

METODY DOWODZENIA TWIERDZEŃ I AUTOMATYZACJA ROZUMOWAŃ

KONWERSATORIUM 5: TABLICE ANALITYCZNE

V rok kognitywistyki UAM

1 Reguły

1.1 KRZ

Reguły rozszerzania tablic analitycznych dla formuł bez kwantyfikatorów (dla języka KRZ) zapisanych w notacji Smullyana są następujące:

$$\frac{\neg\neg\psi}{\psi} \qquad \frac{\neg\top}{\perp} \qquad \frac{\neg\perp}{\top}$$

$$\begin{array}{c} \alpha \\ | \\ \alpha_1 \\ | \\ \alpha_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \beta \\ \swarrow \quad \searrow \\ \beta_1 \quad \beta_2 \end{array}$$

Ćwiczenie. Zapisz reguły dla α -formuł oraz β -formuł w przypadku poszczególnych funktorów prawdziwościowych oraz ich negacji.

Przypominamy tabelę składników formuł, zapisanych w jednolitej notacji:

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$\varphi \wedge \psi$	φ	ψ	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\varphi \vee \psi$	φ	ψ
$\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	φ	$\neg\psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg\varphi$	ψ
$\neg(\varphi \leftarrow \psi)$	$\neg\varphi$	ψ	$\varphi \leftarrow \psi$	φ	$\neg\psi$
$\neg(\varphi \uparrow \psi)$	φ	ψ	$\varphi \uparrow \psi$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$\varphi \downarrow \psi$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\neg(\varphi \downarrow \psi)$	φ	ψ
$\varphi \leftrightarrow \psi$	φ	$\neg\psi$	$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$	$\neg\varphi$	ψ
$\varphi \nleftrightarrow \psi$	$\neg\varphi$	ψ	$\neg(\varphi \nleftrightarrow \psi)$	φ	$\neg\psi$

1.2 KRP

W przypadku języków pierwszego rzędu, dodajemy następujące reguły rozszerzenia tablic analitycznych (w notacji Smullyana):

$$\begin{array}{c} \gamma \\ | \\ \gamma(t) \end{array} \quad (\text{dla dowolnego termu zamkniętego języka } L^{\text{par}})$$

$$\begin{array}{c} \delta \\ | \\ \delta(a) \end{array} \quad (\text{dla dowolnego nowego parametru } a)$$

Przypominamy jednolitą notację dla formuł z kwantyfikatorami:

γ	$\gamma(t)$	δ	$\delta(t)$
$\forall x\varphi$	$\varphi(x/t)$	$\exists x\varphi$	$\varphi(x/t)$
$\neg\exists x\varphi$	$\neg\varphi(x/t)$	$\neg\forall x\varphi$	$\neg\varphi(x/t)$

2 Wskazówki heurystyczne

Propozycja notacji podana została na wykładzie. Jeśli budzi jakieś wątpliwości, proszę pytać. Rozważane dalej przykłady powinny być pomocne w rozumieniu tej notacji oraz sprawnym posługiwaniu się nią.

Kolejność kroków budowania tablicy: (o ile to możliwe, to) najpierw reguły nierozgałęziające, potem rozgałęziające.

Oszczędzanie niepotrzebnej pracy: jeśli uzyskałaś na którejś gałęzi budowanej tablicy analitycznej parę formuł wzajem sprzecznych (lub \perp), to *zamknij tę gałąź*.

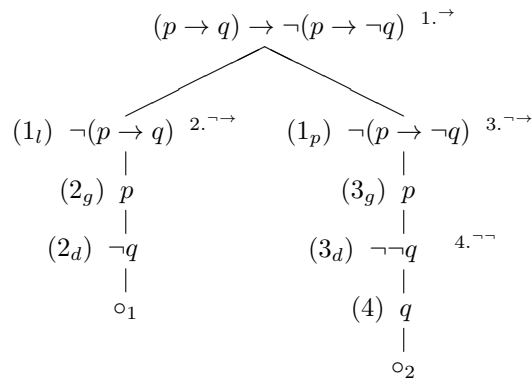
3 Dowody tablicowe

3.1 W KRZ

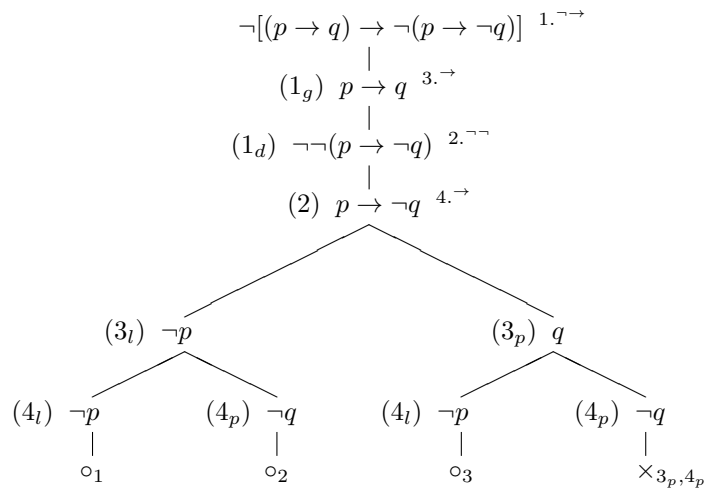
1. Zbudujemy tablice analityczne:

1. dla formuły $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$ oraz
2. dla zaprzeczenia tej formuły, tj. dla formuły $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q))$.

