istnieje wartościowanie, przy którym wszystkie podane formuły mają wartość 1. Stąd, tworzą one zbiór semantycznie sprzeczny.

Inna metoda rozwiązania tego zadania to:

- przeprowadzenie dowodu założeniowego, pokazującego, iż podany zbiór formuł jest ***syntaktycznie*** sprzeczny
- skorzystanie z twierdzenia o pełności metody założeniowej w KRZ.

Pokazujemy, że $\{\alpha \to \beta,\ \ \gamma \to \delta,\ \ \neg\beta \vee \gamma,\ \ \alpha \wedge \neg\delta\}$ jest syntaktycznie sprzeczny:

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\gamma \to \delta$	założenie
3.	$\neg\beta \vee \gamma$	założenie
4.	$\alpha \wedge \neg\delta$	założenie
5.	α	OK: 4
6.	$\neg\delta$	OK: 4
7.	β	RO: 1,5
8.	$\neg\gamma$	MT: 2,6
9.	$\neg\beta$	OA: 3,8.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 7 i 9.

Z twierdzenia o pełności metody założeniowej wiadomo, że zbiór formuł języka KRZ jest syntaktycznie sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy jest semantycznie sprzeczny.

Jeszcze inna metoda rozwiązania tego zadania to odwołanie się do definicji semantycznej niesprzeczności. Przypuszczamy, że wszystkie podane formuły mają wartość 1 przy co najmniej jednym wartościowaniu V zmiennych zdaniowych. Możliwe są dwa przypadki:

- przypuszczenie to zostanie potwierdzone — wtedy rozważany zbiór formuł jest semantycznie niesprzeczny;
- przypuszczenie to doprowadzi do sprzeczności, a więc trzeba będzie je odrzucić — wtedy rozważany zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny.

Przypuśćmy zatem, że dla pewnego wartościowania V mamy:

- (1) $V(\alpha \to \beta) = 1$
- (2) $V(\gamma \to \delta) = 1$
- (3) $V(\neg\beta \vee \gamma) = 1$
- (4) $V(\alpha \wedge \neg\delta) = 1$

Wtedy musiałoby być:

(5)	$V(\alpha) = 1$	(na mocy (4))
(6)	$V(\neg\delta) = 1$	(na mocy (4))
(7)	$V(\delta) = 0$	(na mocy (6))
(8)	$V(\gamma) = 0$	(na mocy (2), (7))
(9)	$V(\beta) = 1$	(na mocy (1), (5))
(10)	$V(\neg\beta) = 1$	(na mocy (3), (8))
(11)	$V(\beta) = 0$	(na mocy (10))
(12)	sprzeczność:	(9), (11).

A zatem nie istnieje wartościowanie V spełniające warunki (1)–(4). Badany zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny.

2. Aby pokazać, że:

$$\{(\alpha \to \beta) \to \gamma,\ \neg\gamma \wedge \neg\delta,\ (\alpha \to \beta) \vee \lambda,\ \lambda \to (\gamma \vee \beta)\} \vdash_{jas} \beta$$

budujemy dowód założeniowy wprost:

1.	$(\alpha \to \beta) \to \gamma$	założenie
2.	$\neg\gamma \wedge \neg\delta$	założenie
3.	$(\alpha \to \beta) \vee \lambda$	założenie
4.	$\lambda \to (\gamma \vee \beta)$	założenie
5.	$\neg\gamma$	OK: 2
6.	$\neg(\alpha \to \beta)$	MT: 1,5
7.	λ	OA: 3,6
8.	$\gamma \vee \beta$	RO: 4,7
9.	β	OA: 8,5.

3. Podamy dwie metody rozwiązania:

- A. z wykorzystaniem diagramów Venna
- B. z wykorzystaniem tablic analitycznych.

