Przestrzenie Podobieństwa i Opozycji[1]

Jerzy Pogonowski

http://www.logic.amu.edu.pl

W niniejszym krótkim tekście przedstawiamy wybrane wyniki dotyczące teorii relacji podobieństwa (tolerancji) oraz relacji opozycji. Wspominamy także o niektórych zastosowaniach obu teorii.[2] Pan Profesor Bogusław Wolniewicz wskazywał kiedyś na możliwość zastosowania omawianego aparatu formalnego w analizach filozoficznych. W tekście stosujemy powszechnie przyjętą notację i terminologię.

1. Relacje podobieństwa

Przez relacje podobieństwa rozumiemy relacje zwrotne i symetryczne. Są to więc uogólnienia relacji równoważności, które — z definicji — są dodatkowo przechodnie. Relacje równoważności odpowiadają nieodróżnialności obiektów ze względu na z góry ustalone cechy, natomiast w przypadku relacji podobieństwa mówić możemy o nieodróżnialności obiektów ze względu na jakąś (co najmniej jedną) wspólną dla nich cechę. Innym prostym przykładem zależności typu tolerancji jest bliskość. Jeśli na zbiorze X określona jest metryka (funkcja odległości) d, zaś $\varepsilon > 0$ jest dowolną ustaloną liczbą rzeczywistą, to obiekty $x, y \in X$ nazywać możemy ε-*bliskimi*, gdy $d(x, y) \leqslant \varepsilon$. Widać, że relacja ta jest zwrotna i symetryczna.

Termin *tolerance relation* wprowadzony został w pracy Zeemana (1962). O relacjach podobieństwa pisali także, m.in.: Bednarek (1961), Chajda, Zelinka (1977), Chajda, Niederle, Zelinka (1976), Jakubowicz (1968), Husakow, Jakubowicz (1974), Poston (1971), Szrejder (1968, 1970, 1975), Zelinka (1970).

Dla dowolnej relacji $R \subseteq X \times Y$ oraz $x \in X$, $y \in Y$ niech:

$$R^{\wedge}x = \{z \in Y : xRz\}$$

$$R^{\vee}y = \{z \in X : zRy\}.$$

[1]Tekst opublikowany w: M. Omyła (red.) *Skłonność metafizyczna. Bogusławowi Wolniewiczowi w darze.* Wydział Filozofii i Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 1997, 83–95.

[2]Opieramy się głównie na naszych pracach: *Tolerance spaces with applications to linguistics* (1981) oraz *Linguistic oppositions* (1993), opublikowanych przez Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

Jeśli R jest relacją symetryczną, to oczywiście $R^{\wedge}x = R^{\vee}x$ dla wszelkich x.

Przestrzenią podobieństwa nazywamy każdy układ (X, R), gdzie X jest dowolnym zbiorem niepustym, a R zwrotną i symetryczną relacją na X. Niech teraz (X, R) będzie dowolną przestrzenią podobieństwa. Zdefiniujemy najważniejsze pojęcia związane z tego typu przestrzeniami.

R-preklasą nazywamy każdy zbiór $A \subseteq X$ taki, że xRy dla wszystkich $x, y \in A$. Maksymalne (względem $\subseteq$) R-preklasy nazywamy *R-klasami*. Rodzina wszystkich R-klas (oznaczana przez $X//R$) tworzy pokrycie X. Dla dowolnych $x, y \in X$ mamy: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje R-klasa A taka, że $x, y \in A$.

Bazą przestrzeni podobieństwa (X, R) nazwiemy każdą minimalną (względem $\subseteq$) rodzinę R-klas $\mathfrak{B}$ taką, że dla wszystkich $x, y \in X$: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $A \in \mathfrak{B}$ takie, że $x, y \in A$. W każdej przestrzeni podobieństwa istnieje co najmniej jedna baza.

Przez *relację stowarzyszoną* z relacją R rozumiemy relację R^+ zdefiniowaną następująco:

xR^+y wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $z \in X$:

xRz wtedy i tylko wtedy, gdy yRz.

Relacja R^+ stowarzyszona z relacją podobieństwa R jest oczywiście relacją równoważności. Jej klasy równoważności nazywamy *R-jądrami* (przestrzeni (X, R)).

R-jądro, do którego należy dany element $x \in X$ zawarte jest w przekroju wszystkich R-klas, zawierających x (inkluzja odwrotna nie zachodzi). Dla dowolnych $x, y \in X$: xR^+y wtedy i tylko wtedy, gdy x i y należą do dokładnie tych samych R-klas.

Najmniejszą (względem $\subseteq$) relację przechodnią zawierającą relację R nazywamy *przechodnim domknięciem* R i oznaczamy przez R^{tr}. Gdy R jest podobieństwem, to R^{tr} jest równoważnością. Jej klasy równoważności nazywamy *R-składowymi* (przestrzeni (X, R)).