Tablica analityczna dla $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$:



Tablica analityczna dla $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q))$:

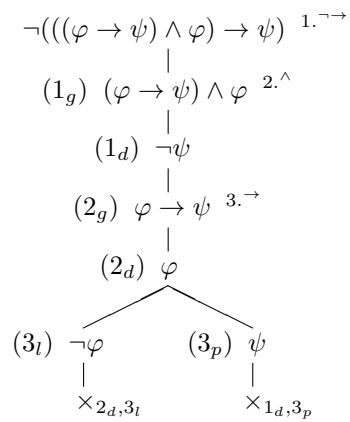


Żadna z tych tablic nie jest, jak widać, sprzeczna (zamknięta).

2. Zbudujemy dowód tablicowy prawa *modus ponendo ponens*:

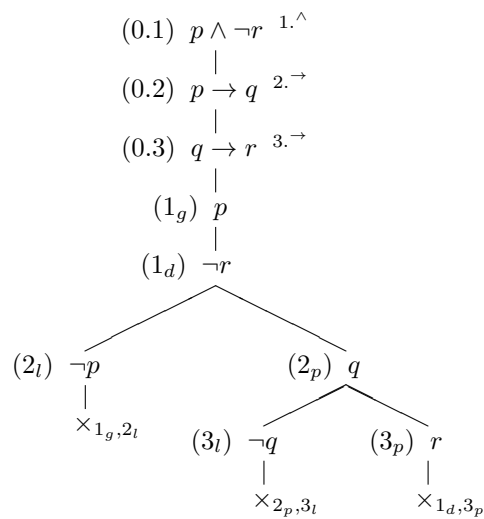
$$((\varphi \rightarrow \psi) \wedge \varphi) \rightarrow \psi$$

Konstruujemy zatem tablicę, w której korzeniu umieszczamy zaprzeczenie formuły $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge \varphi) \rightarrow \psi$:



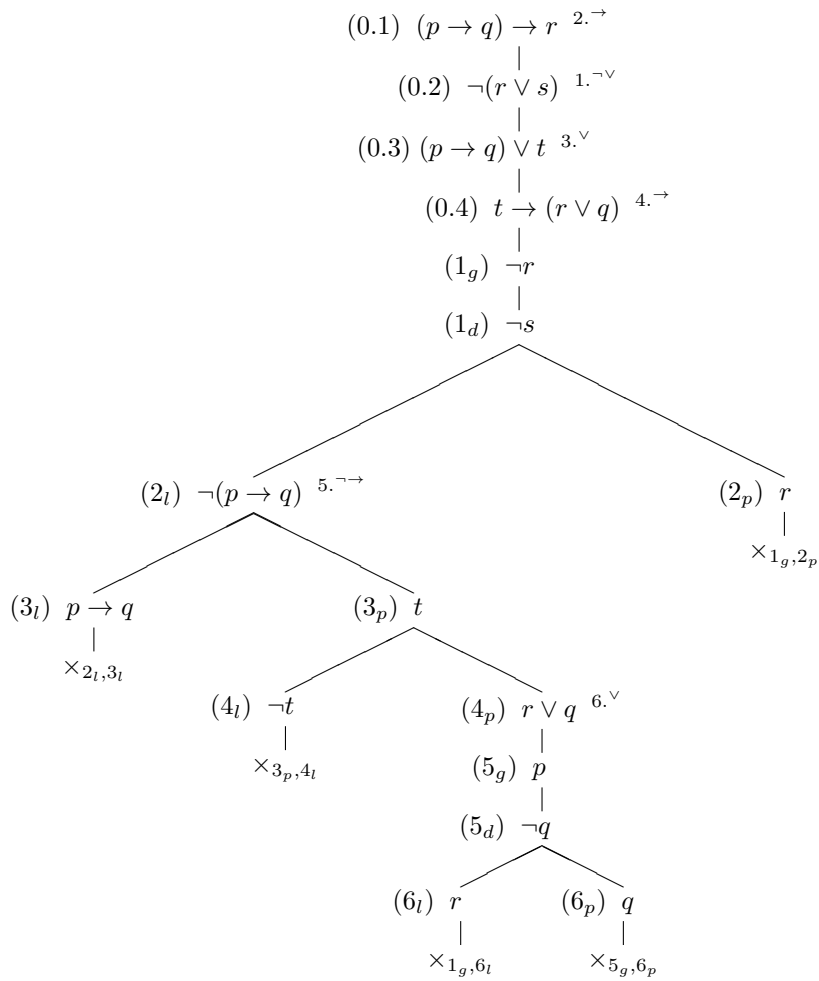
Tablica jest sprzeczna, a więc $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge \varphi) \rightarrow \psi$ jest tezą tablicową.
3. Zbudujemy tablicę analityczną dla zbioru:

