Zagadki Matematyczne

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

KHL LIX, 2013

Plan na dziś:

- Treść odczytu wiąże się z prowadzoną przez prelegenta w UAM dydaktyką: www.logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
- Pośrednio wiąże się też z jego działaniami, mającymi znamiona czynności badawczych.

- Omówimy kilkanaście zagadek matematycznych, zrozumiałych dla uczniów szkoły średniej.
- Zagadki będą dotyczyły: nieskończoności, ruchu, kształtu, uporządkowania, prawdopodobieństwa.
- Rozwiązania niektórych zagadek stanowią wyzwanie dla intuicji utrwalanych poprzez doświadczenie potoczne.
- Wykorzystujemy ilustracje dostępne w sieci.

Znani mistrzowie zagadek matematycznych:

- Archimedes (piasek, stado, ostomachion)
- Sissa (szachownica)

- Euler (mosty w Królewcu, 36 oficerów)
- Lucas (wieże Hanoi)
- Chapman (15 puzzle)
- Dudeney (*536 Puzzles and Curious Problems*)
- Carroll (zagadki logiczne)

- Conway (game of life, Conway's army)
- Steinhaus (*Kalejdoskop matematyczny*)
- Smullyan (zagadki logiczne)

Zobaczyć Nieskończone

- Paradoksy równoliczności (łapówki, Hotel Hilberta).
- Pełne drzewo dwójkowe i metoda przekątniowa.
- Supertasks (mucha, lampa Thomsona).

- Spirale: Archimedesa $r = a\varphi$, logarytmiczna $r = ae^{b\varphi}$, ślimak Teodorosa $\tan(\varphi_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
- Niech $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$, gdzie $a_n \in \mathbb{R}_+$ dla $n \in \mathbb{N}$. Budujemy spiralę z odcinków o długościach: a_1, $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots$ (powiedzmy, prawoskrętną, kąt skrętu $-\frac{\pi}{2}$). Długość tej spirali to: $2\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Dla ciągu $a_n = \frac{1}{n}$ spirala ma długość nieskończoną (rozbieżność szeregu harmonicznego!), ale mieści się na ograniczonym obszarze. Dla ciągu $a_n = q^{n-1}$ oraz $q = \frac{95}{100}$ spirala ma długość 40.

Głosujemy: dojdzie czy nie?

Po doskonale elastycznej linie o początkowej długości 1 km drepcze mrówka z prędkością 1 cm/sek (względem liny). Lina rozciąga się z prędkością 1 km/sek. Mrówka startuje z lewego, nieruchomego końca liny. Czy dojdzie w skończonym czasie do prawego jej końca?

Demony bywają pomocne

Rozwiązanie *ciągłe* wymaga całkowania równania różniczkowego, czyli rzeczy w polskiej szkole zabronionej. Załóżmy więc, że wraz z wybiciem każdej sekundy linę rozciąga Demon (o Demonach wolno mówić – zapytaj Panią Katechetkę): po pierwszej sekundzie z 1 do 2 km, po 2 sekundzie z 2 do 3 km, itd. A mrówka cały czas drepcze...

Jaką część długości całej liny przebywa mrówka w każdej kolejnej sekundzie?

W ciągu sekundy	mrówka pokonuje	część całej długości
pierwszej	1cm z 1km	$\frac{1}{100000}$
drugiej	1cm z 2km	$\frac{1}{200000}$
trzeciej	1cm z 3km	$\frac{1}{300000}$
n-tej	1cm z $n$km	$\frac{1}{n \cdot 100000}$

Brawo, mrówa! Dać jej piwa!

Czy istnieje liczba n taka, że suma: $\frac{1}{100000} + \frac{1}{200000} + \frac{1}{300000} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 100000}$ będzie równa 1, czyli całej długości liny?
Szukamy n takiej, dla której: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = 100000$.