Widać, że relacje równoważności R^+ oraz R^{tr} są „aproksymacjami" relacji podobieństwa R („z dołu" i „z góry").

Quasi-dopełnieniem relacji R nazywamy relację R^{-1}, zdefiniowaną następująco: $xR^{-1}y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$ lub $\neg xRy$.

Quasi-dopełnienie relacji podobieństwa jest relacją podobieństwa.

Przestrzeń (X, R) jest:

1) *prosta*, gdy każde R-jądro jest zbiorem jednoelementowym;

2) *regularna*, gdy dla każdego $x \in X$, R-jądro zawierajace x równe jest przekrojowi wszystkich R-klas zawierających x;

3) *spójna*, gdy ma tylko jedną R-składową.

Zbiór $A \subseteq X$ jest:

1) *R-pochłaniający*, gdy dla dowolnego $y \in X$ istnieje $x \in A$ takie, że xRy;

2) *R-rozproszony*, gdy dla dowolnych różnych $x, y \in A$ nie zachodzi xRy.

Szczególnie interesujące są zbiory, które są jednocześnie minimalnymi zbiorami R-pochłaniającymi oraz maksymalnymi zbiorami R-rozproszonymi. Każdy taki zbiór zawiera, w pewnym sensie, całość informacji o przestrzeni (X, R). Maksymalne zbiory R-rozproszone są dokładnie R^{-1}-klasami.

Do opisu przestrzeni podobieństwa (X, R) wystarcza podanie rodziny jej R-klas, tj. zbioru $X//R$. Rodzina ta służyć bowiem może jako prototypowa rodzina cech obiektów z X (podobnie jak dowolna baza rozważanej przestrzeni podobieństwa). Ważne są zatem metody wyznaczania rodziny wszystkich R-klas.

Niech $G_R : \wp(X) \to \wp(X)$ będzie funkcją zdefiniowaną następujaco:

$$G_R(A) = \{y \in X : \forall x(x \in A \to xRy)\}.$$

Wtedy:

1) (G_R, G_R) jest odpowiedniością Galois.

2) $A \subseteq X$ jest R-klasą wtedy i tylko wtedy, gdy $A = G_R(A)$.

Wiemy, że każda relacja podobieństwa wyznacza pewne pokrycie uniwersum, na którym jest określona (np. rodzinę $X//R$). I na odwrót, każde pokrycie uniwersum wyznacza pewną relację podobieństwa (podobne są te elementy, które należą do co najmniej jednego wspólnego zbioru z danego pokrycia). Dla ustalonej przestrzeni podobieństwa (X, R) pewne pokrycia zbioru X są wyróżnione. Powiemy mianowicie, że pokrycie $\mathbb{A}$ zbioru X jest *kanoniczne*, gdy $\mathbb{A} = X//R$. Udowadnia się (zob. Jakubowicz (1968)), że pokrycie $\mathbb{A}$ jest kanoniczne wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są nastepujace dwa warunki:

1. dla dowolnego $A \in \mathbb{A}$, jeśli $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ oraz $A \subseteq \bigcup \mathbb{B}$, to $\bigcap \mathbb{B} \subseteq A$;

2. jeśli $B \subseteq X$ nie jest podzbiorem żadnego $A \in \mathbb{A}$, to dla pewnych różnych $x, y \in B$ zbiór $\{x, y\}$ nie jest podzbiorem żadnego $A \in \mathbb{A}$.

Każda przestrzeń podobieństwa (X, R) jest także reprezentowana przez układ postaci (X, F, f), gdzie F jest pewnym zespołem cech przysługujacych obiektom ze zbioru X, zaś f jest relacją zachodzącą pomiędzy obiektami a przysługującymi im cechami ($f \subseteq X \times F$; wyrażenie xfa czytamy: obiekt x ma cechę a).

2. Struktury topologiczne

W każdej przestrzeni podobieństwa określić można kilka struktur topologicznych. Niektóre z nich mają szczególne znaczenie w zastosowaniach — oddają intuicje związane z bliskością w zbiorach skończonych (gdzie klasyczne pojęcia topologiczne trywializują się).

Dla dowolnej przestrzeni podobieństwa (X, R) niech:

$T_R^* = \{A \subseteq X : \forall x(x \in A \to R^\wedge x \subseteq A\}$

$T_R^0 =$ topologia generowana przez podbazę $X//R$

$d_R(x, y) =$ najmniejsze n takie, że istnieją $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$ dla których $x_0 = x, x_n = y$ oraz $x_i R x_{i+1}$ $(0 \leqslant i < n)$ (lub ∞, jeśli nie ma takiego n).

