Logika algebraiczna 8d

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

2021

- Suszko, R. 1973. Adequate models for the non-Fregean sentential calculus (SCI). W: R.J. Bogdan, I. Niiniluoto (eds.) *Logic, Language, and Probability*, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 49–54.
- W tej krótkiej notce Suszko przedstawia dowód twierdzenia głoszącego, że każdy model adekwatny dla SCI jest nieprzeliczalny.
- SCI-język L zawiera zmienne zdaniowe $p_i \in Var$, funktory negacji $\neg$, koniunkcji $\wedge$ oraz identyczności $\equiv$.
- SCI-modelami są struktury $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$, gdzie $\mathbf{A} = (A, -, \cap, \circ)$ jest algebrą podobną do algebry SCI-języka, a $D \subseteq A$ jest zbiorem wartości wyróżnionych, przy czym dla wszystkich $a, b \in A$:
  - $-a \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \notin D$
  - $a \cap b \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a, b \in D$
  - $a \circ b \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.

- Operacja konsekwencji C w SCI-języku została określona w poprzednich wykładach.
- Jeśli $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$ jest SCI-modelem, to operacja $C_{\mathfrak{M}}$ konsekwencji matrycowej w L określona jest warunkiem: $\alpha \in C_{\mathfrak{M}}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich homomorfizmów $h : L \to A$, jeśli $h(X) \subseteq D$, to $h(\alpha) \in D$.
- Suszko podaje (bez dowodu) następujące fakty:
  - **Twierdzenie o pełności**. $C = \inf\limits_{\mathfrak{M} \in \mathcal{K}} C_{\mathfrak{M}}$, gdzie klasa $\mathcal{K}$ to: (1) klasa wszystkich SCI-modeli, (2) klasa wszystkich przeliczalnych SCI-modeli, (3) klasa wszystkich modeli ilorazowych $L/\sim_T$, gdzie T jest teorią zupełną, zaś $\alpha \sim_T \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\alpha \equiv \beta) \in T$.
  - **Twierdzenie o adekwatności**. Istnieje model $\mathfrak{M}$ mocy kontinuum taki, że $C = C_{\mathfrak{M}}$.
  - **Lemat pomocniczy**. $C = C_{(\mathbf{A}, D)}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej teorii T istnieje homomorfizm $h : L \to A$ taki, że $T = h^{-1}(D)$.

Niech $\mathbf{2} = (\{0,1\}, -, \cap, \cup, 0, 1)$ oznacza dwuelementową algebrę Boole'a. Odwzorowanie $t : L \to \{0,1\}$ nazywamy wartościowaniem prawdziwościowym ($t \in TV$), gdy dla wszystkich $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in L$:

- $t(\neg\alpha) = -t(\alpha)$
- $t(\alpha \wedge \beta) = t(\alpha) \cap t(\beta)$
- $t(\alpha \equiv \alpha) = 1$
- Jeśli $t(\alpha \equiv \beta) = 1$, to $t(\alpha) = t(\beta)$
- Jeśli $t(\alpha \equiv \beta) = 1$, to $t(\neg\alpha \equiv \neg\beta) = 1$
- Jeśli $t(\alpha \equiv \beta) = t(\gamma \equiv \delta) = 1$, to $t((\alpha \wedge \gamma) \equiv (\beta \wedge \delta)) = t((\alpha \equiv \gamma) \equiv (\beta \equiv \delta)) = 1$.

Zachodzą wtedy zależności:

- $t(\alpha \equiv \beta) = t(\beta \equiv \alpha)$
- Jeśli $t(\alpha \equiv \beta) = t(\beta \equiv \gamma) = 1$, to $t(\alpha \equiv \gamma) = 1$.

