MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

WYKŁAD 1: RACHUNEK ZBIORÓW

KOGNITYWISTYKA UAM, 2016–2017

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Ile i jakiej matematyki potrzebuje kognitywistyka?

O przedmiocie kognitywistyki słuchacze dowiedzą się na zajęciach ze *Wstępu do kognitywistyki*. Nauki kognitywne dotyczą możliwości poznawczych człowieka. Aby je opisać, badać i rozumieć potrzebna jest wiedza z wielu dyscyplin, m.in.: biologii, psychologii, logiki, lingwistyki, matematyki. Niezbędna jest również pewna erudycja filozoficzna, zwłaszcza w zakresie epistemologii.

Niniejszy kurs ma charakter usługowy. Nie jest to zatem wykład (określonych działów) matematyki, ale jedynie przegląd wybranych pojęć, twierdzeń, technik, metod, których znajomość jest nieodzowna w refleksji nad ludzkim poznaniem.

Podajmy przykładowe – niewyszukanie proste w swojej ogólności – pytania, które dotyczą procesów poznawczych:

1. *Ile czegoś jest?* Ile jest neuronów w mózgu? Ile jest połączeń między tymi neuronami? Ilu rzeczy mogę jednocześnie doświadczać?

2. *Jak duże (małe) coś jest?* Jak małe stworzenia potrafię zobaczyć?

3. *Czy jedno zależy od drugiego?* Jak moja percepcja zależy od wypalanego zioła? Jak wynik bitwy zależy od wznoszonych przed nią modlitw?

4. *Jak złożone coś jest?* Czy mózg jest zbudowany z niezależnych modułów?

5. *Czy jedno jest podobne do drugiego?* Czy rozwój mózgu człowieka podobny jest do modyfikacji sieci neuronowej?

6. *Jak coś zmienia się?* Jak zmieni się moje odczucie temperatury w każdej z rąk, gdy uprzednio jedną trzymałem w zimnej, a jedną w ciepłej wodzie?

7. *Czy występuje jakaś regularność?* Czy notowania akcji na giełdzie można opisać wzorem zależnym od z góry zadanych parametrów?

To nie są oczywiście pytania czysto *matematyczne*. Jednak próby odpowiedzi na nie *zawsze* wymagają stosownej matematycznej aparatury pojęciowej.

W trakcie wykładu poznamy matematyczne aspekty takich podstawowych dla kognitywistyki pojęć (wiążących się z odpowiedziami na powyższe pytania), jak np.:

1. *Liczba, ilość, miara*.
2. *Zależność, stosunek, relacja*.
3. *Zmienność, stałość*.
4. *Podobieństwo, nieodróżnialność*.
5. *Regularność, wzorzec*.
6. *Struktura, złożoność*.
7. *Odległość, bliskość*.
8. *Kształt, położenie*.

Zakładamy, że słuchacze dysponują pewną elementarną wiedzą wyniesioną ze szkoły:

1. *Umiejętności arytmetyczne*. Tabliczki dodawania i mnożenia. Znajomość elementarnych funkcji liczbowych.
2. *Umiejętność rozwiązywania prostych równań i nierówności*. Równania i nierówności pierwszego i drugiego stopnia.
3. *Znajomość elementarnych wzorów dotyczących obliczania długości, pól oraz objętości*. Oczywiście można powiedzieć: po co je znać, skoro można je znaleźć w sieci. Kaktus ich nie zna, a żyje. Cóż, nie jesteśmy cywilizacją kaktusów.

Można oczywiście pytać, czy wiedza matematyczna wyniesiona ze szkoły wystarcza dla prowadzenia badań i refleksji kognitywistycznych. Odpowiedź jest zwięzła i brzmi: *nie wystarcza*. Słuchacze przekonają się o tym już na pierwszym roku studiów. Dodamy jeszcze, że w naszym przekonaniu matematyka jest najbardziej humanistyczną z nauk, co będziemy się starali wykazywać na każdym wykładzie.

W trakcie tego wykładu będziemy wykonywać pewne standardowe w matematyce czynności, do których należą, m.in.:

1. *Abstrahowanie*. Rozwój nowoczesnej nauki byłby niemożliwy bez zabiegów idealizacyjnych (Arystoteles brnął w rozważania jakościowe, Galileusz docierał do praw natury). Rozwiązując dany problem, zwykle pomijamy wiele nieistotnych czynników, *abstrahujemy* od nich.

2. *Uogólnianie*. Ten proces widoczny jest np. w rozszerzaniu rozumienia pojęcia *liczby*. Obejmowano zakresem tego pojęcia coraz to nowe rodzaje liczb: od naturalnych i dodatnich wymiernych przez całkowite, rzeczywiste, zespolone, aż do innych jeszcze ich rodzajów.

3. *Definiowanie*. Warunkiem koniecznym efektywnej komunikacji jest używanie terminów w ustalonym znaczeniu. Wszystkie pojęcia matematyczne są (albo traktowane jako pierwotne albo) wprowadzane na drodze ścisłych, jednoznacznych definicji.

4. *Dowodzenie*. To bodaj najbardziej podstawowa czynność w matematyce. Przyjmuje się pewne założenia, z których *wyprowadza się*, za pomocą z góry wyraźnie określonych metod, różnorakie wnioski. Owe wnioski *wynikają logicznie* z czynionych założeń.

5. *Klasyfikowanie*. Nie jest jedynie czynnością wprowadzającą określony porządek w badanej klasie obiektów. Przez klasyfikowanie tworzymy nowe, bardziej abstrakcyjne *typy* obiektów.

6. *Szukanie sprzeczności*. Tak jak w poezji *brak cienia jest dowodem nieistnienia*, tak w matematyce i logice wystąpienie sprzeczności jest dowodem nieistnienia. Ta analogia jest oczywiście żartem. Sprzeczność to śmierć logiczna. Nie istnieją obiekty sprzeczne.

7. *Budowanie kontrprzykładów*. Kontrprzykłady znajduje się w różnych celach, np. dla ukazania, że przyjmowane założenie jest jedynie wystarczające, ale nie konieczne dla otrzymanego wniosku.

8. *Notacja*. Gdybyśmy posiadali zdolność telepatii, to mówienie i pisanie byłoby może zbędne. Przekazujemy informacje zawsze w jakimś języku. W przypadku matematyki jest to specyficzna mieszanina języka etnicznego oraz przyjętych konwencjonalnie symboli o precyzyjnie ustalonym znaczeniu. Notacja matematyczna służy do mówienia o obiektach matematycznych, ale nie jest z nimi tożsama: np. *liczby* są obiektami matematycznymi, które możemy *reprezentować* w określonej notacji (np. dziesiętnej lub dwójkowej).

Również kurs *Wprowadzenia do logiki* dostarczy słuchaczom informacji na temat wymienionych wyżej czynności oraz ich wytworów.

Jest oczywiste, że niniejszy kurs stanowi jedynie skromny wstęp do matematyki. Współczesna matematyka ma ponad trzy tysiące działów. Tutaj wybieramy tylko niektóre drobne fragmenty z niektórych z nich. Może warto wspomnieć, że będziemy zajmować się następującymi rodzajami struktur:

1. *Struktury algebraiczne*: związane z operacjami wykonywanymi na obiektach.

2. *Struktury porządkowe*: związane z ustalaniem poprzedzania jednych obiektów przez inne.

3. *Struktury topologiczne*: związane m.in. z bliskością, odległością, kształtem, ciągłością.

4. *Struktury różniczkowe*: związane m.in. z rodzajami i tempem zmian.

Nauczanie matematyki w szkole podlega pewnym naturalnym ograniczeniom. Po pierwsze, musi być dostosowane do poziomu rozwoju intelektualnego uczniów, co jest całkiem zrozumiałe. Po drugie, omawiany materiał musi zmieścić się w ograniczonych ramach czasowych i na to też niewiele można poradzić, chyba że uzyska się dodatkowy czas, likwidując niepotrzebne lekcje religii.