Wtedy:

1. (X, T_R^*) oraz (X, T_R^0) są przestrzeniami topologicznymi. Przestrzeń (X, T_R^*) ma bazę $X//R$ złożoną ze zbiorów domknięto-otwartych.

2. d_R jest metryką.

3. (X, R) jest prosta i regularna wtedy i tylko wtedy, gdy T_R^0 jest T_1-topologią (tzn. dla dowolnych różnych $x, y \in X$ istnieje otoczenie x, które nie zawiera y).

4. Dla dowolnego $x \in X$, R-jądro zawierające x jest podzbiorem każdego zbioru otwartego w T_R^0 zawierającego x.

5. Jeśli (X, R) jest prosta, to T_R^0 jest T_0-topologią (tzn. dla dowolnych różnych elementów X istnieje otoczenie jednego z nich, nie zawierające drugiego).

Z każdą przestrzenią podobieństwa stowarzyszyć można także pewną przestrzeń domknięć. Niech mianowicie dla dowolnego $A \subseteq X$:

$cl_R(A) = \{x \in X : xRy$ dla pewnego $y \in A\}$

(R-*domknięcie* zbioru A)

$int_R = \{x \in A : \forall y(xRy \wedge y \in X \rightarrow y \in A)\}$

(R-*wnętrze* zbioru A)

$fr_R(A) = cl_R(A) - int_R(A)$

(R-*ograniczenie* zbioru A).

Wtedy:

1. (X, cl_R) jest przestrzenią domknięć, tzn.:

(i) $cl_R(\emptyset) = \emptyset$

(ii) $cl_R(A \cup B) = cl_R(A) \cup cl_R(B)$ dla $A, B \subseteq X$

(iii) $A \subseteq cl_R(A)$ dla $A \subseteq X$.

2. R jest równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy $cl_R(cl_R(A)) = cl_R(A)$ dla wszystkich $A \subseteq X$.

W rozważanej przestrzeni domknięć zdefiniować można kilka interesujących relacji między niepustymi podzbiorami uniwersum, np.:

$A \; ind_R \; B \leftrightarrow A \subseteq cl_R(B) \wedge B \subseteq cl_R(A)$

$A \; ins_R \; B \leftrightarrow cl_R(A) \cap B \neq \emptyset$

$A \; pr_R \; B \leftrightarrow cl_R(A) \cap cl_R(B) \neq \emptyset$.

Relacje te są wszystkie podobieństwami. Można je scharakteryzować numerycznie, z pomocą następujących funkcji:

$dist_R(A, B) = \min\{d_R(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$

$Dist_R(A, B) = \max(\{dist_R(\{x\}, B) : x \in A\} \cup \{dist_R(A, \{y\}) : y \in B\})$.

Mamy wtedy:

1. $ind_R \subseteq ins_R \subseteq pr_R$.

2. Dla dowolnych niepustych $A, B \subseteq X$ następujące warunki są równoważne:

(i) $A \; ind_R \; B$

(ii) $A \cup B \subseteq cl_R(A) \cap cl_R(B)$

(iii) $Dist_R(A, B) \leqslant 1$.

3. $A \; ins_R \; B \leftrightarrow dist_R(A, B) \leqslant 1$.

3. Uwagi o zastosowaniach

Pierwszego istotnego zastosowania przestrzeni podobieństwa dostarcza praca Zeemana (1962), poświęcona fizjologii widzenia. Pokazuje się w niej, że struktura topologiczna pola widzenia jest (w ściśle określonym sensie) izomorficzna ze strukturą w zbiorze komórek płatów wzrokowych w mózgu.

Dysertacja Tima Postona (1971) poświęcona jest goemetrii przestrzeni o naturze „ziarnistej" (point-like), a nie „ciągłej" (rubber-like). Autor charakteryzuje, w zaawansowanym aparacie pojęciowym teorii kategorii oraz teorii homologii, własności relacji tolerancji. Ewentualne zastosowania tych rozważań to modele fizyczne, w których czas i przestrzeń mają naturę dyskretną.

W cytowanych wyżej pracach Chajdy, Niederlego i Zelinki bada się różne struktury algebraiczne, w których relacje tolerancji występują jako (uogólnione) kongruencje.

Arbib (1967) i Dal Cin (1973) rozważali automaty tolerancyjne, tj. automaty, w których funkcja przejścia charakteryzowana jest przez stosowną relację podobieństwa. Automaty tolerancyjne to automaty z pewną inercją: nagła zmiana na wejściu nie może doprowadzić do nagłej zmiany stanu. Pojęcia te wykorzystywane były w rozwiązywaniu problemów z teorii sterowania optymalnego.

W lingwistyce używano relacji podobieństwa do opisu, m.in.:

— synonimii (Fischer (1973), Pogonowski (1980));

— homonimii (Semeniuk (1969)).