$$S = \{p \wedge \neg r, p \rightarrow q, q \rightarrow r\}.$$



4. Zbudujemy tablicę analityczną dla zbioru:

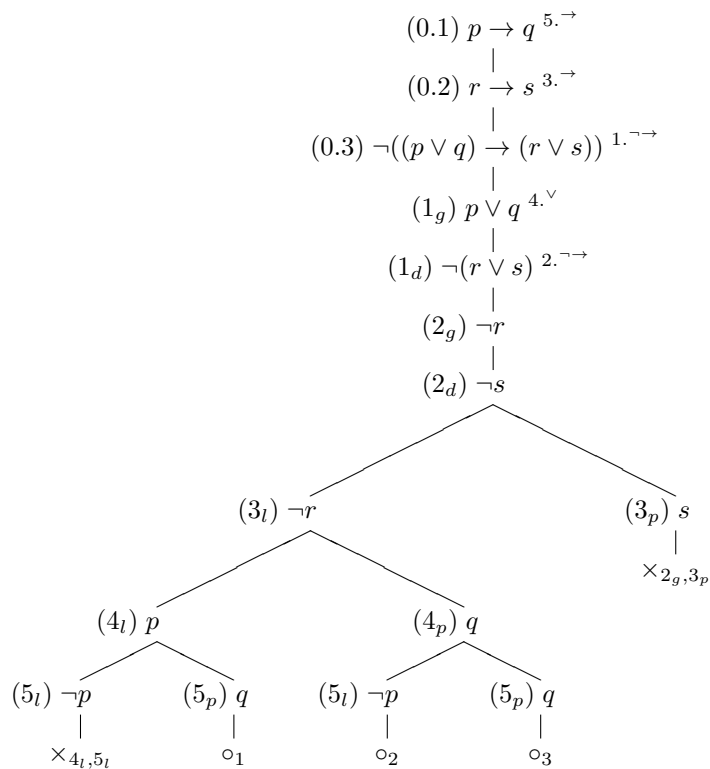
$$S = \{ (p \rightarrow q) \rightarrow r, \neg(r \vee s), (p \rightarrow q) \vee t, t \rightarrow (r \vee q) \}.$$



5. Ustalimy czy wniosek wynika tablicowo z przesłanek:

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \end{array}}{(p \vee q) \rightarrow (r \vee s)}$$

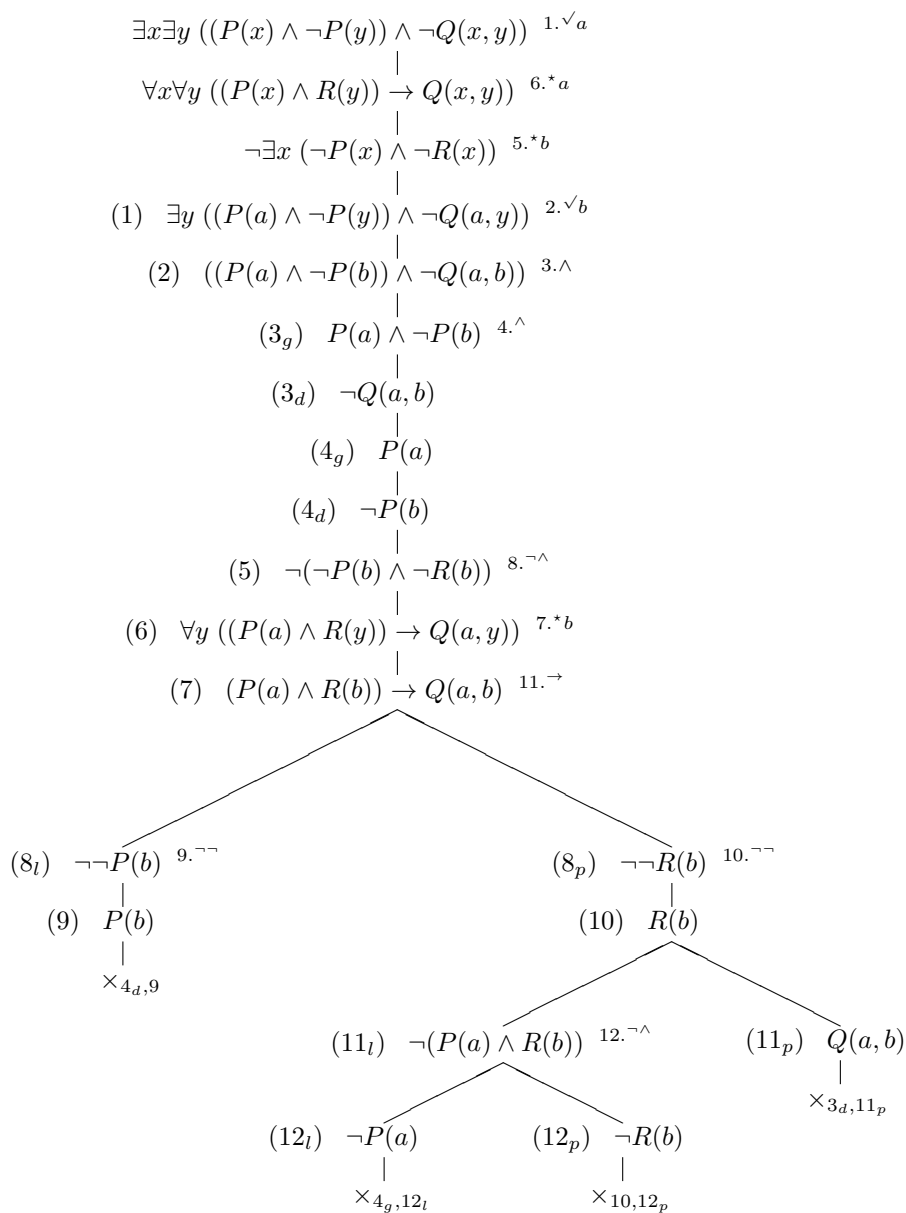
Budujemy zatem tablicę analityczną, rozpoczynając ją od przesłanek oraz zaprzeczonego wniosku:



