

# ZAGADKI

## WYKŁAD 2: LICZBY I WIELKOŚCI

W szkole *przemocą* nauczono cię tabliczek: dodawania i mnożenia. Zmuszono cię również do poznania algorytmicznych *przepisów*, ustalających jak (całkowicie bezmyślnie) dodawać, mnożyć, odejmować i dzielić liczby. Potem jeszcze były potęgi, pierwiastki, logarytmy. Do dzisiaj jednak nie wiesz, ani *czym* właściwie są liczby (naturalne, całkowite, wymierne, rzeczywiste, zespolone), ani *czym* właściwie jest ich dodawanie, mnożenie, itd. Czy istnieją inne rodzaje liczb niż te, o których mówiono w szkole? Jakie jeszcze rozważa się operacje na liczbach i po co? Czy istnieją wielkości nieskończenie wielkie lub nieskończenie małe? Czy o liczbach (prędzej czy później) dowiemy się wszystkiego czy też istnieją *prawdy* o liczbach, które *dowodem* matematycznym nie są osiągalne? Czy *każdy* zbiór liczb naturalnych możemy w jakiś efektywny sposób opisać?

Dość łatwo dajemy sobie radę z zagadkami, których rozwiązanie wymaga wykonania jedynie prostych operacji arytmetycznych, jak np. w takiej zagadce:

Matka jest obecnie o 21 lat starsza od swojego dziecka. Za 6 lat dziecko będzie 5 razy młodsze od matki. Pytanie: gdzie obecnie jest ojciec?

Niech bowiem  $x$  oznacza obecny wiek dziecka. Wtedy:

1. Obecny wiek matki to  $21 + x$ .
2. Wiek matki za 6 lat to  $27 + x$ .
3. Wiek dziecka za 6 lat to  $x + 6$ .
4. Na mocy warunków zadania:  $5(x + 6) = 27 + x$ , czyli  $4x = -3$ .
5. Rozwiązaniem tego równania jest  $x = -\frac{3}{4}$ .
6. Oznacza to, że następuje właśnie akt poczęcia dziecka.
7. Jeśli nie jest to poczęcie *in vitro*, to ojciec jest przy nim obecny.

To był oczywiście żart, a nie poważna zagadka. Bardziej skomplikowane zagadki o liczbach mogą wymagać np. ułożenia układu równań, skorzystania z własności relacji podzielności, wykorzystania arytmetyki modularnej (znanej ci choćby w zakresie korzystania z zegarka), itd.

## 1 Wiek dzieci

Wyobraź sobie następujący dialog:

- Ile lat mają twoje dzieci?
- Mam trójkę dzieci, iloczyn ich lat wynosi 36.
- To nie wystarcza dla ustalenia wieku każdego z nich!
- Suma ich lat równa jest liczbie okien w kamienicy naprzeciwko.
- To też nie wystarcza!
- Najstarsze ma zezę.
- No, wreszcie! Teraz już wiem, ile lat ma każde z trójki.  
Ile lat ma każde z dzieci?

## 2 Ciąg Mosera-Steinhaus

Wprowadźmy oznaczenia:

1.  $\triangle n$  oznacza  $n^n$
2.  $\square n$  oznacza iterowanie  $n$  razy operacji  $\triangle$  dla argumentu  $n$
3.  $\star n$  oznacza iterowanie  $n$  razy operacji  $\square$  dla argumentu  $n$ .

Czy potrafisz obliczyć  $\star 2$ ?

## 3 Butelka z korkiem

Butelka z korkiem kosztuje 1.10 zł. Butelka jest o złotówkę droższa od korka. Ile kosztuje butelka, a ile korek?

## 4 $e^\pi$ oraz $\pi^e$

Która z liczb: 1 oraz  $0.99999\dots$  (czyli nieskończony ułamek okresowy  $0.(9)$ ) jest większa? Ta zagadka zapewne znana jest większości czytelników. Rozwiązanie nie jest trudne. Niech  $x = 0.99999\dots$ . Wtedy:

1.  $10x = 9.9999\dots$
2.  $10x - x = 9x$
3.  $9x = 9.9999\dots - x$

4.  $9x = 9.9999\dots - 0.99999\dots$

5.  $9x = 9$

6.  $x = 1$ .

Niektórzy jednak nawet po zobaczeniu tego dowodu mają w dalszym ciągu wątpliwości dotyczące ostatniej równości. Z liczbami: naturalnymi, całkowitymi, a nawet wymiernymi jesteśmy dość dobrze oswojeni. Natomiast liczby rzeczywiste pozostają nieco tajemnicze. W konsekwencji, także operacje arytmetyczne na nich przeprowadzane mogą czasem sprawiać wrażenie trudno uchwytnych lub wręcz niezrozumiałych. Za przykład służyć może potęgowanie, powiedzmy liczb rzeczywistych do niewymiernego wykładnika. Dysponujemy oczywiście odpowiednią definicją tej operacji (korzysta się w niej z aksjomatu ciągłości oraz pojęcia granicy ciągu liczb wymiernych). Czy zadałaś na lekcji matematyki w szkole (nie-taktowne?) pytanie o to, ile wynosi  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ? Metodami znanymi ze szkoły możesz jednak rozstrzygnąć, która z liczb:  $e^\pi$  oraz  $\pi^e$  jest większa. Pokaż, że:  $e^x \geq x^e$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x \geq 0$ , a równość zachodzi tylko dla  $x = e$ .