- Definiujemy zbiory formuł rzędu n i równości rzędu n:
  - $L_0 = Var$, $L_{n+1} = L_n \cup \{\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \equiv \beta : \alpha, \beta \in L_n\}$
  - $E_0 = \emptyset$, $E_{n+1} = \{\alpha \equiv \beta : \alpha \equiv \beta \in L_{n+1}\}$.
- Odwzorowanie $h : L_n \to \{0, 1\}$ jest częściowym wartościowaniem prawdziwościowym rzędu n ($h \in PTV_n$), gdy dla wszystkich $\alpha, \beta, \gamma \in L_{n-1}$ oraz $\varphi, \psi, \xi, \eta \in L_{n-2}$:
  - $h(\neg\alpha) = -h(\alpha)$
  - $h(\alpha \wedge \beta) = h(\alpha) \cap h(\beta)$
  - $h(\alpha \equiv \alpha) = 1$
  - $h(\alpha \equiv \beta) = h(\beta \equiv \alpha)$
  - Jeśli $h(\alpha \equiv \beta) = h(\beta \equiv \gamma) = 1$, to $h(\alpha \equiv \gamma) = 1$
  - Jeśli $h(\alpha \equiv \beta) = 1$, to $h(\alpha) = h(\beta)$
  - Jeśli $h(\varphi \equiv \psi) = 1$, to $h(\neg\varphi \equiv \neg\psi) = 1$
  - Jeśli $h(\varphi \equiv \psi) = h(\xi \equiv \eta) = 1$, to $h((\varphi \wedge \xi) \equiv (\psi \wedge \eta)) = h((\varphi \equiv \xi) \equiv (\psi \equiv \eta)) = 1$.

- Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między zbiorem TV wartościowanań prawdziwościowych a rodziną wszystkich teorii zupełnych.
- Wartościowania prawdziwościowe są funkcjami charakterystycznymi teorii zupełnych.
- Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między zbiorem TV wartościowanań prawdziwościowych a rodziną wszystkich nieskończonych ciągów częściowych wartościowań prawdziwościowych:
  - Jeśli $t \in TV$, to $t \upharpoonright L_n \in PTV_n$.
  - Jeśli dla wszystkich n, $h_n \in PTV_n$ oraz h_{n+1} jest rozszerzeniem h_n, to istnieje jedyne $t \in TV$ takie, że $t(\alpha) = h_n(\alpha)$ dla wszystkich n oraz $\alpha \in L_n$.
- Na wykładzie *Logika algebraiczna 8c* pokazano, w jaki sposób dowodzi się powyższych stwierdzeń.

- Jeśli R jest dwuargumentową relacją na L_n, to możemy reprezentować ją przez zbiór wszystkich równości $(\alpha \equiv \beta) \in E_{n+1}$ takich, że $\alpha R \beta$.
- Dla $h \in PTV_n$ niech $F(h) = \{(\alpha \equiv \beta) \in E_{n+1} : h(\alpha) = h(\beta)\}$.
- Wtedy $F(h)$ jest (w powyższym sensie) relacją równoważności na L_n.
- Mówimy, że $\eta \in E_{n+1}$ jest generowana przez $h \in PTV_n$, gdy zachodzi alternatywa:
    - η jest formułą $\neg\alpha \equiv \neg\beta$ i $h(\alpha \equiv \beta) = 1$ LUB
    - η jest formułą $(\alpha \wedge \gamma) \equiv (\beta \wedge \delta)$ lub formułą $(\alpha \equiv \gamma) \equiv (\beta \equiv \delta)$ i $h(\alpha \equiv \beta) = h(\gamma \equiv \delta) = 1$.
- Niech $G(h)$ będzie zbiorem wszystkich równości z E_{n+1} generowanych przez h. Wtedy $G(h)$ także jest relacją równoważności na L_n.

- Dla $h \in PTV_n$ definiujemy funkcje $h^0 : L_n \to \{0, 1\}$ i $h^+ : L_n \to \{0, 1\}$ tak, aby rozszerzały one funkcję h, czyli $h^0(\alpha) = h^+(\alpha) = h(\alpha)$ dla $\alpha \in L_n$, a ponadto dla $\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \equiv \beta \in L_{n+1} - L_n$:
  - $h^0(\neg\alpha) = h^+(\neg\alpha) = -h(\alpha)$
  - $h^0(\alpha \wedge \beta) = h^+(\alpha \wedge \beta) = h(\alpha) \cap h(\beta)$
  - $h^0(\alpha \equiv \beta) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\alpha \equiv \beta) \in G(h)$
  - $h^+(\alpha \equiv \beta) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\alpha \equiv \beta) \in F(h)$.
- Wtedy $h^0, h^+ \in PTV_{n+1}$. Natomiast jeśli $g \in PTV_{n+1}$ i g jest rozszerzeniem h, to:
  - jeśli $h^0(\alpha \equiv \beta) = 1$, to $g(\alpha \equiv \beta) = 1$
  - jeśli $g(\alpha \equiv \beta) = 1$, to $h^+(\alpha \equiv \beta) = 1$.