- *Liczby harmoniczne*: $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
- Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest *rozbieżny*. Porównajmy bowiem:
  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots >$
  $1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}) + \ldots =$
  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = \infty$

Istnieje zatem n taka, że $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \geqslant 100000$. Mrówka dojdzie do prawego końca liny w skończonym czasie!

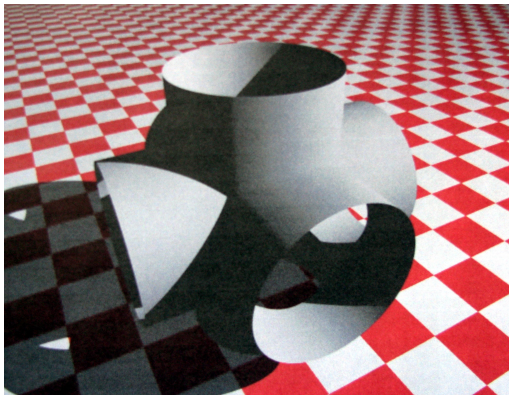
Ciułanie ułamków

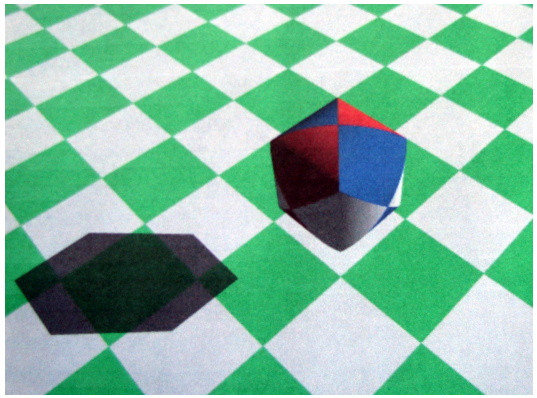
- Pragnienie arcybiskupa (róg Gabriela).
- Zboczenica/pedofilka (*lion and man problem*).
- Czy istnieje szereg najwolniej rozbieżny? Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem malejącym o wyrazach dodatnich. Jeśli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to rozbieżny jest także szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$, gdzie $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

- Jeep problem
- Wytrzymałość materiałów
- Wybór najlepszej kandydatki
- Nieskończony nawis

3D cień Jezusa

Jaką bryłę tworzy część wspólna trzech ortogonalnych walców?





- Mark Haddon: *Dziwny przypadek psa nocną porą.*
- Józef Kajfosz: *Biblia w świetle geometrii czterowymiarowej.*

Wyobraźnia geometryczna

Jakimi obiektami można całkowicie (i bez nakładania się na siebie) wypełnić przestrzeń trójwymiarową?

- Czy $\mathbb{R}^3$ można całkowicie wypełnić *okręgami* i *jedną prostą*?
- Czy $\mathbb{R}^3$ można całkowicie wypełnić *okręgami* i *jedną prostą* w taki sposób, aby prosta ta przechodziła *wewnątrz* każdego z tych okręgów, a ponadto *każde* dwa z tych okręgów były względem siebie usytuowane jak ogniwa łańcucha?
- Czy $\mathbb{R}^3$ można całkowicie wypełnić *prostopadłościanami z wyciętą wewnątrz prostopadłościenną dziurą*?

Inne zagadki: upakowania, pokrycia, symetrie, wielokomórki.
Matematyka i fizyka w różnych wymiarach.