## 5 Szczere wyznanie niewiedzy oznacza wiedzę

Rozważmy osoby  $S$  oraz  $P$  takie, że:

1. Brane pod uwagę są liczby naturalne  $x$  oraz  $y$  takie, że obie są większe od 1, natomiast ich suma jest mniejsza od 100. Zarówno  $S$ , jak i  $P$  o tym wie.
2.  $S$  zna tylko sumę  $x + y$  dwóch liczb naturalnych.
3.  $P$  zna tylko iloczyn  $x \cdot y$  dwóch liczb naturalnych.
4.  $S$  wie, że  $P$  zna iloczyn  $x \cdot y$ .
5.  $P$  wie, że  $S$  zna sumę  $x + y$ .

Przypuśćmy teraz, że miał miejsce następujący dialog:

1.  $P$ : Nie wiem, jakimi liczbami są  $x$  oraz  $y$ .
2.  $S$ : Wiem, że tego nie wiesz.
3.  $P$ : Teraz już wiem, jakie to liczby.
4.  $S$ : Teraz ja też już wiem, jakie to liczby.

Wiedząc, że ów dialog miał miejsce (i zakładając szczerłość  $S$  oraz  $P$ ), my także możemy ustalić o jakie liczby  $x$  oraz  $y$  chodzi. Ponadto, możemy pokazać, że zagadka ma dokładnie jedno rozwiązanie (przy podanych warunkach). Wreszcie, można także ustalić rolę poszczególnych warunków, jeśli chodzi o jednoznaczność rozwiązania. Spróbuj.

## 6 Ile ważeń?

W dziesięciu workach znajdują się monety, w każdym tysiąc monet. Dziewięć worków zawiera wyłącznie monety prawdziwe, a jeden wyłącznie monety fałszywe. Prawdziwa moneta waży 14g, a fałszywa 15g. Mamy do dyspozycji precyzyjną wagę, która wytrzyma obciążenie do 100kg. Jaka jest minimalna liczba ważeń, która pozwoli z całkowitą pewnością ustalić, który worek zawiera fałszywe monety?

## 7 17 koni

Ojciec zostawia w spadku trzem synom 17 koni, życząc sobie, aby spadek podzielono (wedle starszeństwa) w stosunku:  $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{9}$ , a przy tym oczywiście nie wolno dzielić koni na kawałki. Czy można zatem wypełnić ostatnią wolę konającego?

## 8 Dwaj kaci

Kat pracujący starą metodą wykona całą pracę w 15 dni, natomiast kat pracujący nową metodą wykona taką samą pracę w 10 dni. Ile dni potrzeba im na wykonanie tej pracy wspólnie (każdy pracuje swoją metodą)? Porównaj matematyczną treść zagadki z jej interpretacją fizyczną.

## 9 Żeglarze, kokosy i małpa

Na bezludną wyspę trafia pięciu rozbitków-marynarzy oraz małpa. W dzień zbierają kokosy, którymi się żywią, a w nocy śpią. Pewnej nocy jeden z marynarzy budzi się i chcąc zapewnić uczciwy podział zapasów wszystkich kokosów dzieli je na pięć równych zbiorów, swoją część ukrywa, zostaje mu jeden kokos, który daje małpie. Dokładnie to samo robi drugi z marynarzy, który budzi się później: dzieli pozostały zapas na pięć części, swoją ukrywa, zostaje mu jeden kokos, który daje małpie. Ta sama historia powtarza się z trzecim, czwartym i piątym marynarzem. Rano marynarze budzą się, dzielą pozostałe zapasy na pięć części, zostaje

jeden kokos, który dają małpie. Pytanie brzmi: jaka (najmniejsza możliwa) liczba kokosów została zgromadzona poprzedniego dnia?

## 10 Trójki pitagorejskie

Ze szkoły pamiętasz, że liczby 3, 4 oraz 5 są długościami boków trójkąta prostokątnego. Zapewne rozwiązywałaś też zadania, w których pojawiały się inne liczby tworzące długości boków trójkąta prostokątnego. Nietrudno jest ci również pogodzić się z myślą, że – skoro istnieje nieskończenie wiele trójkątów prostokątnych – istnieje nieskończenie wiele liczb (rzeczywistych)  $a$ ,  $b$  oraz  $c$ , spełniających zależność:  $a^2 + b^2 = c^2$ . Czy jednak potrafisz udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych (lub wymiernych)  $a$ ,  $b$  oraz  $c$  dla których zachodzi  $a^2 + b^2 = c^2$ ? Czy można podać jakieś wzory, generujące wszystkie liczby naturalne tego rodzaju? Układ  $(a, b, c)$  liczb  $a$ ,  $b$  oraz  $c$  takich, że  $a^2 + b^2 = c^2$  nazywamy *trójką pitagorejską*. Mówimy, że trójka pitagorejska jest *pierwotna*, jeśli wszystkie liczby  $a$ ,  $b$  oraz  $c$  są wzajemnie względnie pierwsze. Szukając trójek pitagorejskich wśród liczb naturalnych wystarczy oczywiście skupić się na trójkach pierwotnych: jeśli  $(a, b, c)$  jest pierwotną trójką pitagorejską, to dla każdej dodatniej liczby naturalnej  $d$ , układ  $(ad, bd, cd)$  jest trójką pitagorejską.

---

Rozwiązania zagadek podane zostaną na wykładzie.

---

Jerzy Pogonowski  
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza  
www.logic.amu.edu.pl