Tablica nie jest zamknięta, a więc wniosek nie wynika tablicowo z przesłanek.

3.2 W logice pierwszego rzędu

1. Zbudujemy tablicę analityczną dla zbioru zdań: $\{ \exists x \exists y ((P(x) \wedge \neg P(y)) \wedge \neg Q(x, y)), \forall x \forall y ((P(x) \wedge R(y)) \rightarrow Q(x, y)), \neg \exists x (\neg P(x) \wedge \neg R(x)) \}$.



Zauważmy, że (na mocy prawa De Morgana) $\neg \exists x (\neg P(x) \wedge \neg R(x))$ jest równoważne zdaniu $\forall x (P(x) \vee R(x))$.

Niech predykat P będzie dumnie interpretowany jako własność *bycia Polakiem*, R jako własność *bycia obcokrajowcem*, zaś $Q(x, y)$ interpretujemy jako *x szydzi z y*. Otrzymujemy wtedy następujące brednie:

Pewien Polak nie szydzi z co najmniej jednego Niepolaka. Każdy Polak szydzi ze wszystkich obcokrajowców. Nikt nie jest jednocześnie Niepolakiem oraz nieobcokrajowcem.

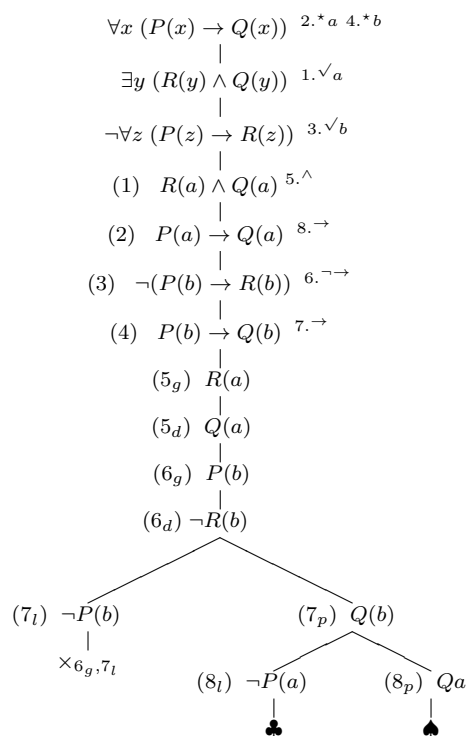
Po zastosowaniu prawa De Morgana do ostatniego z tych zdań otrzymujemy zgrabniejszy stylistycznie, ale w dalszym ciągu sprzeczny tekst:

Pewien Polak nie szydzi z kogoś, kto Polakiem nie jest. Wszyscy Polacy szydzą z każdego obcokrajowca. Każdy jest Polakiem lub obcokrajowcem.

