

O błądzeniu w matematyce

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
www.logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
pogon@amu.edu.pl

14X2015

Plan na dziś:

Historia

- Typy i przyczyny błędów matematycznych.
- Słynne błędy matematyczne: przykłady klasyczne.
- Słynne błędy matematyczne: przykłady współczesne.

Dydaktyka

- Błędy uczniów, studentów, nauczycieli.
- Diagnostyka, profilaktyka, terapia.

Ciekawostki

- Sofizmaty matematyczne.
- Przesady, iluzje, oszustwa matematyczne.

Pułapki intuicji

- Butelka z korkiem kosztuje 1,10 zł. Butelka jest o złotówkę droższa od korka. Ile kosztuje butelka, a ile korek?
 - Znajdź następny wyraz ciągu 2, 4, 8, 16, ...
 - Czy istnieje bryła, której cienie z trzech wzajem ortogonalnych kierunków są: kołem, trójkątem równobocznym i kwadratem?
 - Weźmy trzy ortogonalne walce o promieniu jednostkowym, których osie są osiami układu współrzędnych. Jaka bryła jest ich częścią wspólną?
-
- Korek kosztuje 5 groszy, a butelka (bez korka) 105 groszy.
 - Niech $a_n = 2^n + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x$. Za a_5 możemy przyjąć dowolną wartość a , jeśli weźmiemy $x = \frac{a-32}{24}$.
 - Tak. Zobacz rysunek.
 - Zobacz rysunek.

Sztuczki Eulera

Szereg Grandiego. Niech $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$. Mamy:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0, \text{ ale także:}$$

$$S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1. \text{ Jeśli } S \text{ miałyby być sumą}$$

$$\text{rozważanego szeregu, to: } S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots =$$

$$1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - S, \text{ czyli } 2S = 1, \text{ a zatem}$$

$$S = \frac{1}{2}.$$

Euler (który traktował ∞ jak liczbę), uzasadniał, iż $\infty < -1$, ponieważ:

- $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots = \frac{1}{1-2x}$ (suma ciągu geometrycznego);
podstawiając $x = 1$ mamy: $1 + 2 + 4 + 8 + \dots = -1$
- Skoro $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = \infty$, a kolejne wyrazy tego szeregu są nie większe od odpowiadających im wyrazów szeregu $1 + 2 + 4 + 8 + \dots$, to $\infty < -1$.

Styl Gaussa i styl Eulera

- *Pseudaria* Euklidesa.
 - Kiedy błąd matematyczny staje się sławny?
-
- Dowód matematyczny a dowód w sensie logiki.
 - Matematyka a świat fizyczny.
-
- Listy błędów matematycznych: Lecat 1935, Lietzmann 1958, Posamentier, Lehmann 2013.
 - Dyskusje: mathoverflow.net/ oraz math.stackexchange.com/
 - Listy kontrprzykładów: Gelbaum, Olmsted 2003, Steen, Seebach 1995, Wise, Hall 1993. Klasyka: Lakatos 1976.

Próżny trud klasyfikowania?

- Fałszywe wyniki, błędy formalne i materialne, niekompletne dowody, nietrafne hipotezy.
- Poprawne wyniki, które społeczność matematyków uważa początkowo za błędne.

Typy

- Błędy analogii, indukcji, uogólnień.
- Sugestie fizyczne (w tym: rysunki), kłopoty semantyczne.

Przyczyny

- Nieuwaga, niekompetencja, złudne intuicje fizyczne.
- Brak podstaw logicznych, duża złożoność problemów.

Inspirujące błędy

- *V postulat Euklidesa.*
- *Galileusz: brachistochrona.*
- *Euler: sumowanie szeregów.*
- *Euler: 36 oficerów.*
- *Cauchy: zbieżność ciągów funkcyjnych.*
- *Pierwiastniki.*
- *Cantor: pojęcie granicy.*
- *Cantor: nieskończenie małe.*
- *Lebesgue: rzuty zbiorów Borelowskich.*
- *Włoska szkoła geometrii algebraicznej.*
- *Wielkie Twierdzenie Fermata i jednoznaczność rozkładu.*
- *Błędne hipotezy w teorii liczb.*

Nowa matematyka, nowe błędy

- Matematyka klasyczna i matematyka intuicjonistyczna.
 - Teoria mnogości: raj matematyczny czy uleczalna zaraza?
-
- *Hipoteza Borsuka.*
 - *Hipoteza Mertensa.*
-
- *Problem Malfattiego.*
 - *Grafy Perko.*
-
- *Zadanie Freudenthala i błąd Gardnera.*
 - *Paradoks Bertranda.*

Nie tylko Frege. . .

- *Lewis Carroll: od błędnej heurystyki do poprawnej metody.*
 - *Ernst Zermelo: paradoks Skolema.*
 - *Ernst Zermelo: korespondencja z Gödlem.*
-
- *Gabelbarkeitssatz Rudolfa Carnapa.*
 - *Aksjomat ograniczenia Fraenkla.*
-
- *Program Hilberta i jego ograniczenia.*
 - *König: hipoteza continuum.*
 - *Rzekoma rozstrzygalność KRP.*

Powaga zeszytów szkolnych

- *Równanie jako polecenie wykonania działania.*
- *Szukanie symetrii.* Nie pamiętając stosownych faktów, uczniowie czasem konfabulują, „na siłę” próbując odnajdywać różnego rodzaju symetrie.
- Dodawanie ułamków. Zdarzają się takie próby: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+b}{c+d}$. Przy okazji omawiania takiego błędu można wspomnieć np. o drzewie Sterna-Brocota.
- Jak przystępnie wytłumaczyć dziecku, że iloczyn dwóch liczb ujemnych jest dodatni?
- Nieuprawnione założenia o własnościach operacji, np. założenie, iż branie średniej arytmetycznej jest operacją łączną.

