

# Arytmetyzacja składni PA

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM  
[www.logic.amu.edu.pl](http://www.logic.amu.edu.pl)  
[pogon@amu.edu.pl](mailto:pogon@amu.edu.pl)

Funkcje rekurencyjne

# Plan na dziś

## Plan na dziś:

- przypomnienie PA;
- kodowania symboli;
- arytmetyzacja składni PA;
- relacja dowodliwości w PA.
- konstrukcja zdania Gödla dla PA.

# Arytmetyka Peana

Przypomnijmy aksjomaty specyficzne Arytmetyki Peana, PA:

- $S(x) = S(y) \rightarrow x = y$
- $\neg(0 = S(x))$
- $x + 0 = x$
- $x + S(y) = S(x + y)$
- $x \cdot 0 = 0$
- $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
- $(\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(S(x)))) \rightarrow \forall x\varphi(x)$

Ostatnia z tych formuł to schemat aksjomatów.

Przypomnijmy też, że modelem zamierzonym PA jest zbiór wszystkich liczb naturalnych z operacją następnika, elementem wyróżnionym 0 oraz znanymi operacjami dodawania i mnożenia.

# Arytmetyzacja składni

W języku arytmetyki PA możemy „mówić” nie tylko o liczbach naturalnych (interpretacja zamierzona), lecz także o samej arytmetyce PA. Możliwość tę uzyskujemy poprzez kodowanie symboli, wyrażeń oraz ciągów wyrażeń języka PA liczbami naturalnymi.

Kodować można na wiele sposobów. Dla przykładu: niech zmienna indywidualowa  $x_i$  ma numer  $2 \cdot i$ , a pozostałe symbole jakieś numery nieparzyste:

- $\neg$  — 3,
- $\forall$  — 5,
- $+$  — 7,
- $S$  — 9,
- $0$  — 11,
- $($  — 13,
- $)$  — 15,
- $=$  — 17, itp.

# Arytmetyzacja składni

Wtedy ciągi symboli języka PA można (jednoznacznie!) kodować przez iloczyny kolejnych liczb pierwszych podniesionych do stosownych potęg.  
Np. kodem wyrażenia:

$$\forall x_2 \neg(x_2 = S(0))$$

będzie:

$$2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^{13} \cdot 11^4 \cdot 13^{17} \cdot 17^9 \cdot 19^{13} \cdot 21^{11} \cdot 23^{15} \cdot 29^{15}$$

Cóż, nie jest to mała liczba... Istotna jest jednak jedynie możliwość **jednoznacznego** oraz **obliczalnego** kodowania ciągów symboli.

# Arytmetyzacja składni

Liczbę, która koduje wyrażenie języka PA (term, formułę) nazywamy **numerem Gödrowskim** tego wyrażenia (w skrócie: numerem).

**Liczebniki** to numery termów postaci:  $0, S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), \dots$  (a więc numery **nazw** kolejnych liczb naturalnych).

**Umowa notacyjna.** W dalszym ciągu, niech:

- $x, y, z$  oznaczają zmienne indywidualne;
- $m, n, r$  oznaczają liczby naturalne;
- $\bar{m}, \bar{n}, \bar{r}$  oznaczają liczebniki.

Kodowanie ciągów wyrażeń (np.: **dowodów**) odbywa się tak samo, jak kodowanie wyrażeń (iloczyny kolejnych liczb pierwszych podniesionych do potęg będącym numerami elementów ciągu). Także to kodowanie jest **jednoznaczne i obliczalne**.

# Arytmetyzacja składni PA

Numer Gödlowski wyrażenia (termu, formuły)  $A$  będziemy oznaczać przez  $\ulcorner A \urcorner$ . Zamiast „numer Gödlowski” będziemy czasem krótko mówić „ng”.

Nie każda liczba naturalna jest numerem Gödlowskim jakiegoś wyrażenia języka PA.

Ważne jest to, że — jak zobaczymy za chwilę — zbiór numerów Gödlowskich wszystkich wyrażen języka PA jest **rekurencyjny**.

Inaczej mówiąc, istnieje efektywna procedura, która dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  pozwala stwierdzić, czy  $n$  jest numerem Gödlowskim jakiegoś wyrażenia (termu, formuły), tzn. czy istnieje term lub formuła  $A$  języka PA, taki/taka, że  $n = \ulcorner A \urcorner$ .

# Kodowania symboli

Jest wiele możliwości kodowania wyrażeń języka PA przez liczby naturalne:

- funkcja  $\beta$  Gödla (zob. wykład o zbiorach i relacjach rekurencyjnych i rekurencyjnie przeliczalnych);
- kodowanie Smullyana opisane w [wykładzie dodatkowym](#);
- kodowanie w [bazie dziesiętnej](#);
- itp.

Ważne są dwie rzeczy:

- kodowanie musi być jednoznaczne i obliczalne;
- punktem wyjścia powinien być rekurencyjny zestaw pojęć logicznych (zob. niżej).



# Rekurencyjne kodowanie pojęć logicznych

Następujące pojęcia metamatematyczne są rekurencyjne:

- Zbiór  $ng$  zmiennych,
- Zbiór  $ng$  termów,
- Zbiór  $ng$  formuł,
- Relacja  $podst(m, n) = r$  zachodząca, gdy  $r$  jest numerem formuły otrzymanej z formuły (o jednej zmiennej wolnej) o numerze  $n$  przez podstawienie w miejsce tej zmiennej liczebnika  $\bar{m}$ ,
- Relacja między  $ng$  formuły a  $ng$  jej zmiennej wolnej,
- Relacja podstawialności termu za zmienną w formule,
- Relacja zachodząca między  $ng$  przesłanek i  $ng$  wniosku reguł wnioskowania PA,
- Zbiór  $ng$  aksjomatów PA,
- Relacja  $dow(m, n)$  zachodząca, gdy ciąg formuł o numerze  $m$  jest dowodem formuły o numerze  $n$ .