2. Ustalimy czy wniosek wynika tablicowo z przesłanek:

$$\frac{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \quad \exists y (R(y) \wedge Q(y))}{\forall z (P(z) \rightarrow R(z))}$$

Budujemy zatem tablicę analityczną, rozpoczynając ją od przesłanek oraz zaprzeczonego wniosku:



Tablica nie jest zamknięta, a zatem wniosek nie wynika tablicowo z przesłanek. Otwarte gałęzie tablicy pozwalają zbudować modele, w których prawdziwe są przesłanki, a fałszywy jest wniosek:

♣	P	Q	R
a	–	+	+
b	+	+	–

♠	P	Q	R
a	?	+	+
b	+	+	–

Ta notacja powinna być oczywista, dla przykładu:

1. Znak + na przecięciu kolumny dla P oraz wiersza dla b w drugiej z tych tabel oznacza, że na gałęzi ♠ znajduje się zdanie atomowe $P(b)$.
2. Znak – na przecięciu kolumny dla R oraz wiersza dla b w drugiej z tych tabel oznacza, że na gałęzi ♠ znajduje się zdanie atomowe $\neg R(b)$.
3. Znak ? na przecięciu kolumny dla P oraz wiersza dla a w drugiej z tych tabel oznacza, że na gałęzi ♠ nie ma ani zdania atomowego $P(a)$ ani zdania atomowego $\neg P(a)$.

Zauważmy ponadto, że pierwsza przesłanka jest formułą typu γ , a więc należało zastosować do niej stosowną regułę zarówno dla stałej a , jak i dla stałej b .

3. Ostatni walczyk w Międzyzdrojach. Czy z przesłanek:

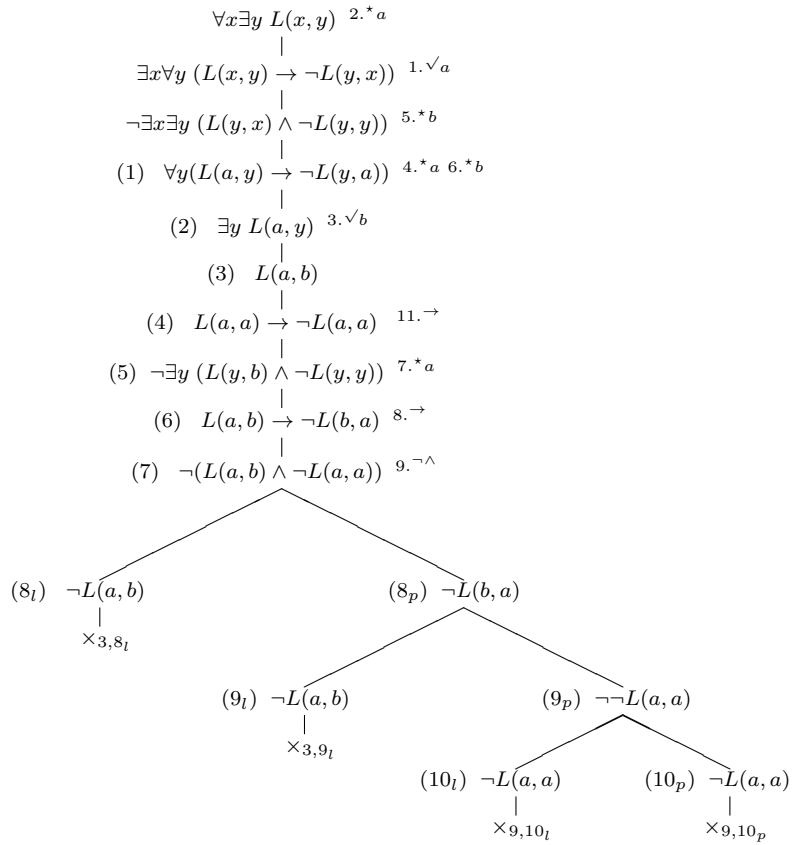
Każdy kogoś lubi. Niektórzy lubią tylko tych, którzy ich nie lubią.

wynika tablicowo wniosek: *Ktoś jest lubiany przez niesamoluba.?*

Znajdujemy strukturę składniową przesłanek i wniosku. Występuje tu tylko jeden predykat: czytamy $L(x, y)$ jako x lubi y . Wtedy oczywiście $L(x, x)$ czytamy: x lubi siebie (przyjmijmy, że jest to równoznaczne z x jest samolubem). Badane wnioskowanie przebiega według następującego schematu:

$$\frac{\forall x \exists y L(x, y) \quad \exists x \forall y (L(x, y) \rightarrow \neg L(y, x))}{\exists x \exists y (L(y, x) \wedge \neg L(y, y))}$$