Omówimy nieco dokładniej dwa przykłady zastosowania relacji podobieństwa w lingwistyce. Mają one walor nieco ogólniejszy — podane konstrukcje znajdują interpretacje także w innych dziedzinach.

3.1. Podobieństwa hiponimiczne

Relację *hiponimii* (podrzędności znaczeniowej) na niepustym i skończonym zbiorze leksemów Lxm ustalonego języka oznaczymy przez Hpn. Zakłada się, że relacja ta jest zwrotna i przechodnia, że przekrój jej dziedziny i przeciwdziedziny jest niepusty oraz że dla każdego leksemu x istnieje różny od niego leksem y taki, że $x\ Hpn\ y$ lub $y\ Hpn\ x$.

Relacja hiponimii charakteryzowana jest przez językoznawców na różne sposoby: jako zawieranie się zakresów wyrażeń, podrzędność treści wyrażeń, podstawialność *salva veritate*, itp. Tutaj traktujemy pojęcie hiponimii jako pojęcie pierwotne, wyznaczające pewne częściowe uporządkowanie leksykonu.

Relację *ostrej (właściwej) hiponimii* hpn definiujemy jako $Hpn - Hpn^{-1}$. Dziedziną hpn jest zbiór Hp wszystkich *hiponimów*. Przeciwdziedziną hpn jest zbiór Hr wszystkich *hiperonimów*. Zauważmy, że dla dowolnego leksemu $x \in Hp$ zbiór $hpn^\wedge x$ jego wszystkich hiperonimów traktowany może być jako ogół cech semantycznych (leksykalnych) x.

Każdy podzbiór Lxm uporządkowany liniowo przez hpn nazwiemy *łańcuchem hiponimicznym*. Każdy podzbiór $A \subseteq Lxm$ taki, że $A^2 \cap hpn = \emptyset$ nazywamy *antyłańcuchem hiponimicznym*.

Podobieństwa hiponimiczne wyznaczone są przez układ (Hp, Hr, hpn). Weźmy pod uwagę jedną z takich relacji:

$$xhsm\ y \leftrightarrow hpn^\wedge x \cap hpn^\wedge y \neq \emptyset.$$

Jeśli $x\ hsm\ y$, to powiemy, że x i y są *hiponimicznie podobne*. Jak widać, podobieństwo to polega na posiadaniu co najmniej jednego wspólnego hiperonimu (cechy semantycznej). O relacji tej udowadnia się m.in., że:

1. $x\ hsm\ y$ wtedy i tylko wtedy, gdy x i y mają co najmniej jeden wspólny maksymalny hiperonim (tzn. leksem należący do $Hr - Hp$).

2. Jeśli hsm jest równoważnością, to

$$Hp//hsm = \{hpn^{\vee}x : x \in Hr - Hp\}.$$

3. Dla dowolnych $x, y \in Hp$, jeśli $hpn^{\wedge}x = hpn^{\wedge}y$, to $x\ hsm^{+}\ y$.

4. Każdą hsm-klasę otrzymać można ze zbiorów postaci $hpn^{\vee}x$ dla $x \in Hr$ przez stosowanie teorio-mnogościowych operacji sumy oraz iloczynu (bez stosowania operacji różnicy zbiorów).

5. Dla dowolnego $A \subseteq Hp$, A jest hsm-klasą wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A = \bigcap_{x \in A} \{\bigcup hpn^{\vee}y : y \in hpn^{\wedge}x\}.$$

Relacją tolerancji w Lxm jest także następująca relacja inc *nieporównywalności hiponimicznej*:

$x\ inc\ y \leftrightarrow$ ani $x\ hpn\ y$ ani $y\ hpn\ x$.

Wiadomo o niej np., że:

1. $Lxm//inc$ jest identyczne z rodziną wszystkich maksymalnych (względem $\subseteq$) antyłańcuchów hiponimicznych.

2. inc jest równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą następujące warunki:

(i) $x\ inc\ y \wedge y\ hpn\ z \rightarrow x\ hpn\ z$

(ii) $x\ inc\ y \wedge z\ hpn\ y \rightarrow z\ hpn\ x$

(dla dowolnych $x, y, z \in Lxm$).

3. Każdy maksymalny łańcuch hiponimiczny jest minimalnym zbiorem inc-pochłaniającym oraz maksymalnym zbiorem inc-rozproszonym.

Struktury związane z podobieństwem hiponimicznym mogą być wykorzystane w przypadku dowolnych zbiorów częściowo uporządkowanych.