Uniwersyteckie nauczanie matematyki dysponuje większą swobodą. Zakłada się bowiem, że student jest potencjalnie zdolny do przyswojenia sobie, a nawet zrozumienia, o wiele bardziej abstrakcyjnych pojęć niż te, które omawiane są w szkole. Docenia się kreatywność studentów, będącą wynikiem ich samodzielnych dociekań.

Chcielibyśmy, aby słuchacze tego wykładu rozumieli matematykę jako:

1. *Naukę o wzorcach*. Początki matematyki biorą się z reprezentacji (wybranych aspektów) świata. Konstruowanie takich reprezentacji pozwala ujawnić występujące w nich wzorce – swoiste regularności. Wzorce mogą być numeryczno-arytmetyczne (związane z ustalaniem stałości liczebności kolekcji), algebraiczne (związane z własnościami działań na obiektach, symetrie), porządkowe (związane z rozmieszczeniem obiektów względem danych relacji), mogą dotyczyć kształtu, przestrzeni, pozycji, odległości (konstrukcje geometryczne, topologiczne), mogą dotyczyć ruchu i zmiany (pojęcia analizy matematycznej, geometrii i topologii różniczkowej), mogą wreszcie dotyczyć samych rozumowań matematycznych (pojęcia logiki matematycznej), obliczalności (pojęcia teorii rekursji oraz różnych działów informatyki), częstości (rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna), itd.

2. *Naukę o rozwiązywaniu problemów*. Praktyka badawcza matematyki obejmuje wiele typów działalności. Przede wszystkim, jest to dowodzenie twierdzeń. Inne typy tej działalności to, m.in.: uogólnianie, abstrahowanie, tworzenie pojęć, stawianie hipotez, przedstawianie nowych (lepszych, prostszych, bardziej eleganckich) dowodów już znanych twierdzeń, wyobrażanie sobie, szukanie kontrprzykładów, przeprowadzanie rozumowań przez analogię (prowadzących np. do rozważania nowych dziedzin matematycznych), rozpatrywanie szczególnych przypadków, klasyfikowanie, szukanie nowych aksjomatów, sięganie po motywacje płynące z nauk empirycznych, poszukiwanie nowych punktów widzenia, przeprowadzanie (niekiedy żmudnych) rachunków, myślenie przekorne, itd. Na początku każdego z takich działań mamy do czynienia z problemem poznawczym. W jego rozwiązaniu korzystamy dostępnych, sprawdzonych już w działaniu metod, ale także z tworzonych na nowo heurystyk.

Wspomnieliśmy już, że niniejszy kurs ma charakter usługowy. Należy jednak również dodać, że umiejętności matematyczne, takie jak tworzenie pojęć, dowodzenie, klasyfikowanie, konstruowanie kontrprzykładów, wyobrażanie sobie, itd. są niezwykle ważnymi ludzkimi zdolnościami poznawczymi. Tworząc matematykę, lub jedynie posługując się nią w sposób kompetentny dajemy świadectwo naszemu człowieczeństwu. Wyobraźnia matematyczna to potężne narzędzie poznawcze.

Ustalenia organizacyjne

Syllabus przedmiotu umieszczony został na stronie internetowej wykładu:

http://logic.amu.edu.pl/index.php/Mpk

Na wyżej wymienionej stronie zamieszczono plik zawierający szczegółowe omówienie planu wykładu. Tamże zamieszczać będziemy też odnośniki do wybranych miejsc w sieci, które z korzyścią dla rozumienia wykładu można odwiedzić.

Plan wykładów

Planujemy następujące tematy wykładów:

1. *Rachunek zbiorów*.
2. *Rachunek relacji*.
3. *Funkcje*.

4. *Kombinatoryka i ciągi liczbowe.*
5. *Struktury porządkowe.*
6. *Struktury algebraiczne.*
7. *Struktury topologiczne.*
8. *Granice i ciągłość.*
9. *Różniczkowanie.*
10. *Wybrane twierdzenia rachunku różniczkowego.*
11. *Całkowanie.*
12. *Miara i prawdopodobieństwo.*
13. *Algorytmy.*
14. *Powtórka: przygotowanie do egzaminu.*

Tematy 12 oraz 13 omawiane są w bardziej rozwiniętej formie na zajęciach *Metody statystyczne* oraz *Podstawy algorytmiki*.

Ustalenia dodatkowe

1. Wykład kończy się egzaminem pisemnym. Zakres egzaminu (przykładowe pytania egzaminacyjne) zostanie wyraźnie podany przed rozpoczęciem sesji zimowej. Zgodnie z zaleceniem koordynatora tego modułu kształcenia, przewiduje się następującą skalę ocen z egzaminu:
   - do 50% maksymalnej puli punktów: ndst
   - do 60% maksymalnej puli punktów: dst
   - do 70% maksymalnej puli punktów: dst+
   - do 78% maksymalnej puli punktów: db
   - do 85% maksymalnej puli punktów: db+
   - powyżej 85% maksymalnej puli punktów: bdb
2. Wykład stanowi całość wraz z konwersatorium, prowadzonym w tym roku akademickim przez Panią dr Dorotę Leszczyńską-Jasion oraz Pana mgra inż. Andrzeja Gajdę. Zasady zaliczenia konwersatorium podadzą prowadzący.
3. Materiały dydaktyczne będą systematycznie udostępniane na stronie internetowej wykładu.

Zalecana literatura

1. Graham, R.L., Knuth, D.E., Patashnik, O. 2002. *Matematyka konkretna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

2. Musielak, H., Musielak, J. 2004. *Analiza matematyczna*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

3. Rasiowa, H. 1968. *Wstęp do matematyki współczesnej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

4. Reinhardt, F., Soeder, H. 2003. *Atlas matematyki*. Prószyński i S-ka, Warszawa.

Prowadzący konwersatorium podadzą słuchaczom dodatkowe pozycje, zawierające zadania.

RACHUNEK ZBIORÓW

1 Metody tworzenia zbiorów

Teoria zbiorów, zwana też po polsku *teorią mnogości* (ang.: *set theory*, niem.: *Mengenlehre*) jest stosunkowo młodą teorią matematyczną. Jej początki sięgają drugiej połowy XIX wieku. Za twórcę teorii mnogości uważany jest Georg Cantor. Pierwsze ujęcie aksjomatyczne tej teorii podał Ernst Zermelo.

Teoria mnogości jest obecnie uznawana za niezwykle ważną m.in. dlatego, że w ramach jej formalizmu można ująć całość praktyki matematycznej. Stanowi więc ona jednolite podstawy dla matematyki współczesnej.

Teoria mnogości ma dwa *pojęcia pierwotne*, czyli takie, których się nie definiuje, a jedynie charakteryzuje przez przyjmowane w teorii *aksjomaty*. Są to pojęcia: *zbioru* oraz relacji *bycia elementem* lub inaczej *należenia* (elementu do zbioru).

Zbiory rozumiemy w sensie *dystrybutywnym*, jako całości złożone z pewnych elementów. Elementy zbioru nie są jego częściami. Każdy zbiór jest wyznaczony przez ogół tworzących go elementów, przy czym ujęcie tych elementów w jedną całość abstrahuje od jakości tych elementów oraz ich uporządkowania. Operację tworzenia zbiorów możemy iterować, a więc tworzyć zbiory, których elementami są inne zbiory.

Jeśli przedmiot x jest *elementem* zbioru X, to piszemy $x \in X$. W przeciwnym przypadku piszemy $x \notin X$. Jeśli $x \in X$, to mówimy, że x *należy* do X. Jeśli $x \notin X$, to mówimy, że x *nie należy* do X.

UWAGA. To, że często używamy zmiennych pisanych małymi literami po lewej, a dużymi po prawej stronie znaku $\in$ ma podobno stanowić ułatwienie. W teorii mnogości mówimy jedynie o zbiorach. Zbiory mogą być elementami innych zbiorów. Ze względów teoretycznych wystarczy więc jeden rodzaj zmiennych, używanych dla oznaczania zbiorów. Można więc pisać np.: $x \in y$, $X \in Y$, itp. Jak zobaczymy później, dla żadnego zbioru x nie zachodzi zależność $x \in x$ (czyli żaden zbiór nie jest swoim własnym elementem).

