

LOGIKA MATEMATYCZNA

ZADANIA EGZAMINACYJNE, 2007

I ROK JEZYKOZNAWSTWA I INFORMACJI NAUKOWEJ UAM

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

Podajemy rozwiązania zadań egzaminacyjnych. Zgodnie z wcześniejszymi ustaleniami, dopuszczalne były dowolne poprawne metody rozwiązywania zadań

Ważne. Odpowiedzi na pytania egzaminacyjne powinny być:

- poprawne;
- opatrzone odpowiednimi komentarzami (np. co jest założeniem dowodu nie wprost) oraz uzasadnieniami;
- starannie sformułowane;
- wyraźnie zapisane.

-
- Łącznie na egzaminie możesz uzyskać najwyżej 1700 punktów.
 - Za rozwiązanie każdego z zadań: 1, 2, 3 otrzymujesz najwyżej 300 punktów.
 - Za rozwiązanie każdego z zadań: 4, 5 otrzymujesz najwyżej 400 punktów.
 - Za prawidłowe rozwiązanie trzech zadań uzyskujesz ocenę dostateczną.
 - Za prawidłowe rozwiązanie czterech zadań uzyskujesz ocenę dobrą.
 - Za prawidłowe rozwiązanie pięciu zadań uzyskujesz ocenę bardzo dobrą.

Ponieważ jesteśmy tylko ludźmi, więc kierować się będziemy *zasadą tolerancji*:

- Uzyskanie co najmniej 851 punktów wystarcza do otrzymania oceny dostatecznej.
- Uzyskanie co najmniej 1051 punktów wystarcza do otrzymania oceny dostatecznej plus.
- Uzyskanie co najmniej 1251 punktów wystarcza do otrzymania oceny dobrej.
- Uzyskanie co najmniej 1451 punktów wystarcza do otrzymania oceny dobrej plus.
- Uzyskanie co najmniej 1651 punktów wystarcza do otrzymania oceny bardzo dobrej.

O tym, jaką liczbę punktów otrzymujesz za częściowe rozwiązanie zadania, decyduje ja.

Przypominam:

wpisanie ocen w środę, 13 czerwca 2007, o godz. 10:00, w sali 412, ul. Międzychodzka 5.

Przyjemność sprawdzenia Waszych prac odkładam do jutra. Oceny (nr albumu, liczba punktów, ocena) zostaną podane na stronie Zakładu Logiki Stosowanej UAM w ciągu 48 godzin od tego momentu.

jp, 8 czerwca 2007, 20:52

Zadanie 1. Przeprowadź dowód założeniowy formuły:

$$p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(p \rightarrow q)).$$

Zadanie 2. Ustal dowolną poprawną metodą, czy następująca formuła jest tautologią, czy kontrtautologią KRZ:

$$(p \wedge \neg(q \rightarrow p)) \rightarrow r.$$

Zadanie 3. Ustal dowolną poprawną metodą, czy jest zbiorem semantycznie sprzecznym:

Niektóre Pierzaste są Ogoniaste. Tylko Myszaste są Pierzaste. Cokolwiek jest Ogoniaste, nie jest Myszaste.

Zadanie 4. Przypuśćmy, że **falszywe** są zdania:

- (1) *Niektóre Pierzaste są Myszaste lub Ogoniaste.*
- (2) *Każdy Myszasty jest Ogoniasty.*

Co można wtedy **prawdziwie** powiedzieć o związkach między Pierzastymi a Ogoniastymi?

Zadanie 5. Ustal dowolną poprawną metodą, czy z przesłanek:

Jeśli urwiemy Pogonowskiemu ręce, ale nie utniemy mu nóg, to Pogonowski będzie mógł biegać, ale już nie zaklaszcze.

Pogonowski jeszcze zaklaszcze, chociaż nie będzie mógł biegać, o ile: nie urwiemy mu rąk, ale utniemy nogi.

Ani nie urwiemy Pogonowskiemu rąk, ani nie utniemy mu nóg.

wynika logicznie wniosek: *Pogonowski będzie mógł biegać, o ile jeszcze zaklaszcze.*

Pisz wyraźnie. Nie pomijaj czynionych założeń i przypuszczeń. Odpowiedzi uzasadniaj.

Zadanie 1. Przeprowadź dowód założeniowy formuły:

$$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(p \wedge q).$$

Zadanie 2. Ustal dowolną poprawną metodą, czy następująca formuła jest tautologią, czy kontrtautologią KRZ:

$$p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow q)).$$

Zadanie 3. Ustal dowolną poprawną metodą, czy jest zbiorem semantycznie sprzecznym:

Każda blondynka jest inteligentna. Co najmniej jedna brunetka nie jest inteligentna. Każda z Was, miłe dziewczęta: nie jest brunetką lub jest blondynką.

Zadanie 4. Przypuśćmy, że **falszywe** są zdania:

- (1) *Niektóre Ogoniaste są Pierzaste lub Myszaste.*
- (2) *Żaden Pierzasty nie jest Myszasty.*

Co można wtedy **prawdziwie** powiedzieć o związkach między Pierzastymi a Ogoniastymi?

Zadanie 5. Ustal dowolną poprawną metodą, czy z przesłanek:

Jeśli wyklujemy Pogonowskiemu oczy, ale nie wyrwiemy mu języka, to Pogonowski będzie mógł śpiewać, ale już nie poczyta.

Pogonowski jeszcze poczyta, chociaż nie będzie mógł śpiewać, o ile: nie wyklujemy mu oczu, ale wyrwiemy język.

Ani nie wyklujemy Pogonowskiemu oczu, ani nie wyrwiemy mu języka.

wynika logicznie wniosek: *Pogonowski będzie mógł śpiewać, jeśli jeszcze poczyta.*

Pisz wyraźnie. Nie pomijaj czynionych założeń i przypuszczeń. Odpowiedzi uzasadniaj.

ROZWIĄZANIA

Grupa lewa: LWICE SAWANNY

Zadanie 1.