W obu metodach będziemy stosowali te same oznaczenia:

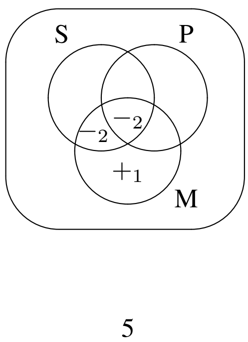
- $P(x)$ — x jest Pierzasty
- $S(x)$ — x jest Sierściasty
- $M(x)$ — x jest Myszasty.

Nasz sylogizm jest oparty na następującej regule wnioskowania:

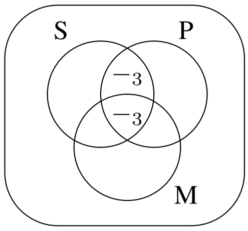
$$\frac{\begin{array}{c}\neg\forall x\ (M(x) \to P(x)) \\ \neg\exists x\ (S(x) \wedge M(x))\end{array}}{\neg\exists x\ (S(x) \wedge P(x))}$$

Metoda A. ***Diagramy Venna.***

Rysujemy diagram dla przesłanek, zaznaczając minusem obszary puste, a plusem obszary niepuste (najpierw zaznaczamy obszary puste!), indeksy odnoszą się do pierwszej i drugiej przesłanki, odpowiednio:



Teraz rysujemy diagram dla wniosku:



Z porównania obu rysunków jest widoczne, że rozważana reguła wnioskowania jest zawodna: obszar $S \cap P \cap M'$ zaznaczony jako pusty na diagramie wniosku, nie jest tak oznaczony na diagramie przesłanek. Wniosek nie wynika logicznie z przesłanek. Sylogizm nie jest poprawny.

Metoda B. ***Tablice analityczne.***

Aby sprawdzić, czy reguła wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{c}\neg\forall x\ (M(x) \rightarrow P(x))\\ \neg\exists x\ (S(x) \wedge M(x))\end{array}}{\neg\exists x\ (S(x) \wedge P(x))}$$

jest niezawodna budujemy tablicę analityczną, zaczynającą się od przesłanek oraz zaprzeczonego wniosku:

$$(0.1)\ \neg\forall x\ (M(x) \rightarrow P(x))\ ^{2.\checkmark a}$$

$$(0.2)\ \neg\exists x\ (S(x) \wedge M(x))\ ^{4.\star a\ 5.\star b}$$

$$(0.3)\ \neg\neg\exists x\ (S(x) \wedge P(x))\ ^{1.\neg\neg}$$

$$(1)\ \exists x\ (S(x) \wedge P(x))\ ^{3.\checkmark b}$$

$$(2)\ \neg(M(a) \rightarrow P(a))\ ^{6.\neg\rightarrow}$$

$$(3)\ S(b) \wedge P(b)\ ^{7.\wedge}$$

$$(4)\ \neg(S(a) \wedge M(a))\ ^{8.\neg\wedge}$$

$$(5)\ \neg(S(b) \wedge M(b))\ ^{9.\neg\wedge}$$

$$(6_g)\ M(a)$$

$$(6_d)\ \neg P(a)$$

$$(7_g)\ S(b)$$

$$(7_d)\ P(b)$$

$$(8_l)\ \neg S(a) \qquad\qquad (8_p)\ \neg M(a)$$

$$(9_l)\ \neg S(b) \qquad (9_p)\ \neg M(b) \qquad\qquad \times_{6_g,8_p}$$

$$\times_{7_g,9_l} \qquad \spadesuit$$

Tablica nie jest zamknięta. Reguła zawodna. Interpretacja, w której przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy:

♠	S	P	M
a	$-$	$-$	$+$
b	$+$	$+$	$-$

4. Aby sprawdzić, czy zbiór formuł języka KRP:

$$\{\forall x \forall y\ ((P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow R(x, y)), \exists x\ (P(x) \wedge Q(x)),\ \neg\exists x\ (P(x) \wedge R(x, x))\}$$

jest semantycznie niesprzeczny, zbudujemy tablicę analityczną, rozpoczynającą się od tych formuł (odpowiada to przyjęciu założenia, że wszystkie te formuły są prawdziwe w co najmniej jednej wspólnej interpretacji):