# Mocna reprezentowalność pojęć logicznych w PA

Można udowodnić, że istnieją formuły  $\underline{podst}(x, y) = z$  oraz  $\underline{dow}(x, y)$  języka PA takie, że dla dowolnych liczb naturalnych  $m, n$  oraz  $r$ :

- jeśli  $podst(m, n) = r$ , to  $PA \vdash \underline{podst}(\bar{m}, \bar{n}) = \bar{r}$
- jeśli nie zachodzi  $podst(m, n) = r$ , to  $PA \vdash \neg \underline{podst}(\bar{m}, \bar{n}) = \bar{r}$
- jeśli  $dow(m, n)$ , to  $PA \vdash \underline{dow}(\bar{m}, \bar{n})$
- jeśli nie zachodzi  $dow(m, n)$ , to  $PA \vdash \neg \underline{dow}(\bar{m}, \bar{n})$ .

Innymi słowy, formuły  $\underline{podst}$  oraz  $\underline{dow}$  mocno reprezentują relacje  $podst$  oraz  $dow$ , odpowiednio. Istnienie tych formuł wynika z faktu, że każda relacja rekurencyjna jest mocno reprezentowalna w PA.

# Relacja dowodliwości w PA

Formuła  $\exists x \text{ dow}(x, \bar{n})$  stwierdza, że formuła o numerze  $n$  jest twierdzeniem PA.

Zdefiniujmy relację jednoargumentową (a więc zbiór liczb naturalnych)  $tw$ :

$$tw(n) \equiv \exists x \text{ dow}(x, n).$$

Wtedy  $tw$  jest rekurencyjnie przeliczalny.

Jest to zbiór ng wszystkich twierdzeń PA.

Ponieważ nie możemy z góry ograniczyć długości dowodów twierdzeń PA, więc kwantyfikatora egzystencjalnego w definicji  $tw$  nie możemy zastąpić kwantyfikatorem ograniczonym.

Zbiór  $tw$  nie jest zbiorem rekurencyjnym.

# Uwaga na definicje!

Definicja relacji  $tw$ :

$$tw(n) \equiv \exists x \text{ dow}(x, n).$$

podana jest w [metajęzyku](#).

Podobnie rzecz ma się z definicjami relacji  $podst$  oraz  $dow$ .

Formuły  $podst$  oraz  $dow$ , które — odpowiednio — mocno reprezentują te relacje są wyrażeniami języka PA.

W języku PA możemy zdefiniować predykat jednoargumentowy  $tw(x)$  taki, że:

$$\underline{tw}(\bar{n}) \equiv \exists x \underline{dow}(x, \bar{n}).$$

## Jak wyrazić niesprzeczność PA w PA?

Jak pamiętamy z kursu logiki, teoria  $T$  jest **niesprzeczna**, gdy nie istnieje formuła  $A$  jej języka taka, że zarówno  $A$  jak i  $\neg A$  są twierdzeniami  $T$ . Ta definicja jest równoważna następującej: teoria  $T$  jest **niesprzeczna** wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna formuła jej języka nie jest twierdzeniem  $T$ .

Można udowodnić, że PA jest **trafna**, tj. że każde twierdzenie PA jest prawdziwe w PA.

Innymi słowy, w PA nie jest dowodliwa żadna formuła fałszywa w PA.

Dla wyrażenia **w PA** niesprzeczności PA można więc wybrać jakąś formułę fałszywą w PA.

Niech będzie nią np. formuła:  $\neg \text{tw}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ , którą oznaczymy przez  $\text{Con}_{PA}$ .

# Konstrukcja zdania Gödla

Niech  $\text{god}(y)$  będzie skrótem dla formuły  $\neg \exists x \text{ dow}(x, \text{podst}(y, y))$  oraz niech  $n$  będzie numerem formuły  $\text{god}(y)$ .

Wtedy: formuła  $\text{god}(\bar{n})$  stwierdza, że formuła o numerze  $\text{podst}(n, n)$  nie ma dowodu.

Ale  $\text{podst}(n, n)$  jest właśnie numerem formuły  $\text{god}(\bar{n})$ .

Widać więc, że formuła  $\text{god}(\bar{n})$  stwierdza o sobie samej, że nie jest twierdzeniem.

# Konstrukcja zdania Gödla

Co można (prawdziwie!) powiedzieć o formule  $\underline{god}(\bar{n})$ ?

- Czy  $\underline{god}(\bar{n})$  jest dowodliwa?
- Czy  $\underline{god}(\bar{n})$  jest prawdziwa?

Co można (prawdziwie!) powiedzieć o formule  $\neg\underline{god}(\bar{n})$ ?

- Czy  $\neg\underline{god}(\bar{n})$  jest dowodliwa?
- Czy  $\neg\underline{god}(\bar{n})$  jest prawdziwa?

# Koniec

Na następnym, ostatnim wykładzie:

- odpowiemy na powyższe cztery pytania;
- pokażemy, jak rozważania dotyczące (matematycznych reprezentacji) obliczalności mogą zostać wykorzystane w pewnych innych ważnych twierdzeniach metalogicznych.