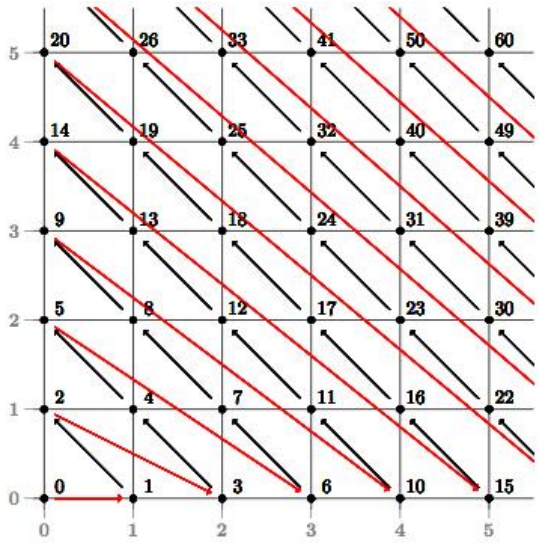
Uroda patologii

- Zbiory Smitha-Cantora-Volterry: nigdziegęste, miara dodatnia.
- Krzywa Weierstrassa: wszędzie ciągła, nigdzie nie różniczkowalna.
- Funkcje: Dirichleta i Thomae, sad Euklidesa.
- Krzywe Peany i Hilberta: ciągłe, wypełniające kwadrat.

- Sfera rogata Alexandera: „grzeczne" wnętrze, „dzikie" dopełnienie.
- Twierdzenie Smale'a (o przenicowaniu sfery S^2 w przestrzeni $\mathbb{R}^3$).
- Jeziora Wady: wspólne granice trzech obszarów.
- Krzywa Knastera: kontinuum dziedzicznie nierozkładalne.
- Konstrukcja Pontriagina: trójwymiarowy produkt przestrzeni dwuwymiarowych.

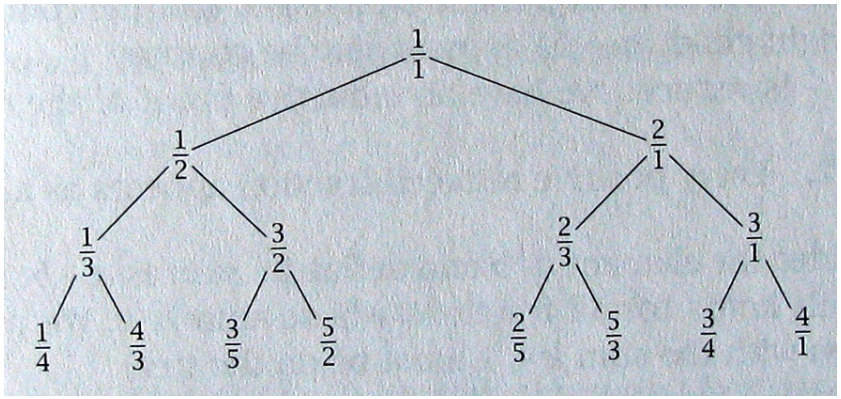
Jak grzecznie uporządkować wszystkie ułamki $\geqslant 0$?

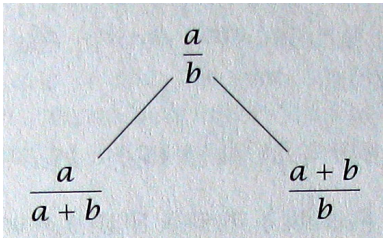
- Bijekcja $c : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- $c(x, y) = y + \sum_{i=0}^{x+y} i = y + \frac{1}{2}(x + y)(x + y + 1)$



Co to znaczy, że uporządkowanie (struktury algebraicznej) jest *naturalne*?