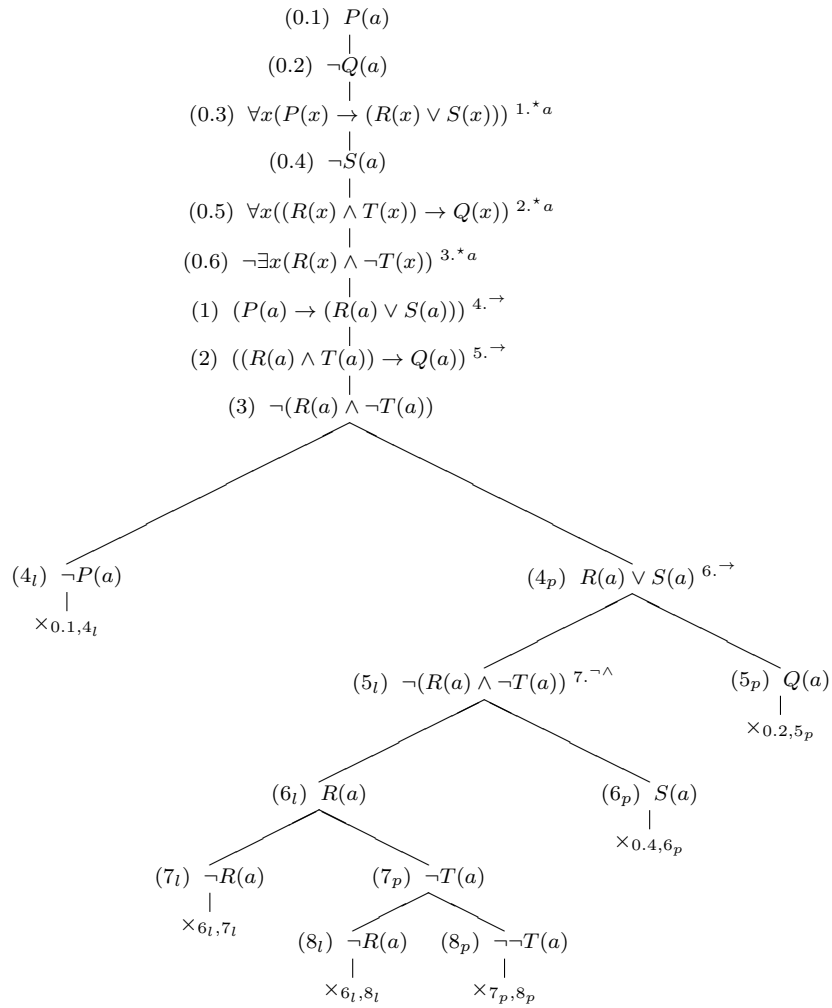
Budujemy zatem tablicę analityczną, rozpoczynając ją od przesłanek oraz zaprzeczonego wniosku:



Tablica jest zamknięta, a zatem wniosek wynika tablicowo z przesłanek.

4. Zbudujemy tablicę analityczną dla zbioru formuł:

$$\{P(a), \neg Q(a), \forall x(P(x) \rightarrow (R(x) \vee S(x))), \neg S(a), \\
\forall x((R(x) \wedge T(x)) \rightarrow Q(x)), \neg \exists x(R(x) \wedge \neg T(x))\}.$$



Tablica zamknięta. Zauważmy, że ponieważ w zdaniach naszego zbioru występowała stała a , więc należało dla niej zastosować regułę dla wszystkich γ -formuł w tablicy.

5. Spróbujemy zbudować tablicę analityczną dla zbioru zdań:

$$\{ \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x \exists y(R(y) \wedge S(y, x)), \forall x((R(x) \wedge Q(x)) \rightarrow T(x)), \\
\forall x \forall y((T(y) \wedge S(y, x)) \rightarrow T(x)), \neg \forall x \forall y((\neg P(y) \rightarrow \neg S(x, y)) \rightarrow T(x)) \}.$$

