ARTYKUŁY

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XXIV / 1999, s. 96–100*

Adam OLSZEWSKI

TEZA CHURCHA A PLATONIZM

Są dwa cele, które postawiłem sobie pisząc niniejszy artykuł. Pierwszy z nich dotyczy znalezienia jakiegoś argumentu przeciwko platonizmowi w filozofii matematyki, zaś drugi dotyczy znalezienia pewnych mocnych implikacji filozoficznych Tezy Churcha. Wydaje mi się, że osiągnąłem powyższe zamierzenia, pokazując jaki jest związek pomiędzy Tezą Churcha i platonizmem. Pierwsza część artykułu zawiera oryginalne sformułowanie Tezy Churcha wraz z krótkim komentarzem, zaś w drugiej precyzuję sens, w jakim rozważam tytułowy platonizm oraz tam formułuję swój główny argument.

1. Określenie Teza Churcha (w skrócie TC) pochodzi od Alonzo Churcha z pracy *An unsolvably problem of elementary number theory*[1]. Pisze on tam: „Celem niniejszej pracy jest zaproponowanie definicji efektywnej obliczalności, która to definicja koresponduje wystarczająco z cokolwiek niewyraźnym (*vague*), intuicyjnym pojęciem [...]" (s. 90), i dalej w przypisie trzecim: „Propozycja identyfikowania tych pojęć [funkcji rekurencyjnych λ–definiowalnych, uwaga moja A. O.] z intuicyjnym pojęciem efektywnej obliczalności została dokonana po raz pierwszy w niniejszym artykule. A także nieco dalej w przypisie: „Jednakże fakt, iż dwa tak dalece różne i (w opinii autora) równie naturalne definicje efektywnej obliczalności okazały się być równoważne, dodaje mocy racjom dla przyjęcia (*believing*) tezy, że konstytuują one ogólną charakterystykę efektywnej obliczalności w sposób spójny ze zwykłym, intuicyjnym jego rozumieniem" (s. 90 tłum. moje A. O.). Na stronie 100, pisze Church, iż propozycja identyfikacji pojęcia efektywnej obliczalności z pojęciem funkcji rekurencyjnej pochodzi od Gödla. Należy podkreślić, iż chodzi o funkcje określone w zbiorze liczb całkowitych nieujemnych. Wspomniany Kurt Gödel w artykule *On the length of proofs*[2],

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

[1] „The American Journal of Mathematics", 58 (1936), ss. 345–363; [przedruk w:] M. Davies (ed.), *The Undecidable*, Hewlett, New York 1965, ss. 89–107, do tego wydania pracy Churcha odnosić się będą numery stron.

[2] [W:] M. Davies (ed.) *The Undecidable*, Hewlett, New York, 1965, ss. 82–83; tłumaczenie i przedruk z: „Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums", 7 (1936), ss. 23–24.

pisze: „Tak więc, pojęcie ‘obliczalne’ jest w pewnym określonym sensie ‘absolutne’, podczas gdy praktycznie wszystkie inne metamatematyczne pojęcia (na przykład ‘dowiedlne’, ‘definