Matematyczne podstawy kognitywistyki

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Struktury różniczkowe

Różniczkowanie

- Pojęcie *pochodnej* (funkcji rzeczywistej jednej zmiennej) funkcjonuje w matematyce od prawie czterystu lat i w krajach cywilizowanych jest omawiane w edukacji szkolnej.
- Przy jego pomocy ustalać można np. szybkość zmian wielkości zależnej od innej wielkości, ekstremalne wartości przyjmowane przez funkcję opisującą badaną zależność, itp.

- Pochodna funkcji w danym punkcie to pojęcie dotyczące *lokalnych* własności funkcji – tego, w jaki sposób zmieniają się wartości funkcji dla argumentów z dowolnie małego otoczenia wybranego punktu.
- Znajdowanie pochodnych funkcji – czyli ich różniczkowanie – jest procedurą niezbyt skomplikowaną. Aby się z nią oswoić wystarcza dobre rozumienie pojęcia granicy, omówionego na poprzednim wykładzie.

Iloraz różnicowy

- Załóżmy, że funkcja f o wartościach rzeczywistych jest określona w pewnym otoczeniu punktu x_0, czyli w pewnym przedziale otwartym $(x_0 - a, x_0 + a)$, gdzie $a > 0$. Niech $0 < |h| < a$.
- *Ilorazem różnicowym* funkcji f w punkcie x_0 dla przyrostu h zmiennej niezależnej nazywamy liczbę: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Powszechnie używa się też następujących oznaczeń oraz terminologii dla funkcji $y = f(x)$:

1. Liczbę h, czyli przyrost zmiennej niezależnej oznacza się przez $\triangle x$.
2. Liczbę $f(x_0 + h) - f(x_0)$, czyli przyrost zmiennej zależnej oznacza się przez $\triangle y$.
3. Przy tych oznaczeniach iloraz różnicowy ma postać: $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}$.

Pochodna funkcji w punkcie

- Iloraz różnicowy $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 dla przyrostu h ma prostą interpretację geometryczną: jest równy tangensowi nachylenia siecznej do krzywej $y = f(x)$ w punktach $(x_0, f(x_0))$ oraz $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.
- Jeśli funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 oraz istnieje granica ilorazu różnicowego: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, to tę granicę nazywamy *pochodną funkcji f w punkcie* x_0 i oznaczamy przez $f'(x_0)$.

- Jeżeli istnieje pochodna funkcji f w punkcie x_0, to mówimy, że f jest *różniczkowalna* w punkcie x_0.
- Dla pochodnej funkcji $y = f(x)$ używa się także następujących oznaczeń: $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, przy czym symbole te należy traktować jako całości, a nie jako iloraz (dwóch „nieskończenie małych” wielkości).

Interpretacja geometryczna

- Iloraz różnicowy $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 dla przyrostu h jest równy tangensowi nachylenia siecznej do krzywej $y = f(x)$ w punktach $(x_0, f(x_0))$ oraz $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Gdy h dąży do 0, to punkt $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ przybliża się do punktu $(x_0, f(x_0))$. Tak więc, w tym przypadku „graniczna sieczna" jest styczną do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$.
- Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0, to *styczną do krzywej* $y = f(x)$ *w punkcie* $(x_0, f(x_0))$ jest prosta o współczynniku kierunkowym $f'(x_0)$, przechodząca przez punkt $(x_0, f(x_0))$.
- Równaniem stycznej do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$ (różniczkowalnej w punkcie x_0) jest: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.
- Równaniem *normalnej do krzywej* $y = f(x)$ *w punkcie* $(x_0, f(x_0))$ jest (przy założeniu, że $0 \neq |f'(x_0)| < \infty$): $y = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

Interpretacja mechaniczna

- Wyobraźmy sobie punkt poruszający się po osi liczbowej $\mathbb{R}$ w ten sposób, że w chwili t jego położenie określa funkcja $x(t)$. Rozważymy dwa przypadki.
- *Położenie jest liniową funkcją czasu*: $x(t) = v \cdot t + w$.

- Wtedy przyrostowi czasu $h = \triangle t$ odpowiada przyrost drogi: $\triangle x = x(t + t_0) - x(t_0) = v \cdot (t + t_0) + w - v \cdot t_0 - w = v \cdot h$.
- Stosunek przyrostu drogi do przyrostu czasu jest wtedy równy: $\frac{\triangle x}{\triangle t} = \frac{x(t+t_0)-x(t_0)}{h} = \frac{v \cdot h}{h} = v$, czyli jest wielkością stałą.
- Wtedy stosunek ten nazywamy *prędkością ruchu punktu*.