3.2. Podobieństwa syntagmatyczne

W planie wyrażania każdego języka naturalnego poszczególne jednostki wiązane są w większe całości poprzez relacje syntagmatyczne (takie, jak np. łączliwość morfów, związki akomodacji syntaktycznej, spójność tekstowa). Poszczególne poziomy językowe (np. morfów, form wyrazowych, zdań, tekstów) wyznaczone są przez stosowne zestawy relacji syntagmatycznych. Podamy teraz, w bardzo skrótowej wersji, formalną charakterystykę pojęcia *analizy lingwistycznej* rozumianej jako procedura ,,odkrywania" struktury planu wyrażania języka. Nieformalna charakterystyka tego pojęcia opiera się na następujących założeniach (można je znaleźć w pracach lingwistów – zob. np. Hjelmslev (1953)):

1. Danymi empirycznymi każdej analizy lingwistycznej są konkretne wypowiedzi dowolnego, ustalonego języka naturalnego.

2. Zasadą dokonywania analizy jest segmentacja wypowiedzi na elementy składowe.

3. Podstawę segmentacji wypowiedzi stanowią relacje między jej częściami.

4. Każda analiza lingwistyczna wyodrębnia poziomy w zbiorze wszystkich segmentów.

5. Dla dowolnych dwóch sąsiednich poziomów językowych, segmenty należące do ,,wyższego" z nich rozpatrywane są jako kombinacje elementów ,,niższego" z nich.

6. Każda wypowiedź jest konkretnym obiektem indywidualnym.

Logiczna rekonstrukcja tego pojęcia wykorzystuje aparaturę teorio-modelową. Jeśli A jest dowolną strukturą relacyjną, to niech $dom(A)$ oznacza uniwersum A. Jeśli Ω jest dowolnym zbiorem predykatów, to $Str(\Omega)$ oznacza klasę wszystkich skończonych, niepustych struktur relacyjnych, których relacje są interpretacjami predykatów z Ω.

Powiemy, że ciąg $(S_1, \ldots, S_k)$ jest *hierarchiczną analizą o syntagmatyce* $(\Omega_1, \ldots, \Omega_k)$ $(k > 1)$, jeśli:

1. $(\Omega_1, \ldots, \Omega_k)$ jest ciągiem skończonych, niepustych oraz parami rozłącznych zbiorów predykatów.

2. $S_i \subseteq Str(\Omega_i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant k)$.

3. S_k jest niepusty i co najwyżej przeliczalny.

4. Jeśli $1 \leqslant i < k$ oraz $A \in S_i$, to istnieje $B \in S_{i+1}$ takie, że $A \in dom(B)$.

5. Jeśli $1 \leqslant i < k$ oraz $A \in S_{i+1}$, to $dom(A) \subseteq S_i$.

6. Jeśli $1 \leqslant i \leqslant k$ oraz A i B są różnymi elementami S_i, to $dom(A) \cap dom(B) = \emptyset$.

Zbiory S_i są *poziomami językowymi.* Elementy S_i są *zanalizowanymi segmentami* (i-tego poziomu). Relacje będące realizacjami predykatów z Ω_i w strukturach z S_i nazywamy *relacjami syntagmatycznymi* (i-tego poziomu). Powyższą definicję można rozszerzyć tak, aby uwzględnić relacje *paradygmatyczne* oraz *międzypoziomowe.*

Dla dowolnego poziomu językowego S_i niech:

$Sub(S_i) = \{A : A$ jest niepustą podstrukturą B dla pewnego $B \in S_i\}$

Jeśli $A, B \in S_i$, to niech:

$A\ isb_i\ B \leftrightarrow A$ jest izomorficzne z jakąś podstrukturą B.

Relacje (lokalnego) *podobieństwa syntagmatycznego* $sim_i \subseteq S_i \times S_i$ (dla $1 < i \leqslant k$) oraz $sml_i \subseteq Sub(S_i) \times Sub(S_i)$ (dla $1 \leqslant i < k$) określamy następujaco:

$$A\ sim_i\ B \leftrightarrow isb^{\vee} A \cap isb^{\vee} B \neq \emptyset$$

$$A\ sml_i\ B \leftrightarrow isb^{\wedge} A \cap isb^{\wedge} B \neq \emptyset.$$

Relacje te są podobieństwami (odpowiednio w S_i oraz $Sub(S_i)$). Ich interpretacja lingwistyczna jest dość prosta. Dwa zanalizowane segmenty pozostają w relacji sim_i wtedy i tylko wtedy, gdy zawierają taki sam (z dokładnością do izomorfizmu) fragment. Relacja sml_i wiąże takie fragmenty zanalizowanych segmentów, dla których istnieje co najmniej jeden zanalizowany segment zawierający oba te fragmenty (z dokładnością do izomorfizmu). Obie te relacje mogą zostać ,,usubtelnione", gdy żądać będziemy np. aby lokalne podobieństwo syntagmatyczne polegało na zawieraniu wspólnego (z dokładnością do izomorfizmu) stosownego reduktu struktury relacyjnej.