Udręka Podstawy Programowej

- Czy szkoła niszczy kreatywność matematyczną uczniów?
 - Nauczyciel(ka) matematyki: kwalifikacje, porażki, sukcesy.
-
- Błędy w zadaniach maturalnych. Kilka lat temu kazano uczniom wykonać obliczenia przy założeniu, że małpa skacze z palmy na ziemię po odcinku linii prostej. Błąd ten pokazuje, jakie szkody w obrazie świata mogą powstawać, gdy wyrzucamy z programów szkolnych osiągnięcia matematyki.
 - Pytanie egzaminacyjne dotyczyło liczby ścian bryły, powstającej ze zlepiania czworościanu jednostkowego jedną z jego ścian ze ścianą boczną piramidy o podstawie kwadratowej oraz długości wszystkich krawędzi równej jeden. Błędna odpowiedź (nauczyciela): ponieważ przy takim zlepieniu znikają dwie ściany, więc liczba ścian powstałej bryły wynosi: $5 + 4 - 2 = 7$. Poprawna odpowiedź (studenta): 5.

Przykłady Zbigniewa Skoczylasa:

- Funkcja f jest monotoniczna w przedziale (a, b) , gdy wszystkie punkty z tego przedziału dają się połączyć prostą lub krzywą.
 - Po pomnożeniu obu stron równania przez x otrzymam:
$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sin} + \frac{1}{\cos} = x$$
 - Ponieważ cały okrąg ma równanie $x^2 + y^2 = r^2$, więc jego dolna połowa jest opisana wzorem $-\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = r^2$, a górna wzorem $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = r^2$.
-
- Wyobraźmy sobie sześcian, który ma sześć tysięcy ścian.
 - Niech zdarzenie A oznacza, że czerwony tramwaj jedzie z prawej strony. Wtedy zdarzenie przeciwne do A oznacza, że niebieski tramwaj jedzie z przeciwnej strony.
 - Z niemożliwości matematycznego rozwiązania posłużyłam się logiką.
 - Prawie wszystkie oznacza wszystkie, oprócz tych co nie należą.

Opinie dydaktyków matematyki

Niektóre przyczyny popełniania błędów:

- styl nauczania
- wzmocnienie tendencji algorytmicznych
- języki opisów, w tym sugestie płynące z wizualizacji problemu
- kontekst pojawienia się problemu
- przeciążenie informacyjne
- słabo wyćwiczone sprawności regulacyjne.

Niektóre proponowane środki zaradcze i naprawcze:

- metody aktywizujące ucznia
- strategie rozwiązywania problemów matematycznych.

Uciecha oszukiwania

- *Brakujący dolar*. Znane oszustwo.
 - *Złotówka równa groszowi*:

$$1\text{zł} = 100\text{gr} = (10\text{gr})^2 = (0.10\text{zł})^2 = 0.01\text{zł} = 1\text{gr}$$
 - Jak jest możliwe, że $\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$?
-
- *Dzielenie przez zero* (liczne znane sofizmaty).
 - *Koła Arystotelesa*. Mechanika a geometria.
-
- Rozkład trójkąta. Znany rysunek.
 - Podaj rozwiązania równania $x^2 + 9y^2 = 0$.

Matematyka w służbie pseudonauki

Przesady

- Numerologia, astrologia, fobie.
- Mylne utożsamienie: liczby i ich reprezentacje (w ustalonych bazach).

Iluzje

- Ziemia i sznurek.
- Drabina i ściana.
- Niemożliwe figury.

Oszustwa

- Oszustwa statystyczne.
- Prawo Benforda.

Błędy uzasadniają refleksję epistemologiczną

- Błędy poznawcze w ogólności polegają na tendencjach do myślenia w taki sposób, iż prowadzi to do systematycznego wypaczenia racjonalnego oglądu rzeczywistości.
 - Typy błędów poznawczych: zachowania, podejmowanie decyzji, przekonania, pamięć, stereotypy.
-
- Specyfika poznania matematycznego: matematyka jako nauka o wzorcach.
 - Kontekst odkrycia i kontekst uzasadnienia w matematyce.
-
- Dysracjonalia: niemożność racjonalnego myślenia i działania mimo posiadania odpowiedniej inteligencji (Stanovich 2009).

Co dalej?

- Uprzejmie dziękuję Panom Profesorom: Andrzejowi Klawiterowi oraz Krzysztofowi Łastowskiemu za zaproszenie do wygłoszenia tego odczytu.
 - Moja praca badawcza w Zakładzie Logiki i Kognitywistyki UAM będzie dotyczyła *poznania matematycznego*.
 - Za główny cel mojej postęgi dydaktycznej na Wydziale Nauk Społecznych UAM uważam *terapię matematyczną (dla dorosłych)*.
-
- Dalsze odczyty o tej problematyce: LXI Konferencja Historii Logiki (Kraków, 20-21x2015), Konferencja ArgDiap 2015 (Wrocław, 20-21xi2015). Streszczenie i bibliografia:
<https://sites.google.com/site/argdiap/argdiap-2015>
 - Tekst przygotowujący do druku: *Błędy matematyczne*.