Interpretacja mechaniczna

- *Położenie jest dowolną funkcją czasu.* Przypuśćmy z kolei, że $x(t)$ jest całkiem dowolną funkcją czasu. Nie ma wtedy żadnego powodu, aby iloraz różnicowy $\frac{\triangle x}{\triangle t} = \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}$ funkcji $x(t)$ w punkcie t_0 dla przyrostu h był wielkością stałą, albowiem może on istotnie zależeć od przyrostu $\triangle t = h$. Wartość tego ilorazu nazywamy *średnią prędkością* w punkcie (chwili) t_0 dla przyrostu $\triangle t$.
- Rozważenie możliwości przejścia do granicy średniej prędkości przy przyroście $\triangle t$ dążącym do zera (przy założeniu, że granica ta istnieje) było jednym z przełomowych momentów w fizyce. Granica ta (o ile istnieje) zależy tylko od t_0 i jest równa pochodnej funkcji x (zależnej od czasu t) w punkcie t_0.
- Nazywamy ją *prędkością chwilową* w chwili t_0 i zwykle oznaczamy przez $v(t_0)$. Mamy zatem: $v(t_0) = x'(t_0) = \lim\limits_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle x}{\triangle t}$.

- *Funkcja* $f(x) = x^n$. Pokażemy, że $f'(x_0) = n \cdot x_0^{n-1}$ dla wszystkich $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz $n \geqslant 1$.
  $(x_0+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^k h^{n-k} = \binom{n}{0} x_0^n + \binom{n}{1} x_0^{n-1} h + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h^2 + \ldots + \binom{n}{n} h^n$
  $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\binom{n}{0} x_0^n + \binom{n}{1} x_0^{n-1} h + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h^2 + \ldots + \binom{n}{n} h^n - x_0^n}{h} =$
  $= \frac{1}{h} \cdot (\binom{n}{1} x_0^{n-1} h + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h^2 + \ldots + \binom{n}{n} h^n) =$
  $= \binom{n}{1} x_0^{n-1} + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h + \ldots + \binom{n}{n} h^{n-1}$
  $\lim_{h \to 0} (\binom{n}{1} x_0^{n-1} + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h + \ldots + \binom{n}{n} h^{n-1}) = \binom{n}{1} x_0^{n-1} = n \cdot x_0^{n-1}$.

- *Funkcja* $f(x) = \sqrt{x}$. Niech $x_0 > 0$. Pokażemy, że $f'(x_0) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x_0}}$.
- $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} = \frac{(x_0+h)-x_0}{h \cdot (\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}$
- $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x_0}}$.

- *Funkcja* $f(x) = \sin x$. Pokażemy, że $f'(x_0) = \cos x_0$. Zakładamy, że podczas ćwiczeń słuchacze ustalili, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} = \frac{2\cdot\sin\frac{x_0+h-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x_0+h+x_0}{2}}{h} =$
  $\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\cdot\cos(x_0+\frac{1}{2}h)$, a więc
  $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\cdot\cos(x_0+\frac{1}{2}h) = 1\cdot\lim\limits_{h\to 0}\cos(x_0+\frac{1}{2}h) = \cos x_0$.

- *Funkcja* $f(x) = \cos x$. Pokażemy, że $f'(x_0) = -\sin x_0$.
- $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\cos(x_0+h)-\cos x_0}{h} =$
  $\frac{1}{h}\cdot(-2)\cdot\sin\frac{x_0+h+x_0}{2}\cdot\sin\frac{x_0+h-x_0}{2} =$
  $= \frac{1}{h}\cdot(-2)\cdot\sin\frac{2x_0+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2} =$
  $= -\sin(x_0+\frac{h}{2})\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$, a zatem
  $\lim\limits_{h\to}(-\sin(x_0+\frac{h}{2})\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}) = -\lim\limits_{h\to 0}\sin(x_0+\frac{h}{2})\cdot 1 = -\sin x_0$.

- Niech $f(x) = |x|$. Pokażemy, że nie istnieje $f'(0)$.
- Gdy $x_0 < 0$, to $f'(x_0) = -1$, ponieważ:
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{|x_0+h|-|x_0|}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{-(x_0+h)+x_0}{h} = -1$
- Gdy $x_0 > 0$, to $f'(x_0) = 1$, ponieważ:
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{|x_0+h|-|x_0|}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(x_0+h)-x_0}{h} = 1$

1. Dla $x_0 = 0$ mamy:
2. $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$
3. $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$

Ponieważ granice: lewostronna i prawostronna ilorazu różnicowego w punkcie $x_0 = 0$ są różne, więc nie istnieje granica tego ilorazu przy $h \to 0$, czyli nie istnieje $f'(0)$.

