R O Z D Z I A Ł IV

Gramatyki kontekstowe

Przypomnijmy, że gramatykami kontekstowymi (lub równoważnie typu 1) nazywamy te wszystkie gramatyki generatywne $G = <V_N, V_T, S, F>$, których wszystkie reguły produkcji mają postać $Q_1AQ_2 \rightarrow Q_1PQ_2$, gdzie $Q_1, Q_2 \in (V_N \cup V_T)^*$, $A \in V_N$, a $P \in (V_N \cup V_T)^* \setminus \{\lambda\}$, bądź też $S \rightarrow \lambda$, ale wówczas S nie występuje po prawej stronie reguł produkcji.

1. Monotoniczność gramatyk

Gramatykę typu 0 (tj. struktur frazowych) nazywamy m o n o t o n i c z n ą witw, gdy dla każdej reguły produkcji $\ulcorner P \rightarrow Q \urcorner \in F$ mamy $|P| \leq |Q|$, tj. gdy w każdej z jej reguł produkcji jej następnik jest nie krótszy od poprzednika. Zauważmy, że (ze względu na kształt reguł produkcji) monotonicznymi wprost z definicji są wszystkie λ-wolne gramatyki kontekstowe (oraz jako ich szczególne postacie λ-wolne gramatyki bezkontentekstowe i regularne). O tym, że wyczerpują one wszystkie gramatyki kontekstowe mówi nam następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.1.

Każda gramatyka monotoniczna generuje język kontekstowy.

Dowód.

Zgodnie z I twierdzeniem o postaci normalnej (tw. 1.2), dowolną gramatykę monotoniczną G możemy zamienić na równoważną jej gramatykę G' o postaci normalnej, w której regułach produkcji:

1) symbole terminalne mogą wystąpić jedynie w regułach produkcji postaci $A \rightarrow a$ (gdzie $A \in V_N'$, zaś $a \in V_T'$), które są monotoniczne,
2) a poza tym mogą wystąpić w niej jeszcze jedynie reguły produkcji kształtu $P \rightarrow Q$, gdzie P i Q są pewnymi ciągami nieterminałów, a $|P| \leq |Q|$ (lub równoważnie $|Q| \geq |P|$).

Z regułami postaci 2) postępujemy w następujący sposób.

Gdy $|P| = 1$, to zostawiamy je bez zmian, gdyż wówczas (ze względu na $|Q| \geq |P| = 1$) są to po prostu reguły kontekstowe z pustymi kontekstami. Niech więc $|P| \geq 2$. Wówczas są to reguły kształtu $X_1X_2...X_m \rightarrow Y_1Y_2...Y_n$, gdzie $2 \leq m \leq n$, a $X_1, X_2, ..., X_m, Y_1, Y_2, ...,Y_n$ są nieterminałami. Każdą z nich można zastąpić zbiorem następujących reguł kontekstowych (podkreśleniem dodatkowo zaznaczono w nich rdzeń, a niepodkreślonymi pozostały jedynie konteksty wyrażeń):

$$\left.\begin{array}{l}
\underline{X_1}\ X_2 \dots X_m \to \underline{Z_1}\ X_2 \dots X_m \\
Z_1\ \underline{X_2}\ X_3 \dots X_m \to Z_1\ \underline{Z_2}\ X_3 \dots X_m \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
Z_1 \dots Z_{m-1}\ \underline{X_m} \to Z_1 \dots Z_{m-1}\ \underline{Z_m}
\end{array}\right\} \text{reguły dające zamianę poszczególnych X-ów na odpowiadające im Z-y}$$

$$Z_1 \dots Z_{m-1}\ \underline{Z_m} \to Z_1 \dots Z_{m-1}\ \underline{Y_m \dots Y_n} \quad \text{- zamiana ostatniego Z-a na ciąg pozostałych Y-ów}$$