Dowód założeniowy formuły:

$$p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(p \rightarrow q))$$

jest dowodem nie wprost:

- | | |
|--------------------------------------------------------------|--------|
| 1. p | zał. |
| 2. $\neg q$ | zał. |
| 3. $\neg\neg(p \rightarrow q)$ | z.d.n. |
| 4. $\neg\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ | PPN |
| 5. $p \rightarrow q$ | RO 4,3 |
| 6. q | RO 5,1 |
| 7. SPRZECZNOŚĆ: | 2,6. |

Zadanie 2.

Formuła

$$(p \wedge \neg(q \rightarrow p)) \rightarrow r$$

jest tautologią KRZ, a więc automatycznie nie jest kontrtautologią KRZ.

2.1. NAJPROSTSZA METODA ROZWIĄZANIA.

Najprostszemu dowódowi, iż jest to tautologia, polega na zauważeniu, iż poprzednik tej implikacji, tj. formuła $p \wedge \neg(q \rightarrow p)$ jest fałszywa przy każdym wartościowaniu zmiennych zdaniowych. Istotnie, gdyby $p \wedge \neg(q \rightarrow p)$ była prawdziwa przy jakimś wartościowaniu, to przy tymże wartościowaniu p musiałaby być prawdziwa i $\neg(q \rightarrow p)$ musiałaby być prawdziwa, czyli $q \rightarrow p$ musiałaby być fałszywa. W takim przypadku, q byłaby prawdziwa, a p fałszywa, co daje sprzeczność — p nie może być jednocześnie prawdziwa i fałszywa. Zatem wykluczaliśmy możliwość, że $p \wedge \neg(q \rightarrow p)$ jest prawdziwa. Formuła $p \wedge \neg(q \rightarrow p)$ jest zatem fałszywa dla wszystkich wartościowań zmiennych zdaniowych, czyli implikacja

$$(p \wedge \neg(q \rightarrow p)) \rightarrow r$$

jest prawdziwa dla wszystkich wartościowań zmiennych zdaniowych (bo implikacja o fałszywym poprzedniku jest prawdziwa), a to oznacza, że jest ona tautologią KRZ.

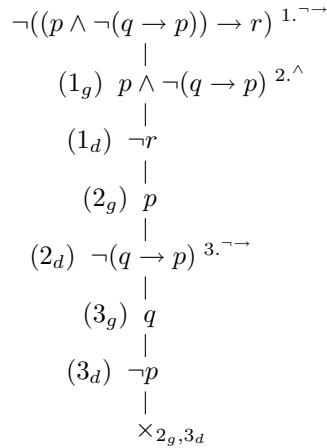
2.2. ROZWIĄZANIE METODĄ SIŁOWĄ.

Trzeba zbudować tabelkę prawdziwościową badanej formuły. Ponieważ w ostatniej kolumnie tej tabeli występuje wyłącznie wartość 1, więc formuła ta jest tautologią KRZ.

p	q	r	$q \rightarrow p$	$\neg(q \rightarrow p)$	$(p \wedge \neg(q \rightarrow p))$	$(p \wedge \neg(q \rightarrow p)) \rightarrow r$
1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1

2.3. ROZWIĄZANIE METODĄ DRZEW SEMANTYCZNYCH.

Budujemy drzewo semantyczne dla formuły $\neg((p \wedge \neg(q \rightarrow p)) \rightarrow r)$:



Drzewo jest zamknięte, a więc formuła $\neg((p \wedge \neg(q \rightarrow p)) \rightarrow r)$ nie jest prawdziwa przy żadnym wartościowaniu. Zatem formuła $((p \wedge \neg(q \rightarrow p)) \rightarrow r)$ jest prawdziwa przy każdym wartościowaniu, czyli jest tautologią.

Zadanie 3.

3.1. ROZWIĄZANIE METODĄ DRZEW SEMANTYCZNYCH.

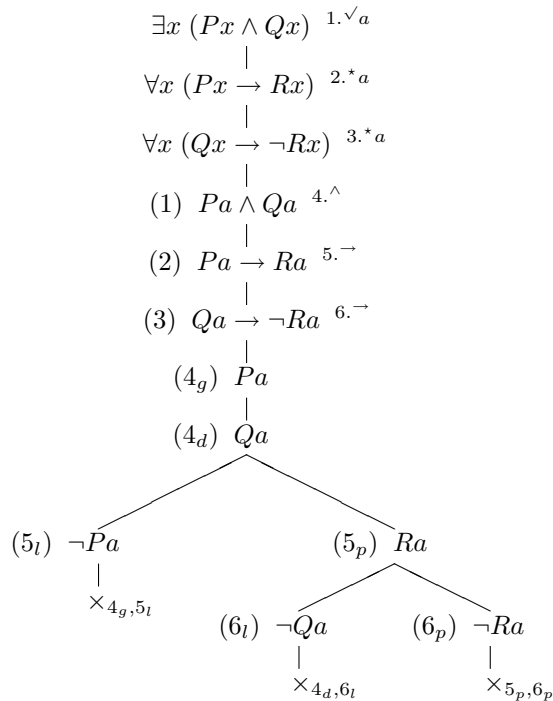
Wprowadźmy oznaczenia:

- Px — x jest Pierzaste,
- Qx — x jest Ogoniaste,
- Rx — x jest Myszaste.

Rozważane zdania mają następujące struktury składniowe:

$$\begin{array}{c}
\exists x (Px \wedge Qx) \\
\forall x (Px \rightarrow Rx) \\
\forall x (Qx \rightarrow \neg Rx)
\end{array}$$

Budujemy drzewo semantyczne, w którego pniu umieszczamy te formuły. Jest to przypuszczenie, że wszystkie te formuły mogą być prawdziwe w jakiejś interpretacji.



Drzewo ma wszystkie gałęzie zamknięte. Zatem nie istnieje interpretacja, w której wszystkie rozważane formuły są spełnione. Rozważany zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny.