Dwie proste metody tworzenia zbiorów to:

1. Wyliczenie w sposób wyraźny wszystkich elementów zbioru.
2. Podanie własności, która przysługuje wszystkim elementom zebranym w jeden zbiór.

Zbiór złożony z przedmiotów $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oznaczamy przez $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Kolejność wyliczenia elementów zbioru nie ma znaczenia.

PRZYKŁADY.

1. Zbiór złożony z elementów $\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$ oraz $\spadesuit$ to zbiór $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$.

2. Zbiór złożony z elementów 1, 2, 3 to zbiór $\{1, 2, 3\}$. To ten sam zbiór co zbiór $\{2, 3, 1\}$.

3. Jeśli obetniemy Pogonowskiemu wszystkie palce lewej ręki, to możemy zebrać je w zbiór: { odrąbany mały palec, odrąbany serdeczny palec, odrąbany środkowy palec, odrąbany wskazujący palec, odrąbany kciuk }.

$\square$

Przypuśćmy, że podana została własność W, która przysługuje pewnym przedmiotom. Chcemy utworzyć obiekt abstrakcyjny – zbiór tych wszystkich przedmiotów, którym przysługuje własność W. Zbiór ten chcemy oznaczać przez:

$$\{x : x \text{ ma własność } W\}.$$

Tak więc, dla przykładu: $\{1, 2, 3\}$ to zbiór $\{x : x = 1 \text{ lub } x = 2 \text{ lub } x = 3\}$. Trzeba jednak zachować pewną ostrożność, gdyż przy rozważaniu całkiem *dowolnych* własności można wpaść w pułapkę sprzeczności. Własność „nie być swoim elementem" jest przykładem takiej właśnie niebezpiecznej własności. Zobaczmy:

1. Niech $z = \{x : x \notin x\}$.

2. Pytamy: czy $z \in z$? Jeśli tak, to z powinien spełniać warunek definicyjny, czyli powinno być: $z \notin z$.

3. Pytamy: czy $z \notin z$? Jeśli tak, to z powinien spełniać zaprzeczenie warunku definicyjnego, czyli powinno być tak, że nie zachodzi $z \notin z$. Skoro tak (podwójna negacja), to $z \in z$.

4. Otrzymaliśmy więc kłopotliwy wynik: jednocześnie $z \in z$ oraz $z \notin z$.

5. Oznacza to, że własność „nie być swoim elementem" nie nadaje się na własność definiującą dobrze określony zbiór.

Unikamy pułapek tego rodzaju, precyzując z góry *uniwersum*, z którego wyróżniamy zbiory przedmiotów, mających pewne własności.

Niech U będzie zbiorem. *Zbiór* (wszystkich) elementów zbioru U, które spełniają warunek $\varphi(x)$ oznaczamy przez $\{x \in U : \varphi(x)\}$. Warunek $\varphi(x)$ określa więc jakąś własność przedmiotów, będących elementami zbioru U, która pozwala wyodrębnić z U ogół przedmiotów mających tę własność. Warunki definiujące zbiory

są sformułowane w stosownym języku formalnym – więcej na ten temat powiemy później.
PRZYKŁADY.

1. Niech $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

   Wtedy $\{x \in U : x$ jest liczbą parzystą$\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

2. Niech U będzie zbiorem wszystkich Polaków. Czy potrafisz wskazać elementy zbioru $\{x \in U : x$ jest martwym (6x2016) laureatem Nagrody Nobla$\}$?

3. Niech U będzie zbiorem wszystkich Polaków. Czy potrafisz wskazać elementy zbioru $\{x \in U : x$ jest (6x2016) urzędującym Prezydentem RP$\}$?

$\square$

UWAGA. W matematycznej teorii mnogości mówimy jedynie o zbiorach. To, czy istnieją jakiekolwiek indywidua, jakiekolwiek obiekty fizyczne, jest dla tej teorii nieistotne. To, czy wszystkie obiekty matematyczne są zbiorami jest problemem filozofii matematyki i nie możemy tego tutaj rozstrzygać. Nie chcemy jednak pozbawiać się możliwości *stosowania* formalizmu teorii mnogości w odniesieniu do świata fizycznego, doświadczenia potocznego, konstrukcji pojęciowych w ogólności. Tak więc, zgadzamy się na to, aby mówić o zbiorach, których elementami są obiekty fizyczne. Wtedy taki zbiór jest już jednak obiektem abstrakcyjnym. Jak ujął to jeden z wybitnych polskich filozofów, zbiór lwów nie jest lwem – zbiory nie ryczą. Należy być świadomym, że w przypadku zbiorów, których elementami są obiekty fizyczne mogą wystąpić trudności z precyzyjnym ustaleniem inwentarza tych elementów. Co mamy na myśli, mówiąc o *zbiorze wszystkich Polaków*? Wszystkich obywateli Rzeczpospolitej Polskiej? Wszystkich dzisiaj żyjących takich obywateli? Wszystkie osoby pochodzenia polskiego rozproszone na całej planecie? Wszystkich kiedykolwiek żyjących Polaków? Czy wreszcie, przekraczając granice ponurej groteski, wszystkich *Prawdziwych Polaków*? Tego typu trudności nie są jednak trudnościami samej teorii mnogości, lecz uwarunkowane są możliwościami aplikacyjnymi (oraz ich ograniczeniami) teorii formalnych, o czym więcej dowiedzą się słuchacze na zajęciach z filozofii. W ciągu dalszych wykładów będziemy rozważać przede wszystkim zbiory obiektów matematycznych, unikając tego typu trudności.

Będziemy czasem stosowali zapis $\{x : \varphi(x)\}$, gdy uniwersum rozważań jest oczywiste, znane z kontekstu.

Zbiór X jest *identyczny* ze zbiorem Y wtedy i tylko wtedy, gdy X oraz Y posiadają dokładnie te same elementy. Piszemy wtedy $X = Y$. W przeciwnym przypadku piszemy $X \neq Y$. Zwróćmy uwagę na pewną trudność natury czysto

językowej: mówimy, że *dwa* zbiory są *jednym i tym samym* zbiorem, co dla niektórych brzmieć może paradoksalnie. Nie popadamy przy tym jednak w żadną kolizję natury logicznej.
PRZYKŁADY.

1. Niech Z będzie zbiorem wszystkich zwierząt. Następujące dwa zbiory są identyczne (czyli są jednym i tym samym zbiorem):

   (a) $\{x \in Z : x \text{ ma serce}\}$

   (b) $\{x \in Z : x \text{ ma nerki}\}$.

2. Zbiór $\{a, b, a\}$ jest identyczny ze zbiorem $\{a, b\}$.

3. $A = B$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

   (a) dla każdego x, jeśli $x \in A$, to $x \in B$ oraz

   (b) dla każdego x, jeśli $x \in B$, to $x \in A$.

$\square$

Elementami zbiorów mogą być zbiory. Zamiast „zbiór zbiorów" mówimy też „rodzina zbiorów".
PRZYKŁADY.

1. $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ jest rodziną zbiorów.

2. $\{\{1\}, \{\{1\}\}\}$ jest rodziną zbiorów.

3. $\{\{x : x \text{ jest Polakiem}\}, \{x : x \text{ jest Niemcem}\}, \{x : x \text{ jest Rosjaninem}\}, \{x : x \text{ jest Ukraińcem}\}\}$ jest rodziną zbiorów.

$\square$

Zbiór $\{x, y\}$ nazywamy *parą nieuporządkowaną* złożoną z x oraz y. Zauważmy, że $\{x, y\}$ jest tym samym zbiorem co zbiór $\{y, x\}$.

Niech (x, y) oznacza zbiór $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Wtedy (x, y) nazywamy *parą uporządkowaną* o elemencie pierwszym x oraz elemencie drugim y. Innym często używanym oznaczeniem pary uporządkowanej o elemencie pierwszym x oraz elemencie drugim y jest: $\langle x, y\rangle$.
PRZYKŁADY.