Ze względu na ograniczoną objętość artykułu nie możemy przedyskutować interpretacji poszczególnych konstrukcji związanych z podanymi tu relacjami podobieństwa (zob. Pogonowski (1991a)). Zwróćmy jedynie uwagę, że omawiane lokalne podobieństwo (strukturalne) może mieć zastosowania także pozalingwistyczne — np. w ontologiach sytuacji, gdy sytuacje reprezentowane są przez stosowne struktury relacyjne.

4. Relacje opozycji

Relacje opozycji mają różnicować obiekty. Naturalne wydaje się więc, że opozycjami nazwiemy relacje, które są przeciwzwrotne i symetryczne. Tak na przykład dopełnienie dowolnej (nietrywialnej) relacji równoważności (na zbiorze co najmniej dwuelementowym) jest relacją przeciwzwrotną i symetryczną. W ustalonym uniwersum wygodne jest ponadto nazywanie opozycjami takich przeciwzrotnych oraz symetrycznych relacji R, które są w dodatku *słabo spójne*, tzn. spełniają warunek: dla dowolnego x istnieje y takie, że $x \neq y$ i xRy.

Typowy (w zastosowaniach) przykład relacji tego rodzaju otrzymujemy w przypadku, gdy dany zespół obiektów X scharakteryzowany został przez ustalony zbiór cech F: za pozostające w opozycji uznajemy te obiekty, które różnią się co najmniej jedną cechą. Jest to najogólniejszy przypadek różnicowania obiektów poprzez posiadane przez nie cechy. Szczególne — ciekawsze — przypadki tego typu różnicowania otrzymujemy, gdy w zbiorze cech przysługujących obiektom rozważa się dodatkowe struktury. Kilkadziesiąt tego typu relacji opisaliśmy w innych miejscach (Pogonowski (1985, 1993)). Tutaj wspomnimy tylko krótko o niektórych z nich.

Dodajmy jeszcze, że większość konstrukcji (teorio-mnogościowych, algebraicznych, topologicznych) związanych z relacjami podobieństwa przenosi się, po uwzględnieniu oczywistych poprawek, na przypadek relacji opozycji. Rzecz jasna, konstrukcje te uzyskują w zastosowaniach inne interpretacje.

Rozważać będziemy układy postaci (X, F, φ), spełniające następujący układ warunków $(*)$:

— X jest co najmniej dwuelementowym zbiorem obiektów;

— F jest co najmniej dwuelementowym zbiorem cech, zaś $\varphi \subseteq X \times F$ jest relacją o dziedzinie X i przeciwdziedzinie F. Wyrażenie $x\ \varphi\ a$ czytamy: obiekt x ma cechę a;

— żądamy ponadto, aby spełniony był warunek:

$$\neg\exists x \forall y \forall a\ (x\ \varphi\ a \leftrightarrow y\ \varphi\ a)$$

(intuicyjnie: nie ma obiektu, który byłby nieodróżnialny od wszystkich innych).

Zgodnie z przyjętymi wcześniej oznaczeniami, mamy:

$\varphi^{\wedge} x = \{b \in F : x\ \varphi\ b\}$ (cechy obiektu x)

$\varphi^{\vee} a = \{y \in X : y\ \varphi\ a\}$ (obiekty o cesze a).

Dla dowolnego układu (X, F, φ) spełniającego powyższe warunki zdefiniujmy teraz następujące relacje na zbiorze X (symbol $\ominus$ oznacza tu operację różnicy symetrycznej zbiorów):

$x\ op_1\ y \leftrightarrow \varphi^{\wedge} x \cap \varphi^{\wedge} y = \emptyset$

$x\ op_2\ y \leftrightarrow \varphi^{\wedge} x \ominus \varphi^{\wedge} y \neq \emptyset$

$x\ op_3\ y \leftrightarrow \varphi^{\wedge}x - \varphi^{\wedge}y \neq \emptyset \wedge \varphi^{\wedge}y - \varphi^{\wedge}x \neq \emptyset$
$x\ op_A\ y \leftrightarrow \exists a \in A(a \in \varphi^{\wedge}x \ominus \varphi^{\wedge}y)$.

Wtedy:

1. op_1, op_2, op_3 są przeciwzwrotnymi, symetrycznymi oraz słabo spójnymi relacjami na zbiorze X.

2. $op_1 \subseteq op_2 \subseteq op_3$.

3. op_A jest przeciwzwrotna i symetryczna dla każdego $A \subseteq F$. Relacja ta jest słabo spójna dla tych zbiorów A, które spełniają warunek:
$\forall x \in X\ \exists y \in X(A \cap (\varphi^{\wedge}x \ominus \varphi^{\wedge}y) \neq \emptyset)$.