$(0.1)\ \forall x \forall y((P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow R(x,y))\ ^{3.\star a}$

$(0.2)\ \exists x(P(x) \wedge Q(x))\ ^{1.\checkmark a}$

$(0.3)\ \neg\exists x(P(x) \wedge R(x,x))\ ^{2.\star a}$

$(1)\ \ P(a) \wedge Q(a)\ ^{7.\wedge}$

$(2)\ \ \neg(P(a) \wedge R(a,a))\ ^{6.\neg\wedge}$

$(3)\ \ \forall y((P(a) \wedge Q(y)) \rightarrow R(a,y))\ ^{4.\star a}$

$(4)\ \ (P(a) \wedge Q(a)) \rightarrow R(a,a)\ ^{5.\rightarrow}$

$(5_l)\ \ \neg(P(a) \wedge Q(a))$

$\times_{1,5_l}$

$(5_p)\ \ R(a,a)$

$(6_l)\ \ \neg P(a)$

$(7_g)\ \ P(a)$

$(7_d)\ \ Q(a)$

$\times_{6_l,7_g}$

$(6_p)\ \ \neg R(a,a)$

$\times_{5_p,6_p}$

Tablica zamknięta. Nie istnieje interpretacja, w której wszystkie te formuły są prawdziwe. Semantycznie sprzeczny zbiór formuł.

5.

- (a) ***Twierdzenie o dedukcji nie wprost (wersja semantyczna).***

  Dla dowolnych $X \subseteq F_{KRZ}$, $\alpha \in F_{KRZ}$, $\beta \in F_{KRZ}$ zachodzą następujące równoważności:

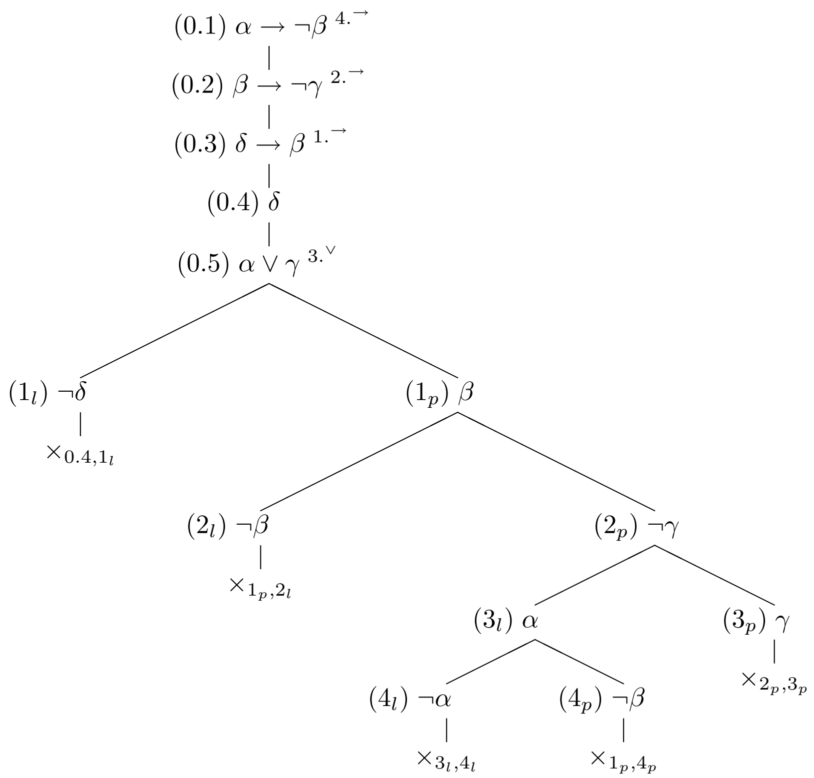
  1. $X \cup \{\alpha\} \models_{KRZ} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{KRZ} \neg\alpha$.
  2. $X \cup \{\neg\alpha\} \models_{KRZ} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \models_{KRZ} \alpha$.