3.2. ROZWIĄZANIA METODĄ DIAGRAMÓW VENNA.

Wprowadźmy oznaczenia:

- P — zbiór wszystkich Pierzastych,
- Q — zbiór wszystkich Ogoniastych,
- R — zbiór wszystkich Myszastych.

Wtedy zdania:

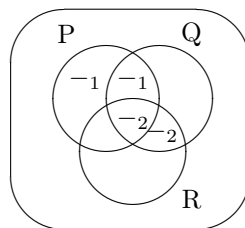
Tylko Myszaste są Pierzaste.

Cokolwiek jest Ogoniaste, nie jest Myszaste.

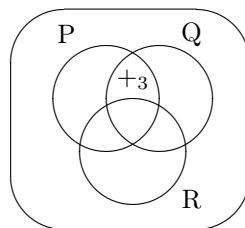
mają, odpowiednio, następujące przekłady na język rachunku zbiorów:

- (1) $P \subseteq R$ (lub, równoważnie: $P - R = \emptyset$, albo, też równoważnie: $P \cap R = P$);
- (2) $Q \subseteq R'$ (lub, równoważnie: $Q - R' = \emptyset$, albo, też równoważnie: $Q \cap R' = Q$).

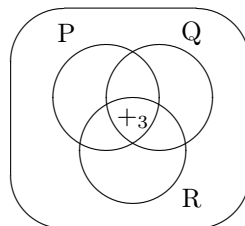
Informacje te zaznaczamy na diagramie Venna (znak „-” oznacza, że dany obszar jest pusty):



Zdaniu *Niektóre Pierzaste są Ogoniaste* odpowiada formuła (3) $P \cap Q \neq \emptyset$. Jeśli ta formuła jest prawdziwa, to znak „+” oznaczający, że dany obszar jest niepusty należy umieścić **albo** w obszarze zaznaczonym poniżej:



albo w obszarze zaznaczonym na poniższym diagramie:



Jednak oba te obszary są puste, na mocy (1) oraz (2). Tak więc, nie istnieją zbiory P , Q oraz R spełniające wszystkie warunki (1), (2) oraz (3). Rozważany zbiór zdań jest semantycznie sprzeczny.

Zadanie 4.

Wprowadźmy oznaczenia:

- P — zbiór wszystkich Pierzastych,
- O — zbiór wszystkich Ogoniastych,
- M — zbiór wszystkich Myszastych.

Ponieważ zdania:

- (1) *Niektóre Pierzaste są Myszaste lub Ogoniaste.*
- (2) *Każdy Myszasty jest Ogoniasty.*

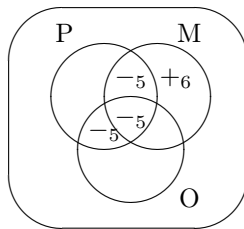
są fałszywe, więc prawdziwe są zdania:

- (3) *Nieprawda, że istnieją Pierzaste, które są Myszaste lub Ogoniaste.*
- (4) *Nie każdy Myszasty jest Ogoniasty.*

Zdania (3) i (4) w przyjętych wyżej oznaczeniach przekładają się, odpowiednio, na następujące formuły języka rachunku zbiorów:

- (5) $P \cap (M \cup O) = \emptyset$;
- (6) $M - O \neq \emptyset$.

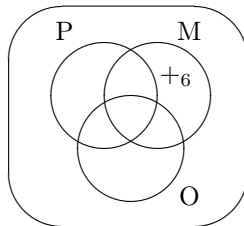
Zaznaczamy informacje zawarte w (5) i (6) na diagramie Venna:



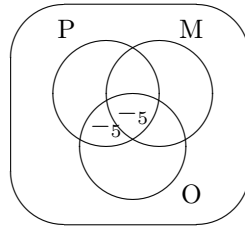
Z diagramu tego widać, że o związkach między Pierzastymi a Ogoniastymi prawdziwie można powiedzieć, że:

- (7) *Nie wszystko jest Ogoniaste lub Pierzaste* (ponieważ $(O \cup P)' \neq \emptyset$, lub, równoważnie: $O' \cap P' \neq \emptyset$, co z kolei można odczytać: *Istnieje coś: ani Ogoniaste, ani Pierzaste*);
- (8) *Żaden Pierzasty nie jest Ogoniasty* (ponieważ $O \cap P = \emptyset$).

Prawdziwość (7) uzasadnia następujący fragment powyższego diagramu:



Natomiast prawdziwość (8) uzasadnia następujący fragment tego diagramu:



Zadanie 5.

Trzeba zbadać, czy podane wnioskowanie przebiega wedle niezawodnej reguły wnioskowania. Znajdujemy zdania proste w podanym tekście i zastępujemy je zmiennymi zdaniowymi:

- Urwiemy Pogonowskiemu ręce — p ,
- Utniemy Pogonowskiemu nogi — q ,
- Pogonowski będzie mógł biegać — r ,
- Pogonowski zaklaszcze — s .

Przesłanki mają następujące struktury składniowe:¹

- $(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg s)$
- $(\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg r \wedge s)$
- $\neg p \wedge \neg q$.

Wniosek jest implikacją: $s \rightarrow r$.

Trzeba zatem sprawdzić, czy reguła wnioskowania:

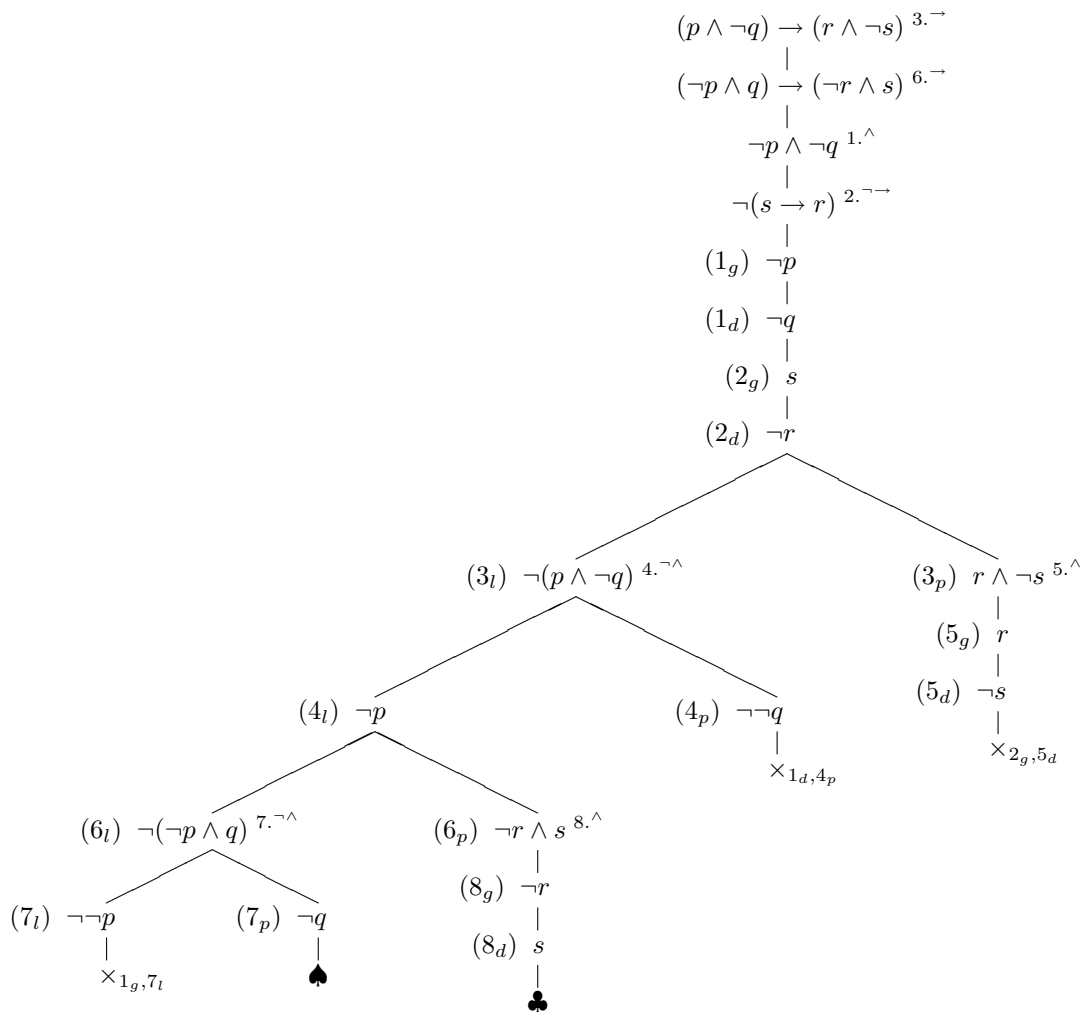
$$\frac{\begin{array}{l} (p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg s) \\ (\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg r \wedge s) \\ \neg p \wedge \neg q \end{array}}{s \rightarrow r}$$

jest niezawodna.

5.1. ROZWIĄZANIE METODĄ DRZEW SEMANTYCZNYCH.

Budujemy drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczenie wniosku. Jeśli to drzewo będzie zamknięte, to będzie to oznaczać, że nie istnieje wartościowanie zmiennych zdaniowych, dla którego przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy. W takim przypadku wniosek wynika logicznie z przesłanek. Jeśli drzewo będzie miało co najmniej jedną gałąź otwartą, to będzie to oznaczać, że istnieje wartościowanie, dla którego przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy. W takim przypadku wniosek nie wynika logicznie z przesłanek.

¹Załóżmy, że kolejność członów koniunkcji jest nieistotna.



Widać, że drzewo ma gałęzie otwarte (zaznaczone liśćmi ♠ oraz ♣). Zatem rozważana reguła wnioskowania nie jest niezawodna.

Badane wnioskowanie nie jest dedukcyjne: wniosek nie wynika logicznie z przesłanek.

5.2. ROZWIĄZANIE METODĄ SIŁOWĄ.

Na mocy Twierdzenia o Dedukcji, reguła wnioskowania:

$$\frac{
 \begin{array}{l}
 (p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg s) \\
 (\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg r \wedge s) \\
 \hline
 \neg p \wedge \neg q
 \end{array}
 }{
 s \rightarrow r
 }$$

jest niezawodna wtedy i tylko wtedy, gdy formuła:

$$(\star) \quad \{[(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg s)] \wedge [(\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg r \wedge s)] \wedge [\neg p \wedge \neg q]\} \rightarrow (s \rightarrow r)$$

jest tautologią KRZ.

Jeśli masz siły i chęci, to możesz zbudować tabelkę prawdziwościową o 16 wierszach (bo mamy 4 zmienne zdaniowe) oraz 18 kolumnach (bo wartości tyłu formuł trzeba policzyć) i zobaczyć, czy ostatni wiersz tej tabelki, odpowiadający formule (★) zawiera tylko wartość 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	q	r	s	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg s$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	$r \wedge \neg s$	$\neg r \wedge s$
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Druga część tabelki prawdziwościowej dla (★):

1	2	3	4	13	14	15	16	17	18
p	q	r	s	$\neg p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg s)$	$(\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg r \wedge s)$	$13 \wedge 14 \wedge 15$	$s \rightarrow r$	(★)
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	0	1	1

Z ostatniej tabelki widać, że dla $p = 0, q = 0, r = 0$ oraz $s = 1$ formuła (★) przyjmuje wartość 0. Nie jest więc tautologią. W konsekwencji, badana reguła wnioskowania nie jest niezawodna.

Powyzsze wnioskowanie przeprowadzone wedle tej reguły nie jest dedukcyjne, wniosek nie wynika logicznie z przesłanek.