- Mówimy, że formuły α i β są podobne, a równość $\alpha \equiv \beta$ jest specjalna, gdy albo α i β są zmiennymi, albo α i β mają ten sam funktor główny (czyli obie są negacjami, lub obie koniunkcjami, lub obie równościami).
- Wszystkie równości generowane są specjalne, czyli każdy zbiór $G(h)$ składa się z równości specjalnych.
- Jeśli $h \in PTV_{n+1}$, to odwzorowanie h jest nazywane specjalnym, gdy:
  - $h(p_i \equiv p_j) = 1$ dla wszystkich i, j
  - jeśli $h(\alpha \equiv \beta) = 1$, to α i β są podobne
  - $h(\alpha \equiv \beta) = 0$ oraz $h(\alpha) = h(\beta)$ dla pewnego $(\alpha \equiv \beta) \in E_{n+1}$.

- **Twierdzenie**. Istnieje g specjalne w PTV_2.
- **Dowód**. Istnieje oczywiście $h \in PTV_1$ takie, że $h(p_i \equiv p_j) = 1$ dla wszystkich i, j.
- Niech $g = h^0$.
- Ponieważ g jest rozszerzeniem h, więc $g(p_i \equiv p_j) = 1$ dla wszystkich i, j.
- Jeśli $g(\alpha \equiv \beta) = 1$, to $(\alpha \equiv \beta) \in G(h)$, a zatem α i β są podobne.
- Ponadto, $g(p \equiv (p \equiv p)) = g((\neg p) \equiv (p \equiv p)) = 0$.
- Mamy jednak również: $g(p) = g(p \equiv p)$ lub $g(\neg p) = g(p \equiv p)$.
- Pokazaliśmy zatem, że $g \in PTV_2$ jest specjalne. $\square$

- **Twierdzenie**. Jeśli $n > 1$ i h jest specjalne w PTV_n, to h^0 jest specjalne w PTV_{n+1}.
- **Dowód**. Niech $n > 1$ i $h \in PTV_n$ będzie specjalne.
- Wtedy $h(p_i \equiv p_j) = 1$ dla wszystkich i, j, a jeśli $h^0(\alpha \equiv \beta) = 1$, to α i β są podobne.
- Istnieją rzecz jasna $\gamma, \delta \in L_{n-1}$ takie, że $h(\gamma) \neq h(\delta)$.
- Wtedy $\neg\gamma, \delta \wedge \delta \in L_n$, a ponadto: $h^0(\neg\gamma) = h(\gamma) = h(\delta \wedge \delta) = h^0(\delta \wedge \delta)$.
- Mamy jednak $((\neg\gamma) \equiv (\delta \wedge \delta)) \in E_{n+1}$ i oczywiście $\neg\gamma$ i $\delta \wedge \delta$ nie są podobne.
- Wynika stąd, że $h^0((\neg\gamma) \equiv (\delta \wedge \delta)) = 0$.
- Pokazaliśmy zatem, że h^0 jest specjalne w PTV_{n+1}. $\square$

- **Twierdzenie**. Jeśli $n > 0$ i $h \in PTV_{n+1}$, to h^+ nie jest specjalne.
- **Dowód**. Załóżmy, że $\alpha \in L_{n-1} - E_{n-1}$.
- Wtedy $\alpha \in L_n$ oraz $\neg\alpha \in L_n$.
- Ponadto, $\alpha \equiv (p \equiv p) \in E_{n+1}$ oraz $((\neg\alpha) \equiv (p \equiv p)) \in E_{n+1}$, ale równości $\alpha \equiv (p \equiv p)$ i $(\neg\alpha) \equiv (p \equiv p)$ nie są specjalne, ponieważ ani formuły α i $p \equiv p$ ani formuły $\neg\alpha$ i $p \equiv p$ nie są podobne.
- Ponieważ zachodzi $h(\alpha) = 1$ lub $h(\neg\alpha) = 1$, więc mamy również:
  - $h^+(\alpha \equiv (p \equiv p)) = 1$ LUB
  - $h^+((\neg\alpha) \equiv (p \equiv p)) = 1$.
- W konsekwencji, h^+ nie jest specjalne. □