- Załóżmy, że funkcje f i g są określone w pewnym otoczeniu punktu x_0 oraz że są różniczkowalne w tym punkcie. Wtedy różniczkowalne w tym punkcie są również funkcje: $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $c\cdot f$ (dla $c\in\mathbb{R}$). Zachodzą wzory:
  $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$, $(f-g)'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0)$
  $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$, $(c\cdot f)'(x_0)=c\cdot f'(x_0)$.
- Ponadto, jeśli $g'(x_0)\neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g}$ również jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz: $(\frac{f}{g})'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$. W szczególności, przy tych założeniach: $(\frac{1}{g})'(x_0)=-\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.
- Załóżmy, że funkcja g jest różniczkowalna w punkcie x_0, natomiast funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $u_0=g(x_0)$. Wtedy funkcja złożona $f\circ g$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz zachodzi: $(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$. Jeśli $(f\circ g)(x)=f(g(x))$, to f nazywamy funkcją *zewnętrzną* złożenia $f\circ g$, zaś g funkcją *wewnętrzną* tego złożenia. Jeśli stosujemy zapis: $y=f(u)$, $u=g(x)$, to w notacji Leibniza piszemy: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$.

- Dla przykładu, udowodnimy że:
  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.
- Zauważmy najpierw, że: jeśli g jest różniczkowalna w punkcie x_0, to g jest ciągła w punkcie x_0, czyli $\lim\limits_{h \to 0} g(x_0 + h) = g(x_0)$. Mamy:

- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x_0+h) - (f \cdot g)(x_0)}{h} =$
- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0+h) + f(x_0) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h} =$
- $\lim\limits_{h \to 0} (\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot g(x_0 + h) + f(x_0) \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}) =$
- $\lim\limits_{h \to 0} (\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot g(x_0 + h)) + \lim\limits_{h \to 0} (f(x_0) \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}) =$
- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim\limits_{h \to 0} g(x_0 + h) + f(x_0) \cdot \lim\limits_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}) =$
- $f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

- *Przykład: pochodna funkcji złożonej*. Obliczymy pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$ w punkcie $x_0 = 1$.
- Funkcja f jest złożeniem funkcji $g(x) = \sqrt{x}$ oraz $h(x) = x^4 + 1$: $f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(x^4 + 1) = \sqrt{x^4 + 1}$. Mamy:
- $g'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$ oraz $h'(x) = 4 \cdot x^3$. Tak więc: $f'(x) = (g \circ h)'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{h(x)}} \cdot 4 \cdot x^3 = \frac{2 \cdot x^3}{\sqrt{x^4+1}}$.
- Dla $x_0 = 1$ mamy: $f'(1) = \frac{2 \cdot 1^3}{\sqrt{1^4+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

- *Przykład: pochodna ilorazu*. Wiemy już, że $(\sin x)' = \cos x$ oraz $(\cos x)' = -\sin x$. Mamy ponadto:
  1. Dla $x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ $(n \in \mathbb{Z})$: $(\mathrm{tg}\, x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
  2. Dla $x \neq n \cdot \pi$ $(n \in \mathbb{Z})$: $(\mathrm{ctg}\, x)' = (\frac{\cos x}{\sin x})' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

- *Przykład: pochodna funkcji wykładniczej*. Z poprzedniego wykładu wiemy, że funkcja wykładnicza jest ciągła w każdym punkcie. Dowodzi się, że $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$ oraz że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ dla $a > 0$.
- Niech $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$. Wtedy $f'(x_0) = a^{x_0} \cdot \ln a$, ponieważ: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{a^{x_0+h} - a^{x_0}}{h} = a^{x_0} \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^{x_0} \cdot \ln a$.

- Załóżmy, że f jest ciągła i monotoniczna w pewnym otoczeniu punktu x_0 oraz różniczkowalna w x_0. Niech ponadto $f'(x_0) \neq 0$. Wtedy funkcja f^{-1} odwrotna do funkcji f również jest różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0)$ oraz zachodzi: $(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.
- *Przykład*. Niech $f(x) = \log_a x$, gdzie $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Ponieważ funkcja logarytmiczna $\log_a x$ jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej a^x, więc: $(\log_a x)' = \frac{1}{(a^x)'} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$. W szczególności: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Zalecamy słuchaczom zapamiętanie poniższych wzorów:

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(\frac{1}{x^n})' = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$	$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(e^x)' = e^x$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Ze względu na usługowy jedynie charakter tego kursu, nie podajemy wyprowadzeń dalszych wzorów na pochodne często używanych funkcji. Zainteresowani słuchacze mogą poszukać ich w literaturze zalecanej w sylabusie lub mogą zmierzyć się z samodzielnym ich wyprowadzeniem.