$$\left.\begin{array}{l}
Z_1 \dots \underline{Z_{m-1}}\ Y_m \dots Y_n \to Z_1 \dots Z_{m-2}\ \underline{Y_{m-1}}\ Y_m \dots Y_n \\
Z_1 \dots \underline{Z_{m-2}}\ Y_{m-1} \dots Y_n \to Z_1 \dots Z_{m-3}\ \underline{Y_{m-2}}\ Y_{m-1} \dots Y_n \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\underline{Z_1}\ Y_2 \dots Y_n \to \underline{Y_1} \dots Y_n
\end{array}\right\} \text{reguły zamiany pozostałych Z-ów na odpowiadające im Y-i}$$

gdzie wszystkie Z_i są nowymi nieterminałami. Tak otrzymana gramatyka jest kontekstowa, a zatem generuje język kontekstowy. □

Wniosek. $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1$.

Dowód.

W przykładzie 1.5 podaliśmy, że gramatyka G = <{a, b, c}, {S, X, Y}, S, F> o zbiorze reguł produkcji

F = {S → abc, S → aXbc, Xb → bX, Xc → Ybc, bY → Yb, aY → aaX, aY → aa}

generuje język $L(G) = \{a^n\, b^n\, c^n : n \geq 1\}$.

Język ten jest językiem kontekstowym (z poprzedniego twierdzenia), a z drugiej strony nie jest językiem bezkontekstowym (z twierdzenia o pompowaniu). Tak więc (chociażby) dzięki temu językowi zachodzi właściwe zawieranie się klas języków z dowodzonego wniosku. □

W tym momencie mamy więc już wykazane, że $\mathcal{L}_3 \subset \mathrm{Lin} \subseteq \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0$.

Twierdzenie 4.2 (Chomsky'ego).

Dla dowolnej gramatyki kontekstowej G, problem „$P \in L(G)$” jest rozstrzygalny.

Dowód.

Ponieważ G jest gramatyką kontekstową, więc wszystkie jej reguły produkcji są monotoniczne (z wyjątkiem reguły $S \to \lambda$, o ile należy ona do F).

Stosujemy następującą procedurę rozstrzygającą:

1. gdy $P = \lambda$, to $P \in L(G)$ witw, gdy $\ulcorner S \to \lambda \urcorner \in F$,
2. gdy $P \neq \lambda$, to $P \in V_T^+$ i postępujemy jak poniżej.

Bierzemy wszystkie możliwe ciągi słów utworzonych nad sumą alfabetów $V_N \cup V_T$ takie, że:

- pierwszym słowem jest w nich S, a ostatnim P,
- słowa ustawione są w nich w kolejności zgodnej z ich długością.

Takich ciągów jest skończona ilość (bo tylko skończona może być ilość słów o długości co najwyżej $|P|$ tworzonych nad skończonym alfabetem $V_N \cup V_T$). Sprawdzamy, czy któryś z nich reprezentuje pewną derywację słowa P w gramatyce G. Jeśli tak jest, to $P \in L(G)$, a w przeciwnym przypadku $P \notin L(G)$. □

Uwaga. Dla gramatyk typu 0 problem ten jest nierozstrzygalny. □

2. Postać normalna Kurody

Mówimy, że gramatyka monotoniczna jest *postaci normalnej Kurody*, gdy każda z jej reguł produkcji ma jedną z czterech następujących postaci:

1) $A \to a$,
2) $A \to B$,
3) $A \to BC$,
4) $AB \to CD$,

gdzie $a \in V_T$, zaś $A, B, C, D \in V_N$.

Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.3.

Dla każdej λ-wolnej gramatyki kontekstowej istnieje równoważna jej gramatyka kontekstowa w postaci normalnej Kurody.

Dowód.

Z I twierdzenia o postaci normalnej każdą (a więc również λ-wolną) gramatykę kontekstową G możemy zamienić na równoważną jej gramatykę G' o postaci normalnej, w której regułach produkcji F' symbole terminalne mogą wystąpić jedynie w regułach produkcji postaci $A \to a$, gdzie A jest nieterminałem, zaś a jest terminałem. Są to reguły 1) kształtu z definicji postaci normalnej Kurody gramatyki kontekstowej.