1. $(2^3, 7) = (8, 7)$.

2. $(\text{Jerzy}, \text{ Urban}) \neq (\text{Urban}, \text{ Jerzy})$.

3. (Jerzy, Jeż) $\neq$ (Jeż, Jerzy).

4. $(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$.

$\square$

Przyjęcie takiej definicji umożliwia łatwy dowód tego, że: $(x, y) = (u, v)$ dokładnie wtedy, gdy $x = u$ oraz $y = v$. Zachodzi mianowicie:
TWIERDZENIE. Dla dowolnych x, y, u, v: $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = u$ oraz $y = v$.
DOWÓD. Aby dowieść tej równoważności, musimy pokazać, że:

1. Jeśli $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$, to $x = u$ oraz $y = v$.

2. Jeśli $x = u$ oraz $y = v$, to $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$.

Drugi z tych warunków jest oczywisty. Dla dowodu pierwszego z nich, załóżmy, że zachodzi $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$. Musimy pokazać, że wtedy $x = u$ oraz $y = v$. Rozważyć należy dwa przypadki:

1. *Przypadek 1.* $x = y$. Wtedy $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x\}\}$. Z tego wynika, że $\{u, v\} \in \{\{x\}\}$, a więc $u = v = x = y$.

2. *Przypadek 2.* $x \neq y$. Mamy: $\{u\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Ponieważ $x \neq y$, więc $\{u\} \neq \{x, y\}$. A zatem $\{u\} = \{x\}$, czyli $u = x$. Dalej, mamy: $\{x, y\} \in \{\{u\}, \{u, v\}\}$. Ponieważ $x \neq y$, więc $\{x, y\} = \{u, v\}$. Skoro $x \neq y$ oraz $u = x$, to $y = v$.

$\square$

UWAGA. W powyższym zapisie dowodu pominięto pewne kroki, które są oczywiste: wynikają z definicji identyczności zbiorów.

Zbiór X jest *zawarty* w zbiorze Y, gdy każdy element zbioru X jest elementem zbioru Y. Piszemy wtedy $X \subseteq Y$ i mówimy, że X jest *podzbiorem* Y. Jeśli $X \subseteq Y$ oraz $X \neq Y$, to piszemy $X \subset Y$ i mówimy, że X jest *podzbiorem właściwym* Y. Relację $\subseteq$ nazywamy *inkluzją*, a $\subset$ *inkluzją właściwą*. Oczywiście zbiór X nie jest podzbiorem zbioru Y dokładnie wtedy, gdy co najmniej jeden element zbioru Y nie jest elementem zbioru X.

Zbiór pusty $\emptyset$ to zbiór, który nie ma żadnego elementu.

Zbiór złożony z jednego tylko elementu nazywamy *singletonem*.

PRZYKŁADY.

1. Zbiór wszystkich liczb parzystych jest zawarty w zbiorze wszystkich liczb naturalnych.

2. Zbiór pusty jest zawarty w każdym zbiorze.
3. Zbiór $\{1,2,3\}$ nie jest zawarty w zbiorze $\{1,2\}$.
4. Zbiór wszystkich liczb naturalnych, które są jednocześnie parzyste i nieparzyste jest zbiorem pustym.
5. Zbiorem pustym jest zbiór wszystkich rozwiązań rzeczywistych równania $x^2+1=0$.
6. $\emptyset = \{x : x \neq x\}$.
7. Niech U będzie zbiorem wszystkich Polaków. Zbiór

   $\{x \in U : x$ jest obecnie (2016) urzędującym Prezydentem RP$\}$

   jest singletonem. Czy potrafisz wskazać jego jedyny element?
8. Zbiór $\{\emptyset\}$ jest singletonem. Jego jedynym elementem jest zbiór pusty $\emptyset$.

$\square$

Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X oznaczamy przez $\wp(X)$ (czasami także przez: 2^X). Zbiór $\wp(X)$ nazywamy *zbiorem potęgowym* zbioru X.
PRZYKŁADY.

1. $\wp(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.
2. $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
3. $\wp(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$.

$\square$

2 Kilka ważnych zbiorów liczbowych

W szkole omawiano różne rodzaje liczb. W kilku pierwszych wykładach będziemy zakładali, że słuchaczom wystarcza skromna intuicyjna wiedza o wybranych rodzajach liczb. Precyzyjne definicje wymienionych niżej zbiorów liczb zostaną podane nieco później:

1. Zbiór $\mathbb{N}$ wszystkich liczb naturalnych.
2. Zbiór $\mathbb{Z}$ wszystkich liczb całkowitych.
3. Zbiór $\mathbb{Q}$ wszystkich liczb wymiernych.

4. Zbiór $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych.
5. Zbiór $\mathbb{C}$ wszystkich liczb zespolonych.
6. Zbiór $\mathbb{A}$ wszystkich liczb algebraicznych.
7. Zbiór $\mathbb{P}$ wszystkich liczb pierwszych.

Nieco intuicyjnych wiadomości o tych zbiorach podano w pliku *Plan wykładów*. W trakcie całego kursu będziemy bardzo często korzystali z tych zbiorów oraz z ich podzbiorów (np. przedziałów w zbiorze liczb rzeczywistych).

Wymienione wyżej zbiory są wszystkie zbiorami *nieskończonymi*. Precyzyjną definicję tego, co rozumiemy przez zbiór nieskończony podamy na trzecim wykładzie.

3 Operacje na zbiorach

Na zbiorach możemy wykonywać różne operacje, uzyskując w wyniku inne zbiory.

Niech X oraz Y będą podzbiorami uniwersum U. Definiujemy operacje:

1. $X \cap Y = \{x \in U : x \in X \text{ oraz } x \in Y\}$
   (*przekrój (iloczyn, część wspólna)* X *i* Y)
2. $X \cup Y = \{x \in U : x \in X \text{ lub } x \in Y\}$
   (*suma* X *i* Y)
3. $X - Y = \{x \in U : x \in X \text{ oraz } x \notin Y\}$
   (*różnica* X *i* Y; inne oznaczenie: $X \setminus Y$)
4. $X' = \{x \in U : x \notin X\}$
   (*dopełnienie* X; inne oznaczenie: $-X$)
5. $X \div Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$
   (*różnica symetryczna* X *i* Y)
6. $X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ oraz } x \in Y\}$
   (*produkt (iloczyn) kartezjański* X *i* Y).

Jeśli $X \cap Y = \emptyset$, to mówimy, że zbiory X oraz Y są *rozłączne*. Rozłączne są np. zbiory: $\{1, 2, 3\}$ oraz $\{4, 5, 6\}$. Nie są rozłączne np. zbiory: $\{1, 2, 3\}$ oraz $\{3, 4, 5, 6\}$

PRZYKŁADY. Niech $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz $Y = \{1, 3, 5, 7\}$ będą podzbiorami uniwersum $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Wtedy:

1. $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
2. $X \cap Y = \{1, 3, 5\}$
3. $X - Y = \{2, 4\}$
4. $Y - X = \{7\}$
5. $X' = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} = U - X$
6. $Y' = \{2, 4, 6, 8, 9\} = U - Y$
7. $X \div Y = \{2, 4, 7\} = Y \div X$

□

PRZYKŁAD. Niech:

1. $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
2. $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Wtedy $X \times Y$ jest zbiorem wszystkich par (x, y) takich, że x jest jednym z elementów zbioru $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, zaś y jest jednym z elementów zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Ile jest takich par?

□

Niech I będzie zbiorem, a $\mathbf{A} = \{A_i : i \in I\}$ rodziną zbiorów (podzbiorów ustalonego uniwersum U).

1. $\bigcup \mathbf{A} = \bigcup\limits_{i \in I} A_i = \{x \in U : x \in A_i$ dla co najmniej jednego $i \in I\}$

   (*suma rodziny* $\mathbf{A}$)

2. $\bigcap \mathbf{A} = \bigcap\limits_{i \in I} A_i = \{x \in U : x \in A_i$ dla wszystkich $i \in I\}$

   (*przekrój (iloczyn) rodziny* $\mathbf{A}$).