5.3. ROZWIĄZANIE METODĄ NIE WPROST.

Na mocy Twierdzenia o Dedukcji, reguła wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{l} (p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg s) \\ (\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg r \wedge s) \\ \neg p \wedge \neg q \end{array}}{s \rightarrow r}$$

jest niezawodna wtedy i tylko wtedy, gdy formuła:

$$(\star) \{[(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg s)] \wedge [(\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg r \wedge s)] \wedge [\neg p \wedge \neg q]\} \rightarrow (s \rightarrow r)$$

jest tautologią KRZ.

Przypuśćmy, że formuła (★) jest fałszywa przy jakimś wartościowaniu zmiennych zdaniowych. Możliwe są dwie sytuacje:

- (A) przypuszczenie to potwierdzi się; w takim przypadku formuła (★) nie jest tautologią KRZ i, w konsekwencji, rozważana reguła wnioskowania nie jest niezawodna, a przeprowadzane wedle niej wnioskowanie nie jest dedukcyjne — wniosek nie wynika logicznie z przesłanek;
- (B) przypuszczenie to nie potwierdzi się (doprowadzi do sprzeczności); w takim przypadku formuła (★) jest tautologią KRZ i, w konsekwencji, rozważana reguła wnioskowania jest niezawodna, a przeprowadzane wedle niej wnioskowanie jest dedukcyjne — wniosek wynika logicznie z przesłanek.

Przypuszczamy zatem, że przy co najmniej jednym wartościowaniu zmiennych zdaniowych:

- (1) formuła $(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg s)$ jest prawdziwa,
- (2) formuła $(\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg r \wedge s)$ jest prawdziwa,
- (3) formuła $\neg p \wedge \neg q$ jest prawdziwa,
- (4) formuła $s \rightarrow r$ jest fałszywa.

Mamy wtedy:

(5) Ponieważ $\neg p \wedge \neg q$ jest prawdziwa (z (3)), więc $\neg p$ jest prawdziwa oraz $\neg q$ jest prawdziwa, czyli p jest fałszywa oraz q jest fałszywa.

(6) Ponieważ $s \rightarrow r$ jest fałszywa (z (4)), więc s jest prawdziwa, a r jest fałszywa.

(7) Otrzymane dla p , q , r oraz s wartości wstawiamy do formuł (1) oraz (2). Jeśli przynajmniej jedna z nich okaże się fałszywa, to mamy przypadek (B). Jeśli natomiast obie okażą się prawdziwe, to mamy przypadek (A).

(8) Podstawiamy $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ oraz $s = 1$ do (1):

$$(0 \wedge \neg 0) \rightarrow (0 \wedge \neg 1) = (0 \wedge 1) \rightarrow (0 \wedge 0) = 0 \rightarrow 0 = 1.$$

(9) Podstawiamy $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ oraz $s = 1$ do (2):

$$(\neg 0 \wedge 0) \rightarrow (\neg 0 \wedge 1) = (1 \wedge 0) \rightarrow (1 \wedge 1) = 0 \rightarrow 1 = 1.$$

(10) Ponieważ nie otrzymaliśmy sprzeczności, więc dla wartościowania $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ oraz $s = 1$ poprzednik implikacji (★) jest prawdziwy, a jej następnik jest fałszywy. Zatem dla tego wartościowania formuła (★) jest fałszywa. Stąd, (★) nie jest tautologią. W konsekwencji, rozważana reguła wnioskowania nie jest niezawodna. Wnioskowanie wedle niej przeprowadzone nie jest dedukcyjne, wniosek nie wynika logicznie z przesłanek.

ROZWIĄZANIA

Grupa prawa: TYGRYSICE DŻUNGLI

Zadanie 1.

Dowód założeniowy formuły:

$$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(p \wedge q)$$

jest dowodem nie wprost:

1. $p \rightarrow \neg q$ zał.
2. $\neg\neg(p \wedge q)$ z.d.n.
3. $\neg\neg(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q)$ PPN
4. $p \wedge q$ RO 3,2
5. p OK 4
6. $\neg q$ RO 1,5
7. q OK 4
8. SPRZECZNOŚĆ: 6,7.

Zadanie 2.

Formuła

$$p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow q))$$

jest tautologią KRZ, a więc automatycznie nie jest kontrtautologią KRZ.

2.1. NAJPROSTSZA METODA ROZWIĄZANIA.

Najprostszemu dowód, iż jest to tautologia polega na zauważeniu, że następnik tej implikacji, czyli formuła $q \rightarrow (r \rightarrow q)$ jest prawdziwa przy każdym wartościowaniu zmiennych zdaniowych. Istotnie, gdyby formuła $q \rightarrow (r \rightarrow q)$ była fałszywa przy jakimkolwiek wartościowaniu zmiennych, to przy tymże wartościowaniu q byłaby prawdziwa, a $r \rightarrow q$ byłaby fałszywa. Wtedy r byłaby prawdziwa oraz q byłaby fałszywa. Otrzymujemy sprzeczność — q nie może być prawdziwa i fałszywa przy tym samym wartościowaniu zmiennych. Zatem $q \rightarrow (r \rightarrow q)$ jest prawdziwa przy każdym wartościowaniu zmiennych zdaniowych. Formuła

$$p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow q))$$

jest zatem implikacją o następniku prawdziwym przy każdym wartościowaniu zmiennych zdaniowych, co oznacza, że także jest prawdziwa przy każdym wartościowaniu zmiennych zdaniowych, czyli jest tautologią KRZ.

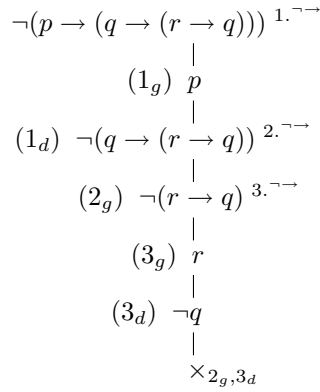
2.2. ROZWIĄZANIE METODĄ SIŁOWĄ.