- (b) ***Prawo komutacji***: $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

- (c) *Dowodem tablicowym formuły α ze zbioru założeń S* nazywamy każdą sprzeczną tablicę analityczną ze zbioru S o korzeniu $\neg\alpha$. Jeśli istnieje dowód tablicowy formuły α ze zbioru założeń S, to piszemy $S \vdash_{tab} \alpha$. Jeśli $S \vdash_{tab} \alpha$, to mówimy także, że α jest *tablicowo wyprowadzalna (dowodliwa) z S.*

  Jeśli α jest wyprowadzalna z pustego zbioru założeń, to piszemy $\vdash_{tab} \alpha$ i mówimy, że α jest ***tablicowo wyprowadzalna*** (***dowodliwa***) w KRP.

1. Budujemy tablicę analityczną rozpoczynającą się od podanych formuł. Odpowiada to przyjęciu założenia, że istnieje wartościowanie, przy którym wszystkie te formuły przyjmują wartość 1.



Tablica jest zamknięta, a więc nie istnieje wartościowanie, przy którym wszystkie podane formuły mają wartość 1. Stąd, tworzą one zbiór semantycznie sprzeczny.

Inna metoda rozwiązania tego zadania to:

- przeprowadzenie dowodu założeniowego, pokazującego, iż podany zbiór formuł jest ***syntaktycznie*** sprzeczny
- skorzystanie z twierdzenia o pełności metody założeniowej w KRZ.

Pokazujemy, że $\{\alpha \to \neg\beta,\ \ \beta \to \neg\gamma,\ \ \delta \to \beta,\ \ \delta,\ \ \alpha \vee \gamma\}$ jest ***syntaktycznie*** sprzeczny:

1.	$\alpha \to \neg\beta$	założenie
2.	$\beta \to \neg\gamma$	założenie
3.	$\delta \to \beta$	założenie
4.	δ	założenie
5.	$\alpha \vee \gamma$	założenie
6.	β	RO: 3,4
7.	$\neg\gamma$	RO: 2,6
8.	α	OA: 5,7
9.	$\neg\beta$	RO: 1,8.

Parę formuł wzajem sprzecznych znajdujemy w wierszach 6 i 9.

Z twierdzenia o pełności metody założeniowej wiadomo, że zbiór formuł języka KRZ jest syntaktycznie sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy jest semantycznie sprzeczny.

Jeszcze inna metoda rozwiązania tego zadania to odwołanie się do definicji semantycznej niesprzeczności. Przypuszczamy, że wszystkie podane formuły mają wartość 1 przy co najmniej jednym wartościowaniu V zmiennych zdaniowych. Możliwe są dwa przypadki:

- przypuszczenie to zostanie potwierdzone — wtedy rozważany zbiór formuł jest semantycznie niesprzeczny;
- przypuszczenie to doprowadzi do sprzeczności, a więc trzeba będzie je odrzucić — wtedy rozważany zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny.

Przypuśćmy zatem, że dla pewnego wartościowania V mamy:

- (1) $V(\alpha \to \neg\beta) = 1$
- (2) $V(\beta \to \neg\gamma) = 1$
- (3) $V(\delta \to \beta) = 1$
- (4) $V(\delta) = 1$
- (5) $V(\alpha \vee \gamma) = 1$

Wtedy musiałoby być:

(6)	$V(\beta) = 1$	(na mocy (3), (4))
(7)	$V(\neg\gamma) = 1$	(na mocy (2), (6))
(8)	$V(\gamma) = 0$	(na mocy (7))
(9)	$V(\alpha) = 1$	(na mocy (5), (8))
(10)	$V(\neg\beta) = 1$	(na mocy (1), (9))
(11)	$V(\beta) = 0$	(na mocy (10))
(12)	sprzeczność:	(6), (11).