Drzewo Calkina-Wilfa

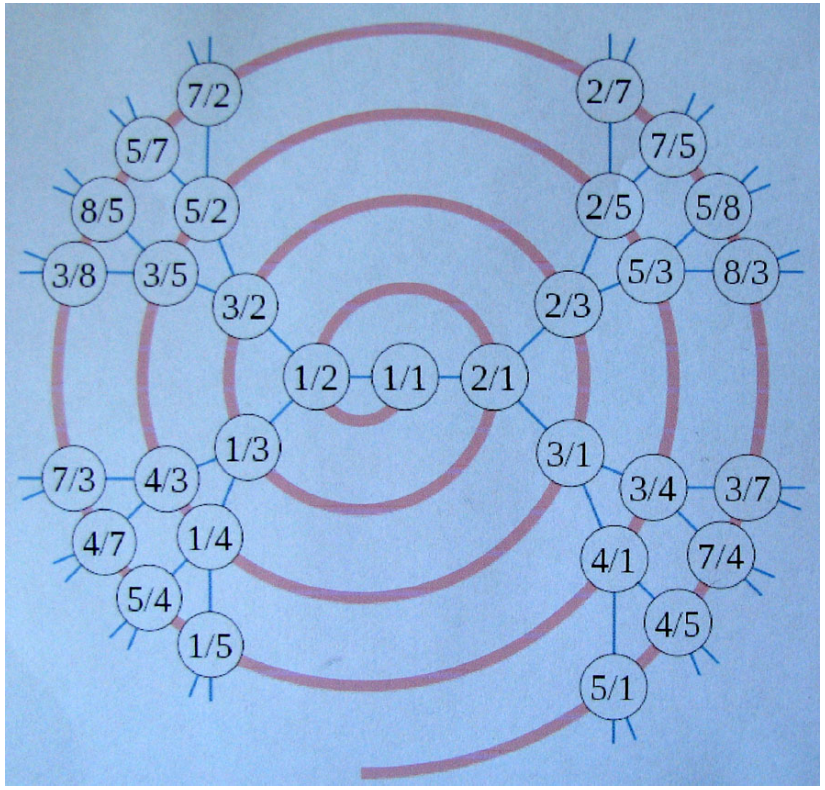




Wszystkie te ułamki są w postaci nieskracalnej. Każda dodatnia liczba wymierna występuje w tym drzewie dokładnie raz.

$q(1) = 1$ oraz $q(n+1) = \frac{1}{\lfloor q(n) \rfloor - (q(n) - \lfloor q(n) \rfloor) + 1}$ dla $n \geqslant 1$,
gdzie $\lfloor x \rfloor$ to największa liczba naturalna $\leqslant x$.

Spirala ułamków

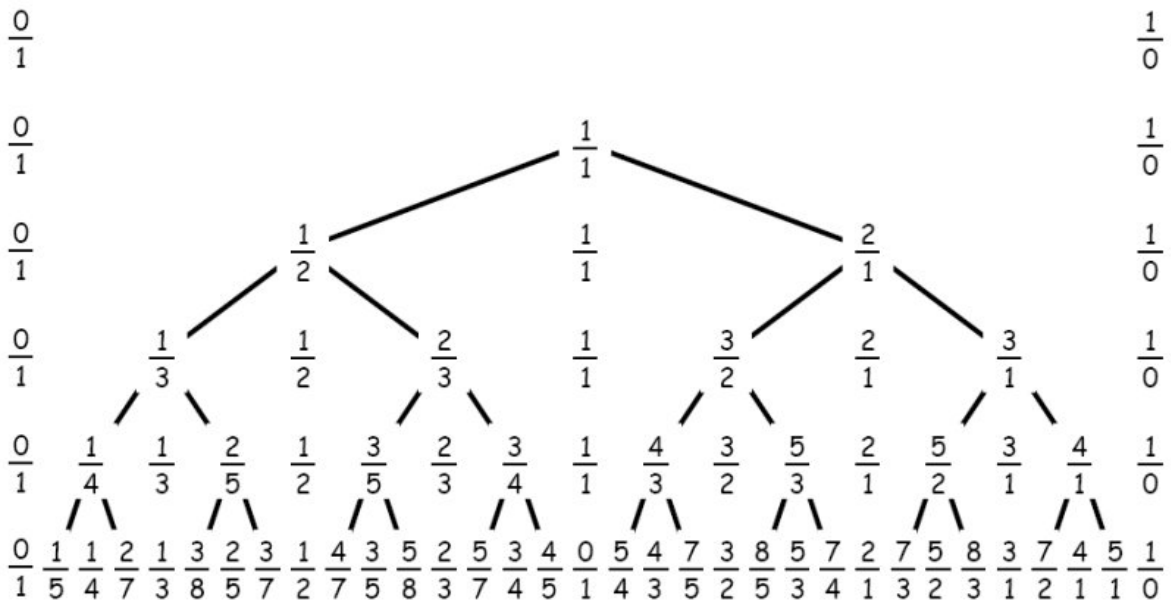


Każda dodatnia liczba wymierna jest postaci $\frac{b(n)}{b(n+1)}$ $(n \geqslant 0)$, gdzie $b(0) = b(1) = 1$ oraz:

$$b(2n+1) = b(n), \quad b(2n+2) = b(n) + b(n+1).$$

Zmowa matematyka z zegarmistrzem

Czy dodawanie $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ jest głupie?



Wszystkie te ułamki są w postaci nieskracalnej. Każda dodatnia liczba wymierna występuje w tym drzewie dokładnie raz.

Jak trafić do wybranego ułamka?

- $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$
- Do każdego ułamka prowadzi (dokładnie jeden!) ciąg skrętów (od korzenia $\frac{1}{1}$) w lewo L oraz w prawo P. Dla przykładu: $\frac{4}{7}$ to $LPLL$.
- Przy interpretacji $L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ każdy ułamek $\frac{a+c}{b+d}$ reprezentowany jest macierzą $\begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix}$. Np.:

$$LPPL = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \mapsto \frac{5}{7}$$

Mnożenie macierzy:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Zrób łańcuszek z ułamka

- Ciąg przybliżeń liczby e w drzewie Sterna-Brocota to nieskończona gałąź:
  $e \mapsto PL^0PLP^2LPL^4PLP^6LPL^8PLP^{10}LPL^{12}\ldots$
- Drzewo Sterna-Brocota ma związek np. z:
  - przedstawieniem liczb wymiernych w postaci ułamków łańcuchowych,
  - algorytmem Euklidesa,
  - liczbami Fibonacciego $F_0 = 0,\ \ F_1 = 1,\ \ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$,
  - ciągami Fareya oraz okręgami Forda.

Przypomnijmy: $\frac{153}{53} = 2 + \frac{47}{53} = 2 + \frac{1}{\frac{53}{47}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{6}{47}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{47}{6}}} =$
$2 + \frac{1}{1+\frac{1}{7+\frac{5}{6}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{7+\frac{1}{\frac{1}{\frac{6}{5}}}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{7+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}} = [2; 1, 7, 1, 5]$

Regularności w rozwinięciu π?

Liczba	rozwinięcie łańcuchowe
wymierna	skończone
niewymierny pierwiastek kwadratowy	okresowe
niewymierna	nieskończone

Dla przykładu: $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$, $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots] = [1; \overline{1, 2}]$.

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\ddots}}}}} = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{4^2}{9+\ddots}}}}} = 3 + \cfrac{1^2}{6+\cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\ddots}}}}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, 1, 1, \ldots], \qquad e = 2 + \cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\ddots}}}}$$

Kogo lubią dziewczyny?

Przypuśćmy, że dziewczęta X, Y, Z chcą ustalić, który z facetów A, B, C jest najbardziej przystojny. Niech preferencje poszczególnych dziewcząt wyglądają następująco (piszemy $P > Q$ w znaczeniu: wybór P jest preferowany względem wyboru Q; preferencje każdego dziewczęcia są *przechodnie*):

- X: $A > B > C$
- Y: $B > C > A$
- Z: $C > A > B$.

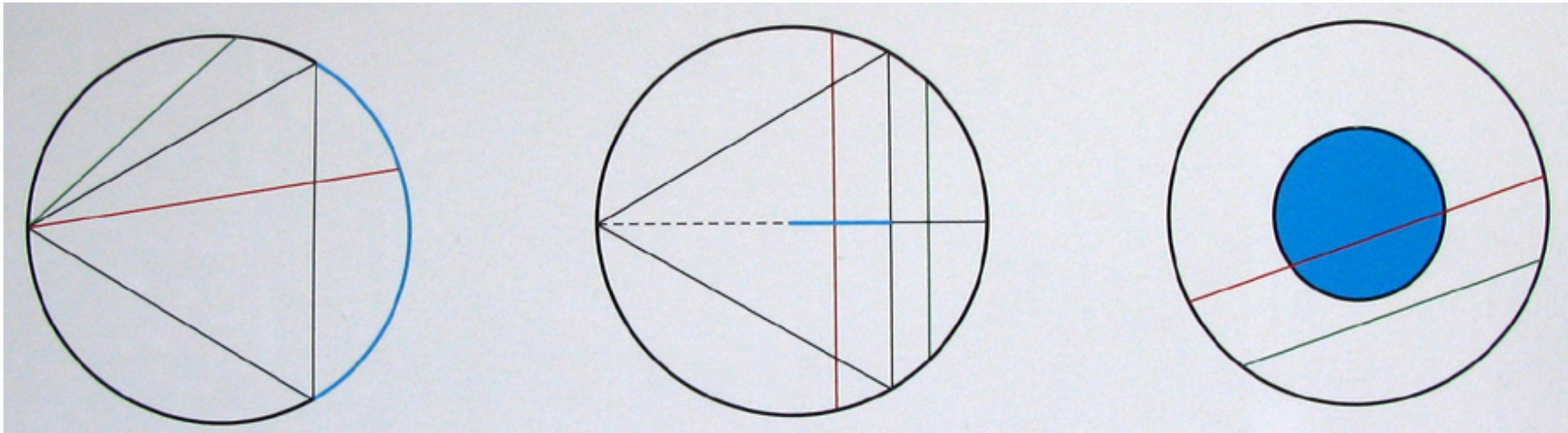
Czy możliwe jest liniowe uporządkowanie kandydatów zgodne z preferencjami większości dziewcząt? NIE, ponieważ:

1. $\frac{2}{3}$ dziewcząt uważa, że A jest bardziej przystojny od B.
2. $\frac{2}{3}$ dziewcząt uważa, że B jest bardziej przystojny od C.
3. $\frac{2}{3}$ dziewcząt uważa, że C jest bardziej przystojny od A.

K. Ciesielski, Z. Pogoda: *Królowa bez nobla*

Wybieramy losowo cięciwę okręgu o promieniu długości 1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie ona dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg?

1. $\frac{1}{3}$: wykorzystujemy długość łuku.
2. $\frac{1}{2}$: wykorzystujemy długość odcinka.
3. $\frac{1}{4}$: wykorzystujemy pole.



Los nie jest całkiem ślepy

- Rozważamy rzuty *monetą doskonałą*.
- *Ciąg nieskończenie dystrybutywny*: dla każdego z 2^n możliwych wyników dla ciągu kolejnych n rzutów: układ taki pojawia się z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2^n}$.
- *Ciąg von Misesa*: każdy nieskończony ciąg (wyników rzutów monetą doskonałą), którego dowolny podciąg nieskończony (a więc jakkolwiek wybrany) jest nieskończenie dystrybutywny.

- Wydaje się, że ciągi von Misesa dobrze charakteryzują pojęcie *całkowitej losowości*. Jednak:
- Ciągi von Misesa nie istnieją.

Inne zadania: aproksymacja liczb rzeczywistych. Twierdzenia Dirichleta i Rotha.

Zagadki logiczne Raymonda Smullyana

W trakcie wykładu w 2013 roku korzystaliśmy z zagadek Smullyana:

- *Na Zawsze Nierozstrzygnięte. Zagadkowy Przewodnik Po Twierdzeniach Gödla.*

Omawialiśmy też wybrane paradoksy i sofizmaty.

W przygotowaniu znajdują się tłumaczenia:

- *Alicja w Krainie Zagadek*
- *Labirynty Logiczne*
- *Magiczny Ogród George'a B.*

Oczekujemy na: Raymond Smullyan *The Gödelian Puzzle Book: Puzzles, Paradoxes and Proofs*. Dover Publications (August 21, 2013).

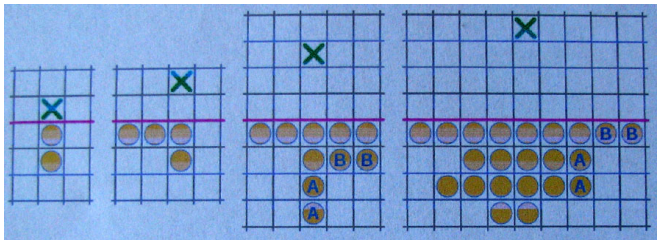
Osiągnięte cele dydaktyczne:

Obserwowana aktywność intelektualna słuchaczy na tych zajęciach zdaje się potwierdzać przypuszczenie, że dzisiejszym studentom łatwiej przychodzi przyswajanie *wiedzy rozproszonej* (krótko sformułowane problemy i rozwiązania) niż spójnych bloków systematycznie wykładanych teorii. Rozwiązywanie kolejnych zagadek nie układa się w żadną jednorodną całość (nie ma *zastępować* wykładu, powiedzmy, logiki), ale może stanowić dobry trening umysłowy owocujący później umiejętnością radzenia sobie z nowymi problemami.

Zagadki dobierane są tak, aby ich rozwiązywanie pozwalało na skorygowanie niektórych pochopnych poglądów, żywionych na podstawie mniej lub bardziej precyzyjnie określonych *intuicji doświadczenia potocznego*. Istotne jest to, w jaki sposób myśl poczęta postawieniem zagadki prowadzi do rozwiązania – jakie pomysły, prawa, metody, techniki są przy tym wykorzystywane.

Jak wysoko można zajść?

Ruchy: pionowo lub poziomo, usuwając przeskakiwany pionek.



				x^1	T	x^1				
			x^3	x^2	x^1	x^2	x^3			
	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	
			x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	x^6		
			x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	x^7		
x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}
x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}
x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}
x^{13}	x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	x^{13}

$P_1 : \ x^5 + x^6 \quad P_2 : \ x^5 + 2x^6 + x^7 \quad P_3 : \ x^5 + 3x^6 + 3x^7 + x^8$

Metryka Manhattan: $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

Reguły w bitwie o poziom piąty

1. $x^{n+2} + x^{n+1}$ zostaje zastąpione przez x^n
2. $x^n + x^{n-1}$ zostaje zastąpione przez x^n
3. $x^n + x^{n+1}$ zostaje zastąpione przez x^{n+2}.

Wartość $x > 0$ dobieramy tak, aby wartość otrzymanego wielomianu zmniejszała się w drugim i trzecim z powyższych przypadków, a pozostawała niezmieniona w pierwszym z nich. Skoro $x > 0$, to $x^n + x^{n-1} > x^n$. Jeśli ma być $x^n + x^{n+1} > x^{n+2}$, to $1 + x > x^2$, co daje nierówność $0 < x < \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Wreszcie, dla pierwszego warunku nasz wielomian ma nie zmieniać wartości, czyli ma zachodzić $x^{n+2} + x^{n+1} = x^n$. To oznacza, że $x + x^2 = 1$, a więc jeśli przyjmiemy $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, to wszystkie wymagane warunki są spełnione oraz zachodzi $x + x^2 = 1$. Celowi T nadajemy wartość 1.