Udowadnia się szereg prostych własności powyżej zdefiniowanych relacji, zależnych od własności relacji φ (zob. Pogonowski (1993)). Relacja φ wyznacza też odpowiedniość Galois $(\triangle_{\varphi}, \bigtriangledown_{\varphi})$ między zbiorami obiektów $Y \subseteq X$ oraz cech $A \subseteq F$:

$$\triangle_{\varphi}(Y) = \bigcap_{x \in Y} \varphi^{\wedge}x \qquad \bigtriangledown_{\varphi}(A) = \bigcap_{a \in A} \varphi^{\vee}a.$$

Odpowiedniość ta była używana m.in. w zdefiniowaniu w zbiorze obiektów pewnej struktury teorio-kratowej, związanej z badaniem *pojęć* (zob. np. Wille (1982)).

Szerokie zastosowania mają układy postaci $(X, F, \varphi, \mathcal{A})$, gdzie $\mathcal{A} \subseteq \wp(F)$ jest pewną rodziną *parametrów* (tzn. rodzajów cech jednorodnych, lub, w terminologii teorii systemów informacyjnych Pawlaka — atrybutów; zob. np. Pawlak (1983), Pogonowski (1993)). O układach tego rodzaju zakłada się, że:

(i) $\mathcal{A}$ jest podziałem F o co najmniej dwóch elementach;

(ii) każdy element $\mathcal{A}$ ma co najmniej dwa elementy;

(iii) $\forall x \in X\ \forall A \in \mathcal{A}\ \exists! a \in A\ (x\ \varphi\ a)$

(iv) $\forall A \in \mathcal{A}\ \bigcup_{a \in A} \varphi^{\vee}a = X$.

Wykorzystywano tego typu układy np. w logicznej rekonstrukcji teorii opozycji fonologicznych (Pogonowski (1995)); w szczególnych przypadkach każdy parametr może mieć dodatkową strukturę — np. liniowe uporządkowanie. W teorii systemów informacyjnych wykorzystuje się także np. relację dominacji. Mówimy, że cecha $b \in F$ *dominuje* zbiór cech $A \subseteq F$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall x \in X(A \subseteq \varphi^{\wedge}x \rightarrow b \in \varphi^{\wedge}x).$$

Relacja dominacji wprowadza naturalną hierarchię w zbiorze cech.

Ważnych przykładów relacji opozycji dostarczają sytuacje, gdy obiekty przeciwstawiane są ze względu na konteksty, w których występują. Niech $FS(A)$ oznacza wolną półgrupę generowaną przez A. Jeśli $a, b \in FS(A)$, to ab oznacza ich konkatenację. Relacja *sbw bycia podsłowem* zdefiniowana jest standardowo:

$$a\ sbw\ b \leftrightarrow \exists u, v \in FS(A)\ (b = uav).$$

Dla dowolnego zbioru $S \subseteq FS(A)$, przez S-*kontekst* rozumie się każdą parę $(u, v) \in (FS(A))^2$ taką, że $uav \in S$ dla pewnego $a \in A$. Rodzinę wszystkich S-kontekstów dla danego $S \subseteq FS(A)$ oznaczamy przez Ctx_A^S.

Opozycje *kontekstowe* opisywane są przez układy postaci (X, F, φ, S), gdzie:

(i) (X, F, φ) spełnia $(*)$
(ii) $S \subseteq FS(X)$
(iii) $F = Ctx_X^S$
(iv) dla wszystkich $x \in X$ oraz $(a, b) \in F$

$$x\ \varphi(a, b)\ \leftrightarrow axb \in S.$$

W układach (X, F, φ, S) spełniających powyższe warunki zrekonstruować można relacje podobieństwa i opozycji oparte na dystrybycji, np.:

x jest *homodystrybucyjne* z y wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi^\wedge x = \varphi^\wedge y$

x jest *w dystrybucji komplementarnej z* y wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi^\wedge x \cap \varphi^\wedge y = \emptyset$

x jest *w dystrybucji niezależnej z* y wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory $\varphi^\wedge x \cap \varphi^\wedge y$, $\varphi^\wedge x - \varphi^\wedge y$ oraz $\varphi^\wedge y - \varphi^\wedge x$ są wszystkie niepuste.

Teorię relacji opozycji stosowaliśmy w opisie opozycji językowych, na różnych poziomach języka, np.:

1. *Opozycje fonologiczne.* W rekonstrukcji logicznej koncepcji fonologicznej Księcia N.S. Trubieckiego (Trubetzkoy (1939)) podaliśmy wyraźne definicje oraz omówiliśmy niektóre własności opozycji: proporcjonalnych, izolowanych, jednowymiarowych, wielowymiarowych, jednorodnych, niejednorodnych, prostoliniowych, nieprostoliniowych, prywatywnych, gradualnych, ekwipolentnych, stałych i neutralizatywnych (Pogonowski (1995)).