Trzeba zbudować tabelkę prawdziwościową badanej formuły. Ponieważ w ostatniej kolumnie tej tabeli występuje wyłącznie wartość 1, więc formuła ta jest tautologią KRZ.

p	q	r	$r \rightarrow q$	$q \rightarrow (r \rightarrow q)$	$p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow q))$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1

2.3. ROZWIĄZANIE METODĄ DRZEW SEMANTYCZNYCH.

Budujemy drzewo semantyczne dla formuły $\neg(p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow q)))$:



Drzewo jest zamknięte, a więc formuła $\neg(p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow q)))$ nie jest prawdziwa przy żadnym wartościowaniu. Zatem formuła $p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow q))$ jest prawdziwa przy każdym wartościowaniu, czyli jest tautologią.

Zadanie 3.

3.1. ROZWIĄZANIE METODĄ DRZEW SEMANTYCZNYCH.

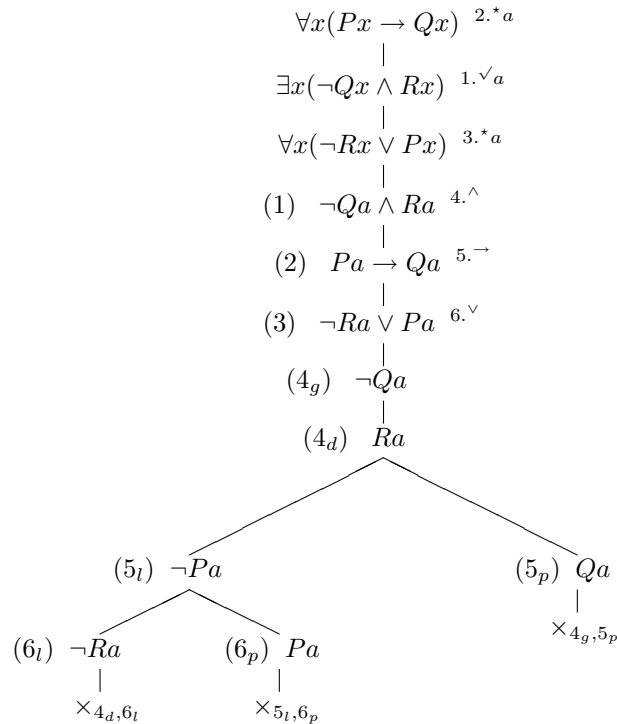
Wprowadźmy oznaczenia:

- Px — x jest blondynką,
- Qx — x jest inteligentna,
- Rx — x jest brunetką.

Struktury składniowe rozważanych zdań są następujące:

- $\forall x(Px \rightarrow Qx)$
- $\exists x(\neg Qx \wedge Rx)$
- $\forall x(\neg Rx \vee Px)$

Budujemy drzewo semantyczne, w którego pniu umieszczamy te formuły. Jest to przypuszczenie, że wszystkie te formuły mogą być prawdziwe w jakiejś interpretacji.



Drzewo ma wszystkie gałęzie zamknięte. Zatem nie istnieje interpretacja, w której wszystkie rozważane formuły są spełnione. Rozważany zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny.

3.2. ROZWIĄZANIE METODĄ DIAGRAMÓW VENNA.

Wprowadźmy oznaczenia:

- P — zbiór wszystkich blondynek;
- Q — zbiór wszystkich (dziewcząt) inteligentnych;
- R — zbiór wszystkich brunetek.

Wtedy zdania:

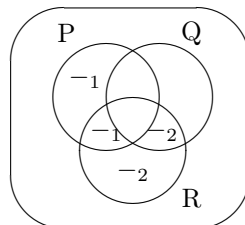
(1) *Każda blondynka jest inteligentna.*

(2) *Każda z Was, miłe dziewczęta: nie jest brunetką lub jest blondynką.*

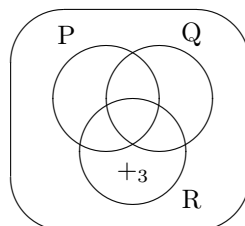
mają, odpowiednio, następujące przekłady na język rachunku zbiorów:

- (1) $P \subseteq Q$ (lub, równoważnie: $P - Q = \emptyset$, albo, też równoważnie: $P \cap Q = P$);
- (2) $(R' \cup P)' = \emptyset$. Proszę zauważyć, że $(R' \cup P)' = R \cap P'$.

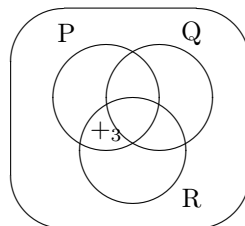
Umieszczamy te informacje na diagramie Venna (znak „-” oznacza, że rozważany obszar jest pusty):



Zdaniu *Co najmniej jedna brunetka nie jest inteligentna* odpowiada formuła (3) $R - Q \neq \emptyset$. Jeśli ta formuła jest prawdziwa, to znak „+” oznaczający, że dany obszar jest niepusty należy umieścić **albo** w obszarze zaznaczonym poniżej:



albo w obszarze zaznaczonym na poniższym diagramie:



Jednak oba te obszary są puste, na mocy (1) oraz (2). Tak więc, nie istnieją zbiory P , Q oraz R spełniające wszystkie warunki (1), (2) oraz (3). Rozważany zbiór zdań jest semantycznie sprzeczny.

Zadanie 4.

Wprowadźmy oznaczenia:

- P — zbiór wszystkich Pierzastych,
- O — zbiór wszystkich Ogoniastych,
- M — zbiór wszystkich Myszastych.

Ponieważ fałszywe są zdania:

- (1) *Niektóre Ogoniaste są Pierzaste lub Myszaste.*
- (2) *Żaden Pierzasty nie jest Myszasty.*

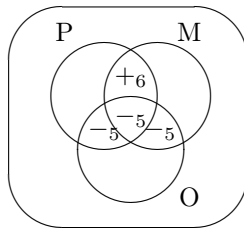
więc prawdziwe są zdania:

- (3) *Nie istnieje Ogoniasty, który byłby Pierzasty lub Myszasty.*
- (4) *Pewien Pierzasty jest Myszasty.*

Zdania (3) i (4) w przyjętych wyżej oznaczeniach przekładają się, odpowiednio, na następujące formuły języka rachunku zbiorów:

- (5) $O \cap (P \cup M) = \emptyset$;
- (6) $P \cap M \neq \emptyset$.