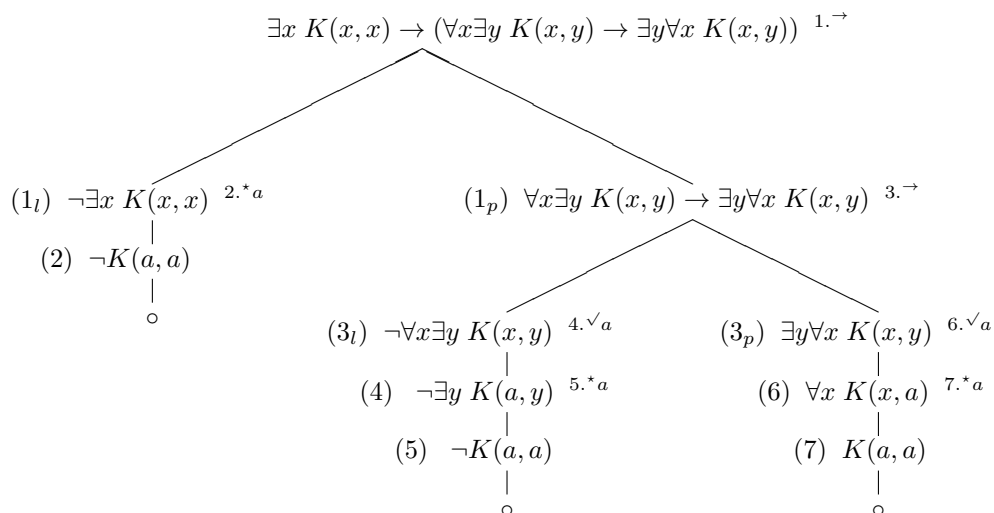
$$\begin{array}{c}
\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \quad 4.^*a \ 5.^*b \\
| \\
\forall x \exists y (R(y) \wedge S(y, x)) \quad 6.^*a \ 7.^*b \\
| \\
\forall x ((R(x) \wedge Q(x)) \rightarrow T(x)) \quad 8.^*a \ 9.^*b \\
| \\
\forall x \forall y ((T(y) \wedge S(y, x)) \rightarrow T(x)) \quad 10.^*a \ 11.^*b \\
| \\
\neg(\forall x \forall y ((\neg P(y) \rightarrow \neg S(x, y)) \rightarrow T(x))) \quad 1.^{\checkmark}a \\
| \\
(1) \neg \forall y ((\neg P(y) \rightarrow \neg S(a, y)) \rightarrow T(a)) \quad 2.^{\checkmark}b \\
| \\
(2) \neg((\neg P(b) \rightarrow \neg S(a, b)) \rightarrow T(a)) \quad 3.^{\neg \rightarrow} \\
| \\
(3_g) \neg P(b) \rightarrow \neg S(a, b) \\
| \\
(3_d) \neg T(a) \\
| \\
(4) P(a) \rightarrow Q(a) \\
| \\
(5) P(b) \rightarrow Q(b) \\
| \\
(6) \exists y (R(y) \wedge S(y, a)) \\
| \\
(7) \exists y (R(y) \wedge S(y, b)) \\
| \\
(8) (R(a) \wedge Q(a)) \rightarrow T(a) \\
| \\
(9) (R(b) \wedge Q(b)) \rightarrow T(b) \\
| \\
(10) \forall y ((T(a) \wedge S(y, a)) \rightarrow T(a)) \quad 12.^*a \ 13.^*b \\
| \\
(11) \forall y ((T(y) \wedge S(y, b)) \rightarrow T(b)) \quad 14.^*a \ 15.^*b \\
| \\
(12) (T(a) \wedge S(a, a)) \rightarrow T(a) \\
| \\
(13) (T(a) \wedge S(b, a)) \rightarrow T(a) \\
| \\
(14) (T(y) \wedge S(a, b)) \rightarrow T(b) \\
| \\
(15) (T(y) \wedge S(b, b)) \rightarrow T(b) \\
| \\
\vdots
\end{array}$$

Wykonaliśmy wszystkie kroki dotyczące γ -formuł oraz stałych a i b . Jest wiadoczne, że druga formuła zmusza do wprowadzania coraz to nowych stałych (tak, jak ma to miejsce w formułach (6) oraz (7) powyżej). W konsekwencji, nie można zakończyć budowy tablicy analitycznej w tym przypadku.

6. Lawina miłości. Jak się wydaje (przyjmując, że pasywizacja w języku naturalnym odpowiada braniu konwersu relacji), strukturze składniowej zdania *O ile choćby jeden osobnik jest zakochany sam w sobie, to jeśli każdy kogoś kocha, to ktoś jest kochany przez wszystkich* odpowiada następujące zdanie języka KRP:

$$(\star) \quad \exists x xK(x, x) \rightarrow (\forall x \exists y K(x, y) \rightarrow \exists y \forall x K(x, y))$$

Spróbujemy zbudować tablice analityczne: dla zdania (★) oraz dla jego zaprzeczenia. Najpierw tablica dla (★):



Zauważmy, że w lewej gałęzi tablicy nie mieliśmy do dyspozycji δ -formuły, pozwalającej wprowadzić nową stałą. W takiej sytuacji wprowadzamy nową stałą na mocy reguły dla γ -formuł. Otrzymana tablica nie jest zamknięta, a więc jej gałęzie otwarte (akurat wszystkie są otwarte) są spełnialne.

Zauważmy również, że możemy wprowadzać tę samą stałą dla δ -formuł, znajdujących się na różnych gałęziach (można też zawsze używać różnych stałych na poszczególnych gałęziach).