- Załóżmy, że funkcja f jest określona i różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu x_0. Jeżeli jej pochodna f' ma pochodną w punkcie x_0, to tę pochodną nazywa się *drugą pochodną* (*pochodną drugiego rzędu*) funkcji f w punkcie x_0 i oznacza przez $f''(x_0)$. Inne oznaczenie to: $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$.
- Przyjmując, że pochodna rzędu zerowego funkcji f to sama funkcja f, można – posługując się definiowaniem przez indukcję – określić pochodne n-tego rzędu w sposób następujący:
- Załóżmy, że funkcja f jest określona i ma pochodną $f^{(n-1)}$ rzędu $n-1$ (gdzie $n \geqslant 1$) w pewnym otoczeniu punktu x_0.
- Jeżeli funkcja $f^{(n-1)}$ ma pochodną w punkcie x_0, to nazywamy ją *n-tą pochodną* (*pochodną rzędu n*) funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy przez $f^{(n)}(x_0)$. Inne oznaczenie: $\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$.

- *Pochodna wielomianu*. Niech np. $f(x) = 7 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 11$. Mamy wtedy kolejno:
  $f'(x) = 21 \cdot x^2 + 10 \cdot x - 4$, $f''(x) = 42 \cdot x + 10$
  $f^{(3)}(x) = 42$, $f^{(4)}(x) = 0 = f^{(n)}(x)$ dla wszystkich $n \geqslant 4$.
- *Sinus i cosinus*. Wiemy już, że $(\sin x)' = \cos x$ oraz $(\cos x)' = -\sin x$. Mamy zatem:
  1. $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$
  2. $(\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x$

Spadek swobodny punktu materialnego pod wpływem przyspieszenia ziemskiego g. Droga przebyta przez ten punkt w czasie t wyraża się wzorem $f(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$. Prędkość spadania (czyli pochodna tej funkcji) wyznaczona jest zatem wzorem $v(t) = f'(t) = g \cdot t$. Zmiana tej prędkości w czasie, czyli *przyspieszenie* jest pochodną prędkości spadania, a więc drugą pochodną drogi przebytej w danym czasie: $a(t) = v'(t) = f''(t)$. Z rachunku wynika, że $a(t) = (g \cdot t)' = g$, czyli to przyspieszenie jest stałe.

Wzór Leibniza

- Załóżmy, że funkcje f oraz g są określone w pewnym otoczeniu punktu x_0 i mają skończone pochodne $f^{(n)}(x_0)$ i $g^{(n)}(x_0)$. Wtedy funkcje $f+g$, $f-g$, $c \cdot f$ (dla $c \in \mathbb{R}$) również mają skończone pochodne w punkcie x_0 oraz:
  $(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$
  $(f-g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) - g^{(n)}(x_0)$
  $(c \cdot f)^{(n)}(x_0) = c \cdot f^{(n)}(x_0)$.
- *Wzór Leibniza*. Załóżmy, że funkcje f oraz g są określone w pewnym otoczeniu punktu x_0 i mają skończone pochodne $f^{(n)}(x_0)$ i $g^{(n)}(x_0)$. Wtedy funkcja $f \cdot g$ również ma skończoną pochodną w punkcie x_0 oraz:
  $$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(n-k)}(x_0) \cdot g^{(k)}(x_0).$$

Myśl przekornie!

- Jak rozumiesz stwierdzenie: *stopa bezrobocia rośnie coraz szybciej*?
- Jaki jest sens fizyczny wyższych pochodnych (np. dla funkcji opisującej zależność przebytej drogi od czasu)? Czy potrafimy zwerbalizować (po polsku, angielsku, japońsku, kaszubsku, itd.) jaki jest sens fizyczny np. siódmej pochodnej funkcji opisującej (jakąś wielce skomplikowaną) zależność przebytej drogi od czasu?
- Czy do mówienia o różniczkowalności funkcji konieczne jest założenie aksjomatu ciągłości?
- Wspomniano, że istnieją funkcje, które nie mają pochodnej w żadnym punkcie. Jak wygląda wykres takiej funkcji?
- Czy różniczkowanie jest procesem algorytmicznym?

Co musisz ZZZ

- Pochodna funkcji w punkcie. Pochodna funkcji.
- Reguły obliczania pochodnych:
  - pochodna funkcji złożonej,
  - pochodna funkcji odwrotnej,
  - pochodna iloczynu i ilorazu funkcji.
- Pochodne wyższych rzędów.