2. *Opozycje leksykalne.* Relacje między jednostkami leksykonu opisywane mogą być poprzez zespoły parametrów semantycznych (zbiory deskryptorów semantycznych) — zob. np. Pogonowski (1993).

3. *Opozycje hiponimiczne.* Wspomniany w poprzedniej części artykułu układ (Hp, Hr, hpn) spełnia warunki $(*)$. Wyznacza więc szereg opozycji opartych na podrzędności znaczeniowej. Relacje te mają pewien związek z metodą znaną w semantyce pod nazwą analizy składnikowej (Lyons (1977)), a także z wynikami zawartymi w cytowanej już wyżej pracy Wille (1982). Por. Pogonowski (1991b).

4. *Opozycje syntagmatyczne.* We wspomnianym już w poprzedniej części artykułu matematycznym modelu analizy lingwistycznej opozycje syntagmatyczne polegają na różnieniu się zanalizowanych segmentów lokalnie, z dokładnością do izomorfizmu. Rodzina obiektów to dany poziom językowy (przypomnijmy: pewna rodzina struktur relacyjnych), zaś cechy tych obiektów to wszelkie ich podstruktury (ew. redukty podstruktur). Zob. np. Pogonowski (1991a).

Odnośniki bibliograficzne

Arbib, M. (1967). Tolerance Automata. *Kybernetika*, 3, 223–233.

Bednarek, A.R. (1961). *On the Mickle-Rado Theorems and Binary Relations.* PhD Thesis, State University of New York at Buffalo.

Chajda, I, Niederle, J., Zelinka, B. (1976). On existence conditions for compatible tolerances. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 26 (101), 304–311.

Chajda, I., Zelinka, B. (1977). Lattices of tolerances. *Časopis pro pěstováni matematiky*, 102, 10–24.

Dal Cin, M. (1973). Fault-tolerance and stability of fuzzy-state automata. *Lecture Notes in Computer Science 2*, 1. Fachtagung über Automatentheorie und Formale Sprachen. Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag, 36–44.

Fischer, W.L. (1973). *Äquivalenz- und Toleranzstrukturen in der Linguistik.* München: Max Hueber Verlag.

Hjelmslev, L. (1953). *Prolegomena to a Theory of Language.* Madison: The University of Wisconsin Press.

Husakov, V.I., Jakubowicz, S.M. (1974). Sootwietstwie Galua i niekotoryje tieoremy o priedstawlienji binarnych otnoszenij. *Nauczno-tiechniczeskaja informacija*, seria 2, 7, 3–6.

Jakubowicz, S.M. (1968). Aksjomaticzeskaja tieorija schodstwa. *Nauczno-tiechniczeskaja informacija*, seria 2, 10, 15–19.

Lyons, J. (1977). *Semantics.* Cambridge: Cambridge University Press.

Pawlak, Z. (1983). *Systemy informacyjne. Podstawy teoretyczne.* Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.

Pogonowski, J. (1980). Topology and semantics. *Lingua Posnaniensis*, XXII, 75–85.

Pogonowski, J. (1981). *Tolerance spaces with applications to linguistics.* Poznań: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza.

Pogonowski, J. (1985). A contribution to the theory of linguistic oppositions. *Lingua Posnaniensis*, XXVIII, 117–135.

Pogonowski, J. (1991a). *Hierarchiczne analizy języka.* Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.

Pogonowski, J. (1991b). *Hiponimia.* Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.

Pogonowski, J. (1993). *Linguistic oppositions.* Poznań: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza.

Pogonowski, J. (1995). Trzy drobiazgi fonologiczne. *Investigationes Linguisticae*, I, 7–54.

Poston, T. (1971). *Fuzzy Geometry.* PhD Thesis, University of Warwick.

Semeniuk, M. (1969). Omonimia i tolerantnost. *Nauczno-tiechniczeskaja informacija*, seria 2, 11, 33–34.

Szrejder, J.A. (1968). Matiematiczeskaja modiel tieorii klassifikacji. *Nauczno-tiechniczeskaja informacija*, seria 2, 10, 7–14.

Szrejder, J.A. (1970). Prostranstwa tolerantnosti. *Kibernetika*, 2, 124–128.

Szrejder, J.A. (1975). *Równość, podobieństwo, porządek.* Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.

Trubetzkoy, N.S. (1939). *Grundzüge der Phonologie.* Prague: Travaux du Cercle Linguistique de Prague, 7.

Wille, R. (1982). Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts. W: I. Rival (ed.) *Ordered sets.* Dordrecht-Boston: Reidel.

Zeeman, E.C. (1962). The Topology of the Brain and Visual Perception. W: M.K. Fort (ed.) *Topology of 3-Manifolds and Related Topics.* Englewood Cliffs, NJ, 240–256.

Zelinka, B. (1970). Tolerance in algebraic structures. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 20 (95), 179–183.