Wartość nieskończonej armii

- Każda z konfiguracji pionków opisana jest skończonym wielomianem. Jego wartość będzie zatem mniejsza od sumy szeregu nieskończonego (który interpretować możemy jako wartość nieskończonej armii): $P = x^5 + 3x^6 + 5x^7 + 7x^8 + \ldots = x^5(1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots)$.
- $S = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots$
- $xS = x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \ldots$
- $S - xS = S(1 - x) = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \ldots$
- $S(1 - x) = 1 + 2(x + x^2 + x^3 + \ldots)$
- $S(1 - x) = 1 + \frac{2x}{1-x} = \frac{1+x}{1-x}$
- $S = \frac{1+x}{(1-x)^2}$
- Ponieważ $P = x^5 S$, więc $P = \frac{x^5(1+x)}{(1-x)^2}$.

Nieosiągalny poziom piąty

- Przypomnijmy, że nasz wybór wartości dla x spełnia warunek $x + x^2 = x(1 + x) = 1$, a więc $1 + x = \frac{1}{x}$ oraz $1 - x = x^2$.
- Tak więc: $P = \frac{x^5(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{x^5(\frac{1}{x})}{(x^2)^2} = \frac{x^4}{x^4} = 1$.

- Oznacza to, że wartość przypisana każdej początkowej (skończonej!) konfiguracji pionków poniżej bariery musi być mniejsza od 1, a ponieważ każdy ruch albo zmniejsza wartość konfiguracji, albo pozostawia ją bez zmian, więc wartość żadnego z pionków nie osiągnie nigdy 1.
- A to znaczy, że żaden pionek ze skończonej armii pod barierą, niezależnie od tego jak licznej i jak sprytnie rozstawionej, nigdy nie osiągnie poziomu piątego.

Opróżnianie pudełka

Przypuśćmy, że masz nieskończenie wiele kul, ponumerowanych dodatnimi liczbami całkowitymi, przy czym każda taka liczba jest umieszczona na nieskończenie wielu kulach (masz więc nieskończenie wiele kul z jedynką, nieskończenie wiele z dwójką, nieskończenie wiele z trójką, itd.). Masz też pudełko, które zawiera skończenie wiele ponumerowanych kul. Celem zabawy jest opróżnienie pudełka, wedle następującej reguły. W każdym kroku wyjmujesz pewną kulę, a na jej miejsce wkładasz całkiem dowolną liczbę kul o mniejszych numerach. Ponieważ nie ma mniejszych od jedynki dodatnich liczb całkowitych, więc kuli z jedynką niczym nie zastępujesz. Rozwiązanie wygląda prosto: wystarczy, że zastąpisz każdą kulę w pudełku kulą z jedynką, a potem wyjmiesz te wszystkie kule z jedynką po kolei. Ciekawe w tej zabawie jest jednak to, że nie można z góry ograniczyć liczby kroków potrzebnych to opróżnienia pudełka – pamiętajmy, że można „utrudniać" poprzez dokładanie dowolnej skończonej liczby kul, byle o numerze mniejszym niż numer kuli zastępowanej.

Lemat Königa w działaniu

Zabawę tę przedstawić można w postaci drzewa o ponumerowanych wierzchołkach. Początkową zawartość pudełka reprezentują wierzchołki wychodzące bezpośrednio z korzenia drzewa. Zastępowanie jakiejś kuli (liścia drzewa) zbiorem innych polega na dołączeniu, w miejsce usuwanego liścia, całego zbioru nowych liści, reprezentujących kule, zastępujące usuwaną kulę. Drzewo „rośnie w górę" w miarę jak zastępujemy usuwane kule nowymi. Zauważmy, że na każdej gałęzi drzewa występują kule o coraz mniejszych numerach. Ponadto, każdy wierzchołek drzewa ma tylko skończenie wielu bezpośrednich potomków. Gdyby drzewo miało nieskończoną liczbę wierzchołków, to (na mocy *Lematu Königa*) musiałoby mieć gałąź nieskończoną. To jednak jest niemożliwe, ze względu na wspomniany już fakt, że numery na każdej gałęzi maleją, w miarę oddalania się od korzenia drzewa. Tak więc, zabawa w opróżnianie pudełka musi zakończyć się w skończonej liczbie kroków.