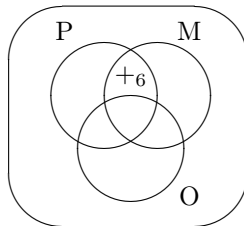
Zaznaczamy informacje zawarte w (5) i (6) na diagramie Venna:



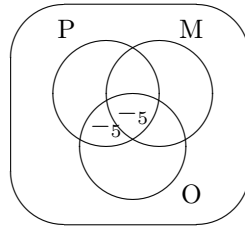
Z diagramu tego widać, że o związkach między Pierzastymi a Ogoniastymi prawdziwie można powiedzieć, że:

- (7) *Nie wszystkie Pierzaste są Ogoniaste* (ponieważ $P - O \neq \emptyset$);
- (8) *Żaden Pierzasty nie jest Ogoniasty* (ponieważ $P \cap O = \emptyset$).

Prawdziwość (7) uzasadnia następujący fragment powyższego diagramu:



Natomiast prawdziwość (8) uzasadnia następujący fragment powyższego diagramu:



Zadanie 5.

Trzeba zbadać, czy podane wnioskowanie przebiega wedle niezawodnej reguły wnioskowania. Znajdujemy zdania proste w podanym tekście i zastępujemy je zmiennymi zdaniowymi:

- Wyklujemy Pogonowskiemu oczy — p ,
- Wyrwiemy Pogonowskiemu język — q ,
- Pogonowski będzie mógł śpiewać — r ,
- Pogonowski jeszcze poczyta — s .

Przesłanki mają następujące struktury składniowe:²

- $(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg s)$
- $(\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg r \wedge s)$
- $\neg p \wedge \neg q$.

Wniosek jest implikacją: $s \rightarrow r$.

Trzeba zatem sprawdzić, czy reguła wnioskowania:

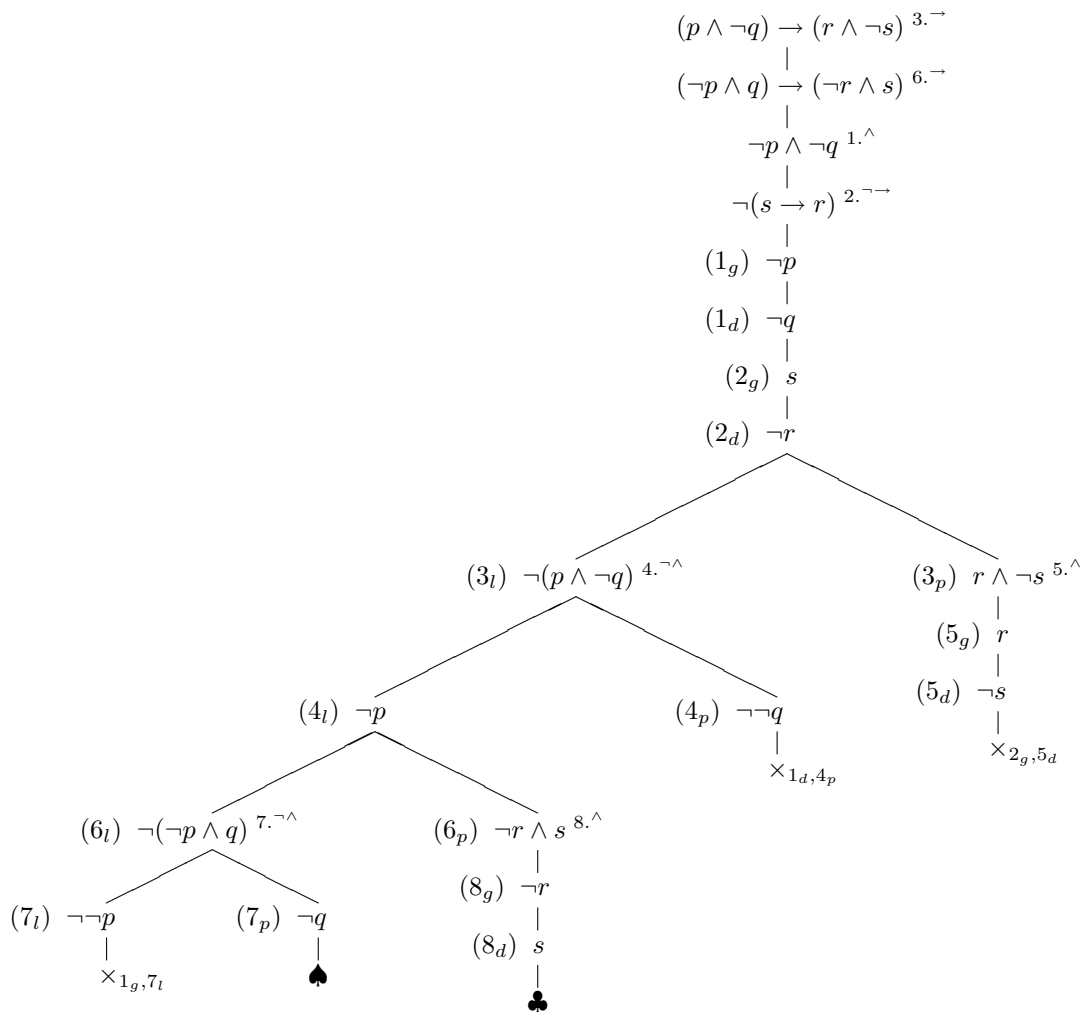
$$\frac{\begin{array}{l} (p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg s) \\ (\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg r \wedge s) \\ \neg p \wedge \neg q \end{array}}{s \rightarrow r}$$

jest niezawodna.