Jeśli $\mathbf{A} = \{A_i : i \in I\}$, to mówimy, że rodzina $\mathbf{A}$ jest *rodziną zbiorów indeksowaną elementami zbioru* I. Najczęściej będziemy rozważali rodziny zbiorów indeksowane elementami zbioru $\mathbb{N}$ wszystkich liczb naturalnych lub elementami jakiegoś skończonego podzbioru tego zbioru.
PRZYKŁADY.

1. $\bigcup\{\{ 1\} , \{ 2\} , \{ 3\} , \{ 1,2\} ,\{ 1,3\} ,\{ 2,3\} \}= \{1, 2, 3\}$.
2. $\bigcap\{\{1, 3\}\{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} = \{3\}$.
3. $\bigcup\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset\}$.

□

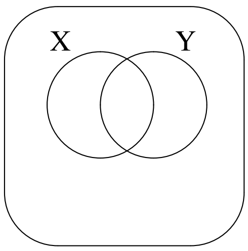
4 Wizualizacje

Jest wiele metod graficznej reprezentacji zbiorów, zależności między zbiorami oraz operacji na zbiorach. Najbardziej popularną jest metoda *diagramów Venna*.

Diagramy Venna (dla ustalonej liczby podzbiorów pewnego uniwersum) rysujemy w ten sposób, że:

1. Zaznaczamy uniwersum (np. w postaci prostokąta).
2. Wewnątrz tego prostokąta zaznaczamy wszystkie rozważane zbiory (np. w postaci, kół, elips, lub innych ładnych kształtów), w ten sposób, aby uzyskać wszystkie możliwe przecięcia (części wspólne) rozważanych figur.

Diagram Venna dla dwóch podzbiorów ustalonego uniwersum wygląda tak:

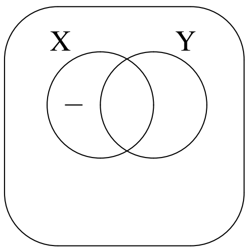


Taka reprezentacja geometryczna pozwala na interpretowanie wyników operacji sumy, iloczynu, różnicy, różnicy symetrycznej, dopełnienia:

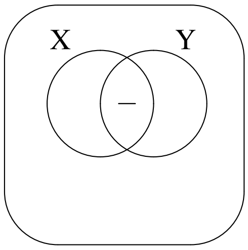
1. zbiór $X \cup Y$ jest reprezentowany przez sumę obszarów reprezentujących X oraz Y;
2. zbiór $X \cap Y$ jest reprezentowany przez część wspólną obszarów reprezentujących X oraz Y;
3. zbiór $X - Y$ jest reprezentowany przez tę część obszaru reprezentującego X, która jest poza obszarem reprezentującym Y;
4. zbiór $X \div Y$ jest reprezentowany przez sumę tych części obszarów reprezentujących X oraz Y, która leży poza częścią wspólną tych obszarów;
5. zbiór X' jest reprezentowany przez obszar dopełniający do pełnego uniwersum obszaru reprezentowanego przez X.

Dla graficznej reprezentacji operacji tworzenia produktu kartezjańskiego wykorzystuje się inne środki, o czym dowiemy się na następnym wykładzie.

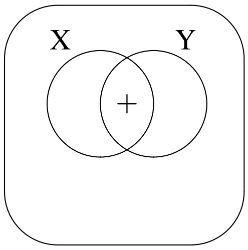
Warunki prawdziwości zdań stwierdzających zachodzenie pewnych relacji między zbiorami reprezentować można na diagramach (znak „+" stawiamy w obszarze niepustym, a „–" w obszarze pustym):



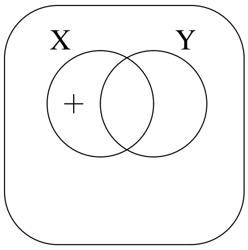
Wszystkie X są Y, czyli $X \subseteq Y$, lub, równoważnie, $X - Y = \emptyset$. Wyrażenie *Wszystkie X są Y* oznacza oczywiście, że każdy element zbioru X jest elementem zbioru Y.



Żaden X *nie jest* Y, czyli $X \cap Y = \emptyset$. Wyrażenie *Żaden* X *nie jest* Y oznacza oczywiście, że żaden element zbioru X nie jest elementem zbioru Y.

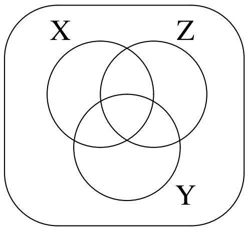


Niektóre X *są* Y, czyli $X \cap Y \neq \emptyset$. Wyrażenie *Niektóre* X *są* Y oznacza oczywiście, że co najmniej jeden element zbioru X jest elementem zbioru Y.



Nie wszystkie X *są* Y (*Pewien* X *nie jest* Y), czyli $X - Y \neq \emptyset$. Wyrażenie *Nie wszystkie* X *są* Y oznacza oczywiście, że pewien element zbioru X nie jest elementem zbioru Y.

Diagramów Venna można używać także dla zaznaczania zachodzenia pewnych relacji między dowolną liczbą zbiorów. Dla trzech zbiorów diagram Venna wygląda tak:



Jest pewien kłopot z zaznaczaniem niepustości sumy obszarów na diagramach Venna. Można przyjąć konwencję, że jeśli suma dwóch obszarów jest niepusta, to stawiamy znak „$+$" na granicy tych obszarów. Lepszym rozwiązaniem jest – w przypadku niepustości sumy obszarów – narysowanie kreseczki przecinającej granicę tych obszarów (ta metoda daje się zastosować także w przypadku więcej niż dwóch obszarów).

Warunki fałszywości podanych wyżej czterech rodzajów zdań (tak zwanych *zdań kategorycznych*) łatwo otrzymać ze wspomnianych wyżej warunków prawdziwości. Czy słuchacze widzą, jak to zrobić?

Diagramy Venna można rysować dla dowolnej liczby zbiorów, jednak przy większej ich liczbie diagramy stają się mało czytelne.

Przypuśćmy, że $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są podzbiorami uniwersum U. Wprowadźmy oznaczenia dla dowolnego zbioru $A \subseteq U$:

1. $A^0 = A$
2. $A^1 = U - A$

Składową (dla układu zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ w uniwersum U) nazywamy każdy iloczyn o postaci:

$$A_1^{j_1} \cap A_2^{j_2} \cap \ldots \cap A_n^{j_n},$$

gdzie każdy wskaźnik $j_1, j_2, \ldots, j_n$ jest bądź zerem bądź jedynką. Składowe zależą oczywiście od uniwersum U oraz rozważanych podzbiorów A_1, A_2, …, A_n uniwersum U.

Liczbę wszystkich składowych dla układu n zbiorów łatwo ustalić: jest ona równa 2^n. Czy słuchacze zechcą podać uzasadnienie?

PRZYKŁAD. Rozważmy tekst:

Co najmniej jeden uczciwy jest sympatyczny. Nie wszyscy są uczciwi. Każdy jest uczciwy lub inteligentny lub sympatyczny. Wszyscy inteligentni są uczciwi lub sympatyczni. Wszyscy uczciwi inteligentni są sympatyczni. Wszyscy sympatyczni są uczciwi lub inteligentni. Żaden uczciwy sympatyczny nie jest inteligentny.

1. Czy z poniższych przesłanek wynika logicznie jakiś wniosek dotyczący zależności między inteligentnymi a sympatycznymi?
2. Ponadto: co można powiedzieć o uczciwych, którzy nie są sympatyczni (o ile poniższe przesłanki są prawdziwe)?

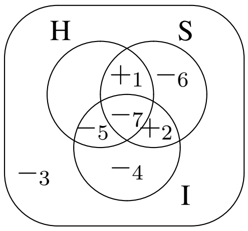
Rozważanym uniwersum jest tu domyślnie zbiór wszystkich ludzi. Wprowadźmy oznaczenia:

- H — zbiór uczciwych
- I — zbiór inteligentnych
- S — zbiór sympatycznych.