A zatem nie istnieje wartościowanie V spełniające warunki (1)–(4). Badany zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny.

2. Aby pokazać, że:

$$\{(\alpha \vee \beta) \to \gamma,\ \neg\delta,\ (\gamma \vee \delta) \to \lambda,\ \delta \vee \alpha\} \vdash_{jas} \lambda$$

budujemy dowód założeniowy wprost:

1.	$(\alpha \vee \beta) \to \gamma$	założenie
2.	$\neg\delta$	założenie
3.	$(\gamma \vee \delta) \to \lambda$	założenie
4.	$\delta \vee \alpha$	założenie
5.	α	OA: 4,2
6.	$\alpha \vee \beta$	DA: 5
7.	γ	RO: 1,6
8.	$\gamma \vee \delta$	DA: 7
9.	λ	RO: 3,8.

3. Podamy dwie metody rozwiązania:

- A. z wykorzystaniem diagramów Venna
- B. z wykorzystaniem tablic analitycznych.

W obu metodach będziemy stosowali te same oznaczenia:

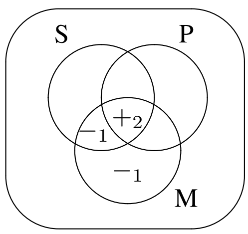
- $P(x)$ — x jest Pierzasty
- $S(x)$ — x jest Sierściasty
- $M(x)$ — x jest Myszasty.

Nasz sylogizm jest oparty na następującej regule wnioskowania:

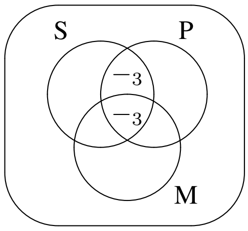
$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\ (M(x) \to P(x)) \\ \exists x\ (S(x) \wedge M(x))\end{array}}{\neg\exists x\ (S(x) \wedge P(x))}$$

Metoda A. ***Diagramy Venna.***

Rysujemy diagram dla przesłanek, zaznaczając minusem obszary puste, a plusem obszary niepuste (najpierw zaznaczamy obszary puste!), indeksy odnoszą się do pierwszej i drugiej przesłanki, odpowiednio:



Teraz rysujemy diagram dla wniosku:



Z porównania obu rysunków jest widoczne, że rozważana reguła wnioskowania jest zawodna: obszar $S \cap P \cap M'$ zaznaczony jako pusty na diagramie wniosku, nie jest tak oznaczony na diagramie przesłanek. Tu ponadto obszar $S \cap P \cap M$ jest zaznaczony jako pusty na diagramie wniosku, a na diagramie przesłanek jako niepusty. Wniosek nie wynika logicznie z przesłanek. Sylogizm nie jest poprawny.

Metoda B. ***Tablice analityczne.***

Aby sprawdzić, czy reguła wnioskowania:

$$\begin{array}{c} \forall x\ (M(x) \to P(x)) \\ \exists x\ (S(x) \land M(x)) \\ \hline \neg\exists x\ (S(x) \land P(x)) \end{array}$$

jest niezawodna budujemy tablicę analityczną dla przesłanek oraz zaprzeczonego wniosku:

$$(0.1)\ \forall x\ (M(x) \to P(x))\ ^{4.^{\star}a\ 5.^{\star}b}$$

$$(0.2)\ \exists x\ (S(x) \wedge M(x))\ ^{2.^{\checkmark}a}$$

$$(0.3)\ \neg\neg\exists x\ (S(x) \wedge P(x))\ ^{1.^{\neg\neg}}$$

$$(1)\ \exists x\ (S(x) \wedge P(x))\ ^{3.^{\checkmark}b}$$

$$(2)\ S(a) \wedge M(a)\ ^{6.^{\wedge}}$$

$$(3)\ S(b) \wedge P(b)\ ^{7.^{\wedge}}$$

$$(4)\ M(a) \to P(a)\ ^{8.^{\to}}$$

$$(5)\ M(b) \to P(b)\ ^{9.^{\to}}$$

$$(6_g)\ S(a)$$

$$(6_d)\ M(a)$$

$$(7_g)\ S(b)$$

$$(7_d)\ P(b)$$

$$\begin{array}{ccc} (8_l)\ \neg M(a) & & (8_p)\ P(a) \\ \times_{6_d,8_l} & (9_l)\ \neg M(b) & (9_p)\ P(b) \\ & \spadesuit & \clubsuit \end{array}$$