5.1. ROZWIĄZANIE METODĄ DRZEW SEMANTYCZNYCH.

Budujemy drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczenie wniosku. Jeśli to drzewo będzie zamknięte, to będzie to oznaczać, że nie istnieje wartościowanie zmiennych zdaniowych, dla którego przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy. W takim przypadku wniosek wynika logicznie z przesłanek. Jeśli drzewo będzie miało co najmniej jedną gałąź otwartą, to będzie to oznaczać, że istnieje wartościowanie, dla którego przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy. W takim przypadku wniosek nie wynika logicznie z przesłanek.

²Zakładamy, że kolejność członów koniunkcji jest nieistotna.



Widać, że drzewo ma gałęzie otwarte (zaznaczone liśćmi ♠ oraz ♣). Zatem rozważana reguła wnioskowania nie jest niezawodna.

Badane wnioskowanie nie jest dedukcyjne: wniosek nie wynika logicznie z przesłanek.

5.2. ROZWIĄZANIE METODĄ SIŁOWĄ.

Na mocy Twierdzenia o Dedukcji, reguła wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{l} (p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg s) \\ (\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg r \wedge s) \\ \neg p \wedge \neg q \end{array}}{s \rightarrow r}$$

jest niezawodna wtedy i tylko wtedy, gdy formuła:

$$(\star) \quad \{[(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg s)] \wedge [(\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg r \wedge s)] \wedge [\neg p \wedge \neg q]\} \rightarrow (s \rightarrow r)$$

jest tautologią KRZ.

Jeśli masz siły i chęci, to możesz zbudować tabelkę prawdziwościową o 16 wierszach (bo mamy 4 zmienne zdaniowe) oraz 18 kolumnach (bo wartości tyłu formuł trzeba policzyć) i zobaczyć, czy ostatni wiersz tej tabelki, odpowiadający formule (★) zawiera tylko wartość 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	q	r	s	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg s$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	$r \wedge \neg s$	$\neg r \wedge s$
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Druga część tabelki prawdziwościowej dla (★):

1	2	3	4	13	14	15	16	17	18
p	q	r	s	$\neg p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg s)$	$(\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg r \wedge s)$	$13 \wedge 14 \wedge 15$	$s \rightarrow r$	(★)
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	0	1	1

Z ostatniej tabelki widać, że dla $p = 0, q = 0, r = 0$ oraz $s = 1$ formuła (★) przyjmuje wartość 0. Nie jest więc tautologią. W konsekwencji, badana reguła wnioskowania nie jest niezawodna.

Powyższe wnioskowanie przeprowadzone wedle tej reguły nie jest dedukcyjne, wniosek nie wynika logicznie z przesłanek.

5.3. ROZWIĄZANIE METODĄ NIE WPROST.

Na mocy Twierdzenia o Dedukcji, reguła wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{l} (p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg s) \\ (\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg r \wedge s) \\ \hline \neg p \wedge \neg q \end{array}}{s \rightarrow r}$$

jest niezawodna wtedy i tylko wtedy, gdy formuła:

$$(\star) \quad \{[(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg s)] \wedge [(\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg r \wedge s)] \wedge [\neg p \wedge \neg q]\} \rightarrow (s \rightarrow r)$$

jest tautologią KRZ.

Przypuśćmy, że formuła (★) jest fałszywa przy jakimś wartościowaniu zmiennych zdaniowych. Możliwe są dwie sytuacje:

- (A) przypuszczenie to potwierdzi się; w takim przypadku formuła (★) nie jest tautologią KRZ i, w konsekwencji, rozważana reguła wnioskowania nie jest niezawodna, a przeprowadzane wedle niej wnioskowanie nie jest dedukcyjne — wniosek nie wynika logicznie z przesłanek;
- (B) przypuszczenie to nie potwierdzi się (doprowadzi do sprzeczności); w takim przypadku formuła (★) jest tautologią KRZ i, w konsekwencji, rozważana reguła wnioskowania jest niezawodna, a przeprowadzane wedle niej wnioskowanie jest dedukcyjne — wniosek wynika logicznie z przesłanek.

Przyпускаjąc zatem, że przy co najmniej jednym wartościowaniu zmiennych zdaniowych:

- (1) formuła $(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg s)$ jest prawdziwa,
- (2) formuła $(\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg r \wedge s)$ jest prawdziwa,
- (3) formuła $\neg p \wedge \neg q$ jest prawdziwa,
- (4) formuła $s \rightarrow r$ jest fałszywa.

Mamy wtedy:

(5) Ponieważ $\neg p \wedge \neg q$ jest prawdziwa (z (3)), więc $\neg p$ jest prawdziwa oraz $\neg q$ jest prawdziwa, czyli p jest fałszywa oraz q jest fałszywa.

(6) Ponieważ $s \rightarrow r$ jest fałszywa (z (4)), więc s jest prawdziwa, a r jest fałszywa.

(7) Otrzymane dla p , q , r oraz s wartości wstawiamy do formuł (1) oraz (2). Jeśli przynajmniej jedna z nich okaże się fałszywa, to mamy przypadek (B). Jeśli natomiast obie okażą się prawdziwe, to mamy przypadek (A).

(8) Podstawiamy $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ oraz $s = 1$ do (1):

$$(0 \wedge \neg 0) \rightarrow (0 \wedge \neg 1) = (0 \wedge 1) \rightarrow (0 \wedge 0) = 0 \rightarrow 0 = 1.$$

(9) Podstawiamy $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ oraz $s = 1$ do (2):

$$(\neg 0 \wedge 0) \rightarrow (\neg 0 \wedge 1) = (1 \wedge 0) \rightarrow (1 \wedge 1) = 0 \rightarrow 1 = 1.$$

(10) Ponieważ nie otrzymaliśmy sprzeczności, więc dla wartościowania $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ oraz $s = 1$ poprzednik implikacji (★) jest prawdziwy, a jej następnik jest fałszywy. Zatem dla tego wartościowania formuła (★) jest fałszywa. Stąd, (★) nie jest tautologią. W konsekwencji, rozważana reguła wnioskowania nie jest niezawodna. Wnioskowanie wedle niej przeprowadzone nie jest dedukcyjne, wniosek nie wynika logicznie z przesłanek.