Rozważane przesłanki mają następujące schematy:

- (1) $H \cap S \neq \emptyset$
- (2) $H' \neq \emptyset$
- (3) $(H \cup I \cup S)' = \emptyset$
- (4) $I \subseteq (H \cup S)$
- (5) $(H \cap I) \subseteq S$
- (6) $S \subseteq (H \cup I)$
- (7) $I \cap (H \cap S) = \emptyset$.

Zaznaczając na diagramie Venna treść powyższych warunków, najpierw ustalamy, które obszary są puste (co stwierdzają warunki: 3, 4, 5, 6, 7), a potem, które obszary są niepuste (co stwierdzają warunki: 1 i 2):



Z powyższego diagramu widać m.in., że (przy prawdziwości przesłanek):

- *Istnieją inteligentni i sympatyczni. Wszyscy inteligentni są sympatyczni. Istnieją sympatyczni, którzy nie są inteligentni, ale są uczciwi.*
- *Jeśli ktoś jest uczciwy, ale nie jest sympatyczny, to nie jest inteligentny. Nie wiadomo jednak, czy istnieją uczciwi niesympatyczni, którzy nie są inteligentni.*

□

Inną metodą graficzną reprezentacji zależności między zbiorami są *diagramy Carrolla*. Będziemy jeszcze mieli okazję, aby je poznać.

5 Prawa rachunku zbiorów

Prawa rachunku zbiorów to twierdzenia, które zachodzą dla dowolnych zbiorów. Każde takie twierdzenie wymaga dowodu. W przypadku, gdy jest ono implikacją o poprzedniku φ oraz następniku ψ (czyli ma postać *jeśli* φ*, to* ψ), to jego dowód polega na wyprowadzeniu ψ przy założeniu φ. W przypadku, gdy twierdzenie ma postać równoważności, czyli jest postaci φ *wtedy i tylko wtedy, gdy* ψ, to dowód takiej równoważności polega na przeprowadzeniu dowodów obu implikacji: *jeśli* φ*, to* ψ oraz *jeśli* ψ*, to* φ.

Dla dowodu tego, że warunki $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ są równoważne wystarczy udowodnić wszystkie implikacje: *jeśli* φ_i*, to* φ_{i+1} (dla $1 \leqslant i < n$) oraz implikację: *jeśli* φ_n*, to* φ_1.

Dla dowodu, że implikacja *jeśli* φ*, to* ψ ***nie jest*** prawem rachunku zbiorów, wystarczy podać przykład zbiorów spełniających warunek φ, lecz nie spełniających warunku ψ.

PRZYKŁADY. Udowodnimy parę praw rachunku zbiorów (dowody dalszych praw można przeprowadzić podczas konwersatorium).

1. Pokażemy, że $x \subseteq y$ jest równoważne z $x - y = \emptyset$. Trzeba zatem udowodnić obie implikacje:

   (a) *Jeśli* $x \subseteq y$*, to* $x - y = \emptyset$.
   (b) *Jeśli* $x - y = \emptyset$*, to* $x \subseteq y$.

   Dla dowodu a) zakładamy, że $x \subseteq y$. Oznacza to, że każdy element zbioru x jest też elementem zbioru y. To jednak znaczy tyle, że nie ma w x elementów, które byłyby poza zbiorem y. To z kolei jest tym samym, co stwierdzenie, że $x - y = \emptyset$.

   Dla dowodu b) zakładamy, że $x - y = \emptyset$. Oznacza to, że nie ma w x elementów, które byłyby poza zbiorem y. To zaś jest równoznaczne ze stwierdzeniem, że każdy element zbioru x jest też elementem zbioru y, czyli że $x \subseteq y$.

2. *Jeśli* $x \subseteq y$ *oraz* $y \cap z = \emptyset$*, to* $x \cap z = \emptyset$. Załóżmy, że $x \subseteq y$ oraz $y \cap z = \emptyset$. Drugie z tych założeń oznacza, że zbiory y oraz z nie mają żadnego wspólnego elementu. Skoro, na mocy pierwszego z poczynionych założeń wszystkie elementy zbioru x znajdują się wśród elementów zbioru y, to żaden z nich nie może być elementem zbioru z. To z kolei oznacza, że $x \cap z = \emptyset$.

3. *Jeśli* $x \subseteq y$ *oraz* $x \cap z \neq \emptyset$*, to* $y \cap z \neq \emptyset$. Załóżmy, że $x \subseteq y$ oraz $x \cap z \neq \emptyset$. Z drugiego z tych założeń wynika, że istnieje element $u \in x \cap z$. Jednak skoro $u \in x \cap z$, to zarówno $u \in x$, jak i $u \in z$. Skoro $u \in x$, a każdy element zbioru x jest też elementem zbioru y (pierwsze założenie!), to również $u \in y$. Mamy więc: $u \in z$ oraz $u \in y$, a zatem $u \in y \cap z$, a to oznacza, że $y \cap z \neq \emptyset$.

$\square$

PRZYKŁADY. Pokażemy, że pewne implikacje *nie są* prawami rachunku zbiorów.

1. Implikacja: *jeśli* $x \subseteq y$*, to* $y \subseteq x$ nie jest prawem rachunku zbiorów. Jeśli np. $x = \{1, 2\}$, zaś $y = \{1, 2, 3\}$, to zachodzi poprzednik tej implikacji, a nie zachodzi jej następnik.

2. Implikacja: *jeśli* $x \in y$ *oraz* $y \in z$*, to* $x \in z$ nie jest prawem rachunku zbiorów. Można bowiem zbudować zbiory x, y oraz z takie, że $x \in y$ oraz $y \in z$, ale $x \notin z$. Na przykład: $x = \{1, 2\}$, $y = \{3, \{1, 2\}, 4\}$, $z = \{1, \{3, \{1, 2\}, 4\}, 7\}$ są takimi właśnie zbiorami.

3. Implikacja: *jeśli* $x \subseteq y$ *oraz* $y \cap z \neq \emptyset$*, to* $x \cap z \neq \emptyset$ nie jest prawem rachunku zbiorów. Można bowiem zbudować zbiory x, y oraz z takie, że $x \subseteq y$ oraz $y \cap z \neq \emptyset$, ale $x \cap z = \emptyset$. Na przykład: $x = \{1, 2, 3\}$, $y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $z = \{4, 5\}$ są takimi właśnie zbiorami.

□

Pewnych praw rachunku zbiorów można dowodzić, posługując się (dobrze sporządzonymi!) diagramami Venna. Gdy np. mamy dowieść równości, w której zarówno po jej lewej jak i prawej stronie występują jedynie operacje sumy, iloczynu, różnicy, dopełnienia, różnicy symetrycznej, to rysujemy diagramy Venna dla każdej ze stron takiego równania i zaznaczamy (np. obszarem zacieniowanym) zbiór, który jest wynikiem stosowania wymienionych operacji. Jeśli otrzymane reprezentacje graficzne dla lewej i prawej strony równania dają jako zacieniowany ten sam obszar, to uznajemy, że rozważana równość została udowodniona. Tę metodę poznają słuchacze na konwersatorium. Należy jednak wyraźnie podkreślić, że nie jest to metoda, którą można stosować dla dowodzenia całkiem dowolnych praw rachunku zbiorów. W ogólnym przypadku dowody przebiegają tak, jak w podanych wyżej przykładach.

6 Zachęta do refleksji

W ramach każdego wykładu zamieszczać będziemy przykłady pytań, które zadawać mogą sobie słuchacze. Prowadzący wykład jest oczywiście gotów do udzielenia odpowiedzi na te pytania, można je również rozważyć podczas konwersatorium.

1. Czy można *wszystkie* zbiory zebrać w jeden zbiór?
2. Czy dowolna własność wyznacza jakiś zbiór?
3. Czy ręka jest zbiorem palców?
4. Czy zbiór może mieć *rozmyte granice*?
5. Obecnie dość powszechnie uważa się teorię mnogości za podstawę całej matematyki. Ale przecież teoria ta powstała stosunkowo niedawno. W jaki zatem sposób uprawiano wcześniej matematykę, na czym bazowano?
6. Czy liczby są zbiorami?
7. Czy można *opisać* rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$?
8. Czy można narysować diagram Venna dla *dowolnej* skończonej liczby zbiorów?