Tablica nie jest zamknięte. Reguła zawodna. Interpretacje, w których przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy:

$\spadesuit$	S	P	M
a	+	+	+
b	+	+	−

$\clubsuit$	S	P	M
a	+	+	+
b	+	+	?

4. Aby sprawdzić, czy zbiór formuł języka KRP:

$$\{\forall x \forall y((P(x) \wedge Q(y)) \to R(x, y)), \exists x(P(x) \wedge Q(x)), \forall x(P(x) \to \neg R(x, x))\}$$

jest semantycznie niesprzeczny, zbudujemy tablicę analityczną, rozpoczynającą się od tych formuł (odpowiada to przyjęciu założenia, że wszystkie te formuły są prawdziwe w co najmniej jednej wspólnej interpretacji):

$(0.1)\ \forall x \forall y((P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow R(x,y))\ ^{3.\star a}$

$(0.2)\ \exists x(P(x) \wedge Q(x))\ ^{1.\checkmark a}$

$(0.3)\ \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(x,x))\ ^{2.\star a}$

$(1)\ \ P(a) \wedge Q(a)\ ^{7.\wedge}$

$(2)\ \ P(a) \rightarrow \neg R(a,a)\ ^{6.\rightarrow}$

$(3)\ \ \forall y((P(a) \wedge Q(y)) \rightarrow R(a,y))\ ^{4.\star a}$

$(4)\ \ (P(a) \wedge Q(a)) \rightarrow R(a,a)\ ^{5.\rightarrow}$

$(5_l)\ \ \neg(P(a) \wedge Q(a))$ $\qquad\qquad$ $(5_p)\ \ R(a,a)$

$\times_{1,5_l}$ $\qquad\qquad$ $(6_l)\ \ \neg P(a)$ $\qquad$ $(6_p)\ \ \neg R(a,a)$

$(7_g)\ \ P(a)$ $\qquad$ $\times_{5_p,6_p}$

$(7_d)\ \ Q(a)$

$\times_{6_l,7_g}$

Tablica zamknięta. Nie istnieje interpretacja, w której wszystkie te formuły są prawdziwe. Semantycznie sprzeczny zbiór formuł.

5.

- (a) ***Twierdzenie o dedukcji wprost (wersja syntaktyczna).***

  Dla dowolnego zbioru formuł X oraz formuł α, β zachodzą implikacje:

  1. Jeśli $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krz} \beta$, to $X \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \beta$.
  2. Jeśli $X \vdash_{krz} \alpha \rightarrow \beta$, to $X \cup \{\alpha\} \vdash_{krz} \beta$.

- (b) ***Modus tollendo tollens***:$((\alpha \rightarrow \beta) \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$

- (c) *Dowodem tablicowym formuły α ze zbioru założeń S* nazywamy każdą sprzeczną tablicę analityczną ze zbioru S o korzeniu $\neg\alpha$. Jeśli istnieje dowód tablicowy formuły α ze zbioru założeń S, to piszemy $S \vdash_{tab} \alpha$. Jeśli $S \vdash_{tab} \alpha$, to mówimy także, że α jest *tablicowo wyprowadzalna (dowodliwa) z S*.

  Zbiór formuł S języka KRP jest ***tablicowo sprzeczny***, gdy $S \vdash_{tab} \alpha \wedge \neg\alpha$ dla pewnego zdania α języka KRP. W przeciwnym przypadku S jest ***tablicowo niesprzeczny***.