Poza tym, w G' mogą wystąpić jeszcze jedynie reguły produkcji kształtu $P \to Q$, gdzie P i Q są pewnymi ciągami nieterminałów. Oczywiście, $|P| \leq |Q|$ (bo G' jako λ-wolna gramatyka kontekstowa jest gramatyką monotoniczną).

Rozpatrzmy poszczególne przypadki:

1) Gdy $|P| = 1$ i $|Q| = 1$, to reguły te pozostawiamy (są to bowiem reguły kształtu 2) z definicji gramatyki kontekstowej w postaci normalnej Kurody).
2) Gdy $|P| = 1$, a $|Q| \geq 2$, to postępujemy identycznie, jak w dowodzie twierdzenia o postaci normalnej Chomsky'ego. W wyniku zastosowanej tam procedury, każdą z reguł tej postaci możemy zamienić na ciąg reguł postaci $A \to BC$, gdzie A, B, C są pewnymi nieterminałami.

3) Gdy $|P| = 2$ i $|Q| = 2$, to je pozostawiamy (są to bowiem reguły kształtu 4) z definicji gramatyki kontekstowej w postaci normalnej Kurody).
4) Pozostał nam jeszcze przypadek, gdy $|P| \geq 2$ i $|Q| > 2$. Każdą z reguł tej postaci zastępujemy zbiorem reguł typu 4 i 3 z definicji gramatyki kontekstowej w postaci normalnej Kurody. Zatem, gdy $P = X_1 X_2 \ldots X_m$, a $Q = Y_1 Y_2 \ldots Y_n$ (gdzie $2 \leq m \leq n$, $2 < n$ /w przeciwnym przypadku mamy omówiony już przypadek 3)/, a $X_1, X_2, \ldots, X_m, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \in V_N'$), to regułę $X_1 X_2 \ldots X_m \to Y_1 Y_2 \ldots Y_n$ zastępujemy zbiorem reguł postaci:

a) $X_1 X_2 \to Y_1 Z_2$

$Z_2 X_3 \to Y_2 Z_3$

....

$Z_{m-1} X_m \to Y_{m-1} Z_m$

(są to reguły typu 4 z definicji gramatyki kontekstowej w postaci normalnej Kurody; po ich zastosowaniu otrzymamy: $X_1 \ldots X_m \to Y_1 \ldots Y_{m-1} Z_m$) oraz:

b) $Z_m \to Y_m Z_{m+1}$

$Z_{m+1} \to Y_{m+1} Z_{m+2}$

....

$Z_{n-1} \to Y_{n-1} Y_n$

(są to reguły typu 3 z definicji gramatyki kontekstowej w postaci normalnej Kurody; po ich zastosowaniu otrzymamy dalej: $Y_1 \ldots Y_{m-1} Z_m \to Y_1 \ldots Y_n$).

Występujące tu symbole $Z_2, \ldots, Z_{n-2}$ są nowymi nieterminałami.

Tak otrzymana gramatyka G'' czyni zadość tezie twierdzenia. □

Bezpośrednio z powyższego twierdzenia otrzymujemy następujący wniosek:

Wniosek.

Każdy λ-wolny język kontekstowy jest generowany przez pewną gramatykę postaci normalnej Kurody. □

Uwaga.

Jak się okazuje, każdą z reguł postaci 4) (tj. kształtu $AB \to CD$, gdzie A, B, C, D są

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} AB \to AB' \\ AB' \to A'B' \\ A'B' \to A'D \\ A'D \to CD \end{array} \right.$$

pewnymi nieterminałami) możemy zamienić na cztery reguły kontekstowe:

gdzie A' i B' są nowymi symbolami nieterminalnymi. □