7 Podsumowanie

Słuchacze niech nie będą przerażeni objętością niniejszej notatki. Zwykle tekst każdego wykładu zawierał będzie jedynie kilkanaście stron. Dzisiejszy tekst jest dłuższy, ponieważ zawiera informacje wstępne dla całego kursu, ustalenia organizacyjne oraz dodatki, z których skorzystamy dopiero później. To, co słuchacze powinni zapamiętać z dzisiejszego wykładu to:

1. Sposoby określania zbiorów: wyliczenie elementów, podanie własności wspólnej elementom.
2. Uniwersum rozważań, zbiór pusty, singleton.
3. Równość zbiorów, inkluzja (zawieranie), rozłączność.
4. Para uporządkowana.
5. Operacje na zbiorach: suma, iloczyn, różnica, dopełnienie, różnica symetryczna, produkt kartezjański.
6. Diagram Venna.
7. Składowe.
8. Prawo rachunku zbiorów.

8 Dodatek 1: Wybrane prawa rachunku zbiorów

Podajemy wybrane prawa rachunku zbiorów. Są to więc twierdzenia, które zachodzą dla dowolnych zbiorów.

1. Symbol U oznacza poniżej brane pod uwagę *uniwersum rozważań*.
2. Podane prawa zachodzą dla wszelkich zbiorów; należy więc je rozumieć jako poprzedzone stosownymi kwantyfikatorami ogólnymi.

Niektóre z podanych niżej praw są bardzo często wykorzystywane i warto je zapamiętać (co nie będzie trudne, gdy już kilkakrotnie je wykorzystamy). Ważniejsza jest jednak umiejętność uzasadnienia tych praw, czyli podania ich dowodów. Przykłady takich dowodów podaliśmy powyżej. Niektóre z praw pojawią się dopiero o wiele później w trakcie tego kursu (np. te, w których występują podwójnie indeksowane zbiory).

1. $A \subseteq A$.
2. Jeśli $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$, to $A \subseteq C$.
3. $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.
4. $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$.
5. $A - B \subseteq A$.
6. $\emptyset \subseteq A \subseteq U$.
7. Jeśli $A \subseteq \emptyset$, to $A = \emptyset$.
8. Jeśli $U \subseteq A$, to $A = U$.
9. $A \cup \emptyset = A$.
10. $A \cap \emptyset = \emptyset$.
11. $A \cup U = U$.
12. $A \cap U = A$.
13. Istnieje tylko jeden zbiór, nie mający żadnych elementów.
14. Następujące warunki są równoważne:
    (a) $A \subseteq B$
    (b) $A \cup B = B$
    (c) $A \cap B = A$
    (d) $A - B = \emptyset$
    (e) $A' \cup B = U$.
15. $A \cup A = A \cap A = A$.
16. $A \cap B = B \cap A$.
17. $A \cup B = B \cup A$.
18. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
19. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
20. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

21. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

22. $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$.

23. $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

24. $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

25. $(A')' = A$.

26. $A \cup A' = U$.

27. $A \cap A' = \emptyset$.

28. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

29. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

30. $A - (A - B) = A \cap B$.

31. $A - B = A - (A \cap B)$.

32. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) - C$.

33. $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$.

34. $A \cup B = A \cup (B - A)$.

35. $(A \cap B) \cup (A \cap B') = (A \cup B) \cap (A \cup B') = A$.

36. $(A' \cup B) \cap A = A \cap B$.

37. $A \cap (B - A) = \emptyset$.

38. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.

39. $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.

40. $A - (B \cup C) = (A - B) - C$.

41. Jeśli $A \cup B \subseteq C$, to $A \subseteq C$ i $B \subseteq C$

42. $A \subseteq B \cap C$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subseteq B$ i $A \subseteq C$

43. $A \cap B \subseteq C$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subseteq B' \cup C$

44. $A \subseteq B \cup C$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap B' \subseteq C$

45. $(A - B) \cup B = A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $B \subseteq A$

46. $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C \subseteq A$

47. Jeśli $A \subseteq B$, to $A \cup C \subseteq B \cup C$

48. Jeśli $A \subseteq B$, to $A \cap C \subseteq B \cap C$

49. Jeśli $A \subseteq B$, to $(A - C) \subseteq (B - C)$

50. Jeśli $A \subseteq B$, to $(C - B) \subseteq (C - A)$

51. Jeśli $A \subseteq B$, to $B' \subseteq A'$

52. Jeśli $A \cup B = A \cap B$, to $A = B$

53. $A = B'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap B = \emptyset$ i $A \cup B = U$.

54. $A \div B = B \div A$.

55. $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$.

56. $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$.

57. $A \div (A \div B) = B$.

58. $A \cup B = (A \div B) \div (A \cap B)$.

59. $A - B = A \div (A \cap B)$.

60. $A \div \emptyset = A$.

61. $A \div A = \emptyset$.

62. $A \div U = A'$.

63. $A \cup B = (A \div B) \cup (A \cap B)$.

64. $(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \div (B_1 \cup \ldots \cup B_n) \subseteq (A_1 \div B_1) \cup \ldots \cup (A_n \div B_n)$.

65. $(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \div (B_1 \cap \ldots \cap B_n) \subseteq (A_1 \div B_1) \cup \ldots \cup (A_n \div B_n)$.

66. $A \div B = \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = B$.

67. Jeśli $A \cap B = \emptyset$, to $A \cup B = A \div B$.

68. $A \div B = C$ wtedy i tylko wtedy, gdy: $B \div C = A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C \div A = B$.

69. $\wp(A \cap B) = \wp(A) \cap \wp(B)$.

70. $\wp(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} \wp(A_i)$.

71. $\wp(A \cup B) = \{A_1 \cup B_1 \ : \ A_1 \in \wp(A) \text{ i } B_1 \in \wp(B)\}$.

72. $\wp(\bigcup_{i\in I} A_i) = \{\bigcup_{i\in I} B_i \ : \ B_i \in \wp(A_i)\}$.

73. $\bigcup_{k\in K} \bigcup_{t\in T} A_{kt} = \bigcup_{t\in T} \bigcup_{k\in K} A_{kt}$.

74. $\bigcap_{k\in K} \bigcap_{t\in T} A_{kt} = \bigcap_{t\in T} \bigcap_{k\in K} A_{kt}$.

75. $(\bigcup_{k\in K} A_k)' = \bigcap_{k\in K} A'_k$.

76. $(\bigcap_{k\in K} A_k)' = \bigcup_{k\in K} A'_k$.

77. $\bigcup_{k\in K} A_k \cup \bigcup_{k\in K} B_k = \bigcup_{k\in K} (A_k \cup B_k)$.

78. $\bigcup_{k\in K} (B \cap A_k) = B \cap (\bigcup_{k\in K} A_k)$.

79. $\bigcap_{k\in K} (B \cup A_k) = B \cup (\bigcap_{k\in K} A_k)$.

80. Dla dowolnych K, T, A_{kt}: $\bigcup_{k\in K} \bigcap_{t\in T} A_{kt} \subseteq \bigcap_{t\in T} \bigcup_{k\in K} A_{kt}$.

81. Jeśli $A_t \subseteq B$ dla wszystkich $t \in T$, to $\bigcup_{t\in T} A_t \subseteq B$.

82. Jeśli $B \subseteq A_t$ dla wszystkich $t \in T$, to $B \subseteq \bigcap_{t\in T} A_t$.

83. Jeśli $A_t \subseteq B_t$ dla wszystkich $t \in T$, to $\bigcup_{t\in T} A_t \subseteq \bigcup_{t\in T} B_t$ i $\bigcap_{t\in T} A_t \subseteq \bigcap_{t\in T} B_t$.

84. Jeżeli $\bigcap_{n>0} A_n \cap \bigcap_{n>0} B_n = \emptyset$, to $\bigcap_{n>0} A_n \subseteq \bigcup_{n>0} [A_n \cap (B_{n-1} - B_n)]$, gdzie $(\bigcup_{n>0} A_n) \cup (\bigcup_{n>0} B_n) \subseteq B_0$.

85. Dla dowolnego układu zbiorów $A_0, \ldots, A_n, \ldots$ istnieje układ parami rozłącznych zbiorów $B_0, \ldots, B_n, \ldots$ taki, że $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$ i $B_n \subseteq A_n$.

86. Istnieją A, B i C takie, że:

(a) $A \times B \neq B \times A$, (tj. działanie $\times$ nie jest przemienne).

(b) $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$ (tj. działanie $\times$ nie jest łączne).

87. Jeśli A, B, C i D są niepuste, to:

    (a) $A \subseteq B$ i $C \subseteq D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \times C \subseteq B \times D$.

    (b) $A = B$ i $C = D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \times C \subseteq B \times D$.

88. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

89. $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \times \bigcap\limits_{i \in I} B_i = \bigcap\limits_{i \in I} (A_i \times B_i)$.

90. $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$.

91. Jeśli $A, B \neq \emptyset$ i $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D$, to $A = B = C = D$.

92. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

93. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

94. $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$.

95. $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

96. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.

97. $A \times B = (A \times D) \cap (C \times B)$, gdzie $A \subseteq C$ i $B \subseteq D$.

98. $U \times U - (A \times B) = [(U - A) \times U] \cup [U \times (U - B)]$.

99. $\bigcup\limits_{k \in K} A_k \times \bigcup\limits_{t \in T} B_t = \bigcup\limits_{(k,t) \in K \times T} (A_k \times B_t)$.

100. $\bigcap\limits_{k \in K} A_k \times \bigcap\limits_{t \in T} B_t = \bigcap\limits_{(k,t) \in K \times T} (A_k \times B_t)$.

9 Dodatek 2: Aksjomaty teorii mnogości

Współczesna teoria mnogości to teoria aksjomatyczna. Jej najbardziej standardowa postać to teoria mnogości Zermelo-Fraenkla (z pewnikiem wyboru), oznaczana przez ZFC. Teorię mnogości bez aksjomatu wyboru oznaczamy przez ZF.

Aksjomaty teorii mnogości mają ustalać znaczenie pojęć pierwotnych tej teorii. Mają też gwarantować, że na zbiorach możemy wykonywać omówione wcześniej operacje. Na tym etapie edukacji nie będziemy analizować poniższych aksjomatów – będzie to możliwe nieco później. Proszę zatem traktować ten fragment jako ozdobnik tekstu.

Aksjomat ekstensjonalności:
$\forall x \forall y\ (\forall z\ (z \in x \equiv z \in y) \to x = y)$

Ten aksjomat stwierdza, że każdy zbiór jest jednoznacznie wyznaczony poprzez swoje elementy.

Aksjomat pary:
$\forall x \forall y \exists z \forall u\ (u \in z \equiv (u = x \vee u = y))$

To aksjomat gwarantujący istnienie pary nieuporządkowanej.

Aksjomat sumy:
$\forall x \exists y \forall z\ (z \in y \equiv \exists u\ (z \in u \wedge u \in x))$

Aksjomat ten gwarantuje istnienie sumy dowolnej rodziny zbiorów.

Aksjomat zbioru potęgowego:
$\forall x \exists y \forall z\ (z \in y \equiv \forall u (u \in z \to u \in x))$

Na mocy tego aksjomatu, dla dowolnego zbioru istnieje zbiór złożony dokładnie ze wszystkich jego podzbiorów.

Schemat wyróżniania:
$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \forall y \exists z \forall u\ (u \in z \equiv (u \in y \wedge \varphi(u, x_1, x_2, \ldots, x_n)))$
gdzie φ jest formułą języka teorii mnogości ZF taką, że z nie jest zmienną wolną w φ, zaś $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są zmiennymi wolnymi formuły φ innymi niż u.

Schemat wyróżniania pozwala z elementów danego wprzódy zbioru utworzyć jego podzbiór, złożony z tych elementów, które mają jakąś własność, wyrażalną w języku (pierwszego rzędu) teorii mnogości.

Mamy tu do czynienia nie z jednym aksjomatem, ale właśnie ze schematem nieskończenie wielu aksjomatów.

Aksjomat nieskończoności:
$\exists x\ (\exists y\ (y \in x \wedge \neg \exists z\ (z \in y)) \wedge \forall y\ (y \in x \to \forall z (\forall u\ (u \in z \equiv u = y) \to z \in x)))$

Ten aksjomat stwierdza istnienie (co najmniej jednego) zbioru nieskończonego. Uwaga: to jedyny aksjomat egzystencjalny w tej teorii mnogości.

Schemat zastępowania:
$\forall u (\forall x \forall y \forall z\ (x \in u \wedge \varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \to y = z) \to \exists w \forall v\ (v \in w \equiv \exists x\ (x \in u \wedge \varphi(x, v))))$

Schemat ten gwarantuje, intuicyjnie mówiąc, że obraz dowolnego zbioru względem jakiejkolwiek funkcji (opisywalnej formułą języka teorii mnogości) także jest zbiorem.

Tu również mamy do czynienia nie z jednym aksjomatem, ale ze schematem nieskończenie wielu aksjomatów.

Aksjomat ufundowania:

$\forall x(\exists u\ (u \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \forall z\ (z \in y \rightarrow \neg z \in x)))$

Aksjomat ufundowania wyklucza istnienie nieskończonych $\in$-zstępujących ciągów zbiorów, tj. takich ciągów $\langle x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots \rangle$, że:

$$x_2 \in x_1,\ x_3 \in x_2,\ x_4 \in x_3, \ldots$$

Gdy do tego systemu dołączyć **Aksjomat wyboru**:

$\forall x((\forall y\ (y \in x \rightarrow \exists z\ (z \in y)) \wedge \forall y \forall u\ ((y \in x \wedge u \in x) \rightarrow y = u \vee \neg \exists v\ (v \in y \wedge v \in u))) \rightarrow \exists w(\forall y\ (y \in x \rightarrow \exists z\ ((z \in y \wedge z \in w) \wedge \forall v\ ((v \in y \wedge v \in w) \rightarrow v = z)))))$,

to otrzymamy system teorii mnogości nazywany **ZFC**.

UWAGA. Do aksjomatyki teorii ZF należą także *aksjomaty dla identyczności*:

- $\forall x\ (x = x)$
- $\forall x \forall y\ (x = y \rightarrow y = x)$
- $\forall x \forall y \forall z\ ((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$;
- $\forall x \forall y \forall z\ ((x = y \wedge x \in z) \rightarrow y \in z)$;
- $\forall x \forall y \forall z\ ((x = y \wedge z \in x) \rightarrow z \in y)$.

UWAGA. Używane tu (np. w schematach wyróżniania i zastępowania) terminy: *nieskończony* i *przeliczalny* należą do *metajęzyka*.

10 Wybrane pozycje bibliograficzne

10.1 Podręczniki

Cichoń, J. 2003. *Wykłady ze wstępu do matematyki.* Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław.

Guzicki, W., Zakrzewski, P. 2005. *Wykłady ze wstępu do matematyki. Wprowadzenie do teorii mnogości.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Kraszewski, J. 2007. *Wstęp do matematyki.* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Kuratowski, K., Mostowski, A. 1978. *Teoria mnogości*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Mirkowska, G. 2003. *Elementy matematyki dyskretnej.* Wydawnictwo Polsko-Japońskiej Wyższej Szkoły Technik Komputerowych, Warszawa.

Murawski, R., Świrydowicz, K. 2005. *Wstęp do teorii mnogości.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Rasiowa, H. 2004. *Wstęp do matematyki współczesnej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

10.2 Zbiory zadań

Guzicki, W., Zakrzewski, P. 2005. *Wstęp do matematyki. Zbiór zadań.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Ławrow, A.I., Maksimowa, L.L. 2004. *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Marek, W., Onyszkiewicz, J. 2004. *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Stanosz, B. 2005. *Ćwiczenia z logiki.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.