Teraz spróbujemy zbudować tablicę analityczną dla negacji zdania (★):

$$\begin{array}{c}
\neg(\exists x K(x, x) \rightarrow (\forall x \exists y K(x, y) \rightarrow \exists y \forall x K(x, y))) \quad 1. \neg \rightarrow \\
| \\
(1_g) \exists x K(x, x) \quad 3. \checkmark a_1 \\
| \\
(1_d) \neg(\forall x \exists y K(x, y) \rightarrow \exists y \forall x K(x, y)) \quad 2. \neg \rightarrow \\
| \\
(2_g) \forall x \exists y K(x, y) \quad 4. * a_1 \quad 8. * a_2 \quad 10. * a_3 \\
| \\
(2_d) \neg \exists y \forall x K(x, y) \quad 5. * a_1 \quad 9. * a_2 \quad 11. * a_3 \\
| \\
(3) K(a_1, a_1) \\
| \\
(4) \exists y K(a_1, y) \quad 6. \checkmark a_2 \\
| \\
(5) \neg \forall x K(x, a_1) \quad 7. \checkmark a_3 \\
| \\
(6) K(a_1, a_2) \\
| \\
(7) \neg K(a_3, a_1) \\
| \\
(8) \exists y K(a_2, y) \quad 12. \checkmark a_4 \\
| \\
(9) \neg \forall x K(x, a_2) \quad 13. \checkmark a_5 \\
| \\
(10) \exists y K(a_3, y) \quad 14. \checkmark a_6 \\
| \\
(11) \neg \forall x K(x, a_3) \quad 15. \checkmark a_7 \\
| \\
\vdots
\end{array}$$

Nie można zakończyć budowy tej tablicy. W ten oto sposób jeden samolub uruchomił potężną (nieskończoną!) lawinę miłości. Czy potrafisz napisać *wzór na miłość* ukryty w tej konstrukcji? Mówiąc poważnie: czy potrafisz wskazać model, w którym prawdziwa byłaby negacja zdania (★)?

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
http://logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
pogon@amu.edu.pl

Wybrane pozycje bibliograficzne

- Annelis, I.A. 1990. From Semantic Tableaux to Smullyan Trees: A History of the Development of the Falsifiability Tree Method. *Modern Logic* **1**, 36–69.
- Bell, J.L., Machover, M. 1977. *A Course in Mathematical Logic*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam New York Oxford.
- Beth, E.W. 1955. *Semantic Entailment and Formal Derivability*. Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van wetenschappen, afd. letterkunde, new series, vol. **18**, no. **13**, Amsterdam.
- Fitting, M. 1990. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving*. Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo Hong Kong.
- Gentzen, G. 1935. Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift* **39**, 176–210, 405–431.
- Georgacarakos, G.N., Smith, R. 1979. *Elementary Formal Logic*. McGraw-Hill Book Company.
- Handbook of Automated Reasoning*. 2001. A. Robinson, A. Voronkov (eds.), Elsevier, Amsterdam London New York Oxford Paris Shannon Tokyo, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Handbook of Tableau Methods*. 1999. Edited by: D'Agostino, M., Gabbay, D.M., Hähnle, R., Posegga, J., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.
- Hintikka, J. 1955. Form and Content in Quantification Theory. *Acta Philosophica Fennica* **8**, 7–55.
- Hodges, W. 1977. *Logic*. Pelican Books.
- Howson, C. 1997. *Logic with trees*. Routledge, London and New York.
- Jeffrey, R. 1991. *Formal Logic: Its Scope and Limits*. McGraw-Hill, New York.
- Kleene, S.C. 1967. *Mathematical Logic*. John Wiley & Sons, Inc. New York London Sydney.
- Kripke, S. 1959. A Completeness Theorem in Modal Logic. *Journal of Symbolic Logic* **24**, 1–14.

- Lis, Z. 1960. Wynikanie semantyczne a wynikanie formalne. *Studia Logica* **X**, 39–60.
- Marciszewski, W., Murawski, R. 1995. *Mechanization of Reasoning in a Historical Perspective*. Rodopi, Amsterdam – Atlanta.
- Nerode, A., Shore, R.A. 1997. *Logic for Applications*. Graduate Texts in Computer Science, Springer.
- Pawlak, Z. 1965. *Automatyczne dowodzenie twierdzeń*. Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa (seria: *Biblioteczka Matematyczna*, **19**).
- Porębska, M., Suchoń, W. 1991. *Elementarne wprowadzenie w logikę formalną*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Priest, G. 2001. *An Introduction to Non-Classical Logic*. Cambridge University Press.
- Quine, W.V. 1955. A proof procedure for quantification theory. *The Journal of Symbolic Logic* Volume **20**, Number **2**, 191–149.
- Rasiowa, H., Sikorski, R. 1960. On the Gentzen Theorem. *Fundamenta Mathematicae* **48**, 58–69.
- Rasiowa, H., Sikorski, R. 1963. *The Mathematics of Metamathematics*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Smullyan, R. 1968. *First-Order Logic*. Springer Verlag, Berlin.
- Schütte, K. 1956. Ein System des verknüpfenden Schliessens. *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschungen* **2**, 56–67.
- Wang, H. 1960. Toward Mechanical Mathematics. *IBM Journal Research and Development* **4**, 2–22.