- **Twierdzenie**. Jeśli $n > 1$ i h jest specjalne w PTV_n, to istnieje specjalne h^* w PTV_{n+1} takie, że h^* jest rozszerzeniem h oraz $h^0 \neq h^*$.
- **Dowód**. Jeśli h jest specjalne w PTV_n, to istnieją $\gamma, \delta \in E_n$ takie, że $h(\gamma \equiv \delta) = 0$ oraz $h(\gamma) = h(\delta)$.
- Wtedy $(\neg\gamma \equiv \neg\gamma) \in E_{n+1} - G(h)$.
- Niech R będzie najmniejszą relacją równoważności na E_{n+1}, zawierającą $G(h) \cup \{\neg\gamma \equiv \neg\gamma\}$.
- Określamy $h^* : L_{n+1} \to \{0, 1\}$ w następujący sposób:
  1. jeśli $\alpha \in L_n$, to $h^*(\alpha) = h(\alpha)$
  2. dla $\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \equiv \beta inL_{n+1} - L_n$ niech $h^*(\neg\alpha) = -h(\alpha)$, $h^*(\alpha \wedge \beta) = h(\alpha) \cap h(\beta)$, natomiast $h^*(\alpha \equiv \beta) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\alpha \equiv \beta) \in R$.
- Wtedy h^* jest rozszerzeniem h oraz $h^* \in PTV_{n+1}$.
- Ponieważ $R \neq G(h)$, więc $h^* \neq h^0$.

- Trzeba jeszcze pokazać, że h^* jest specjalne.
- Ponieważ wszystkie równości w $G(h)$ są specjalne i równość $\neg\gamma \equiv \neg\gamma$ też jest specjalna, więc wszystkie równości w R są specjalne.
- Tak więc, jeśli $h^*(\alpha \equiv \beta) = 1$, to α i β są podobne.
- Istnieją oczywiście $\varphi, \psi \in L_{n-1}$ takie, że $h(\varphi) \neq h(\psi)$.
- Wtedy $\neg\varphi, \psi \wedge \psi \in L_n$ oraz
  $h^*(\neg\varphi) = h(\neg\varphi) = h(\psi \wedge \psi) = h^*(\psi \wedge \psi)$.
- Mamy: $((\neg\varphi) \equiv (\psi \wedge \psi)) \in E_{n+1}$, ale $\neg\varphi$ i $\psi \wedge \psi$ nie są, rzecz jasna, podobne.
- W konsekwencji, $h^*((\neg\varphi) \equiv (\psi \wedge \psi)) = 0$, co kończy dowód. $\square$

- **Twierdzenie**. Niech $TV^* = \{t \in TV : \forall i \forall j\ t(p_i \equiv p_j) = 1\}$. Istnieje wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie z $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ w TV^*.
- **Dowód**. Dla $c \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ określimy ciąg częściowych wartościowań prawdziwościowych h_n, którego sumą będzie wartościowanie $t_c \in TV^*$.
- Niech $h_2 \in PTV_2$ będzie specjalne i niech $h_0 = h_2 \upharpoonright L_0$, $h_1 = h_2 \upharpoonright L_1$.
- Załóżmy, że h_n zostało już określone dla pewnego $n > 1$.
- Tworzymy wtedy h^* tak, jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia i określamy:
  - $h_{n+1} = h_n^0$, gdy $c_{n-1} = 0$
  - $h_{n+1} = h_n^*$, gdy $c_{n-1} = 1$.
- Niech $t_c = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} h_n$.
- Ponieważ $h_n^0 \neq h_n^*$, więc przyporządkowanie $c \mapsto t_c$ jest wzajemnie jednoznaczne. $\square$

- Teorię zupełną nazywamy specjalną, jeśli zawiera ona równości $p_i \equiv p_j$ dla wszystkich i, j.
- Jeśli $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, D)$ jest SCI-modelem, a $h : L \to A$ homomorfizmem, to h nazywamy specjalnym, gdy $h(p_i) = h(p_j)$ dla wszystkich i, j.
- **Twierdzenie**. Rodzina wszystkich zupełnych teorii specjalnych jest nieprzeliczalna. $\square$
- **Twierdzenie**. Jeśli $C = C_{(\mathbf{A},D)}$, to **A** jest nieprzeliczalna.
- **Dowód**. Przypuśćmy, że $C = C_{(\mathbf{A},D)}$ oraz **A** jest przeliczalna.
- Jeśli T jest zupełną teorią specjalną, $h : L \to A$ homomorfizmem i $h(T) = D$, to $(p_i \equiv p_j) \in T$, a zatem $h(p_i \equiv p_j) \in D$, czyli $h(p_i) = h(p_j)$. Tak więc, h jest specjalny.
- Znaczy to, że przeliczalna jest rodzina wszystkich zbiorów $h^{-1}(D)$, gdzie $h : L \to A$ jest specjalnym homomorfizmem.
- Wynika stąd, na mocy Lematu pomocniczego, że rodzina wszystkich zupełnych teorii specjalnych jest przeliczalna, a to daje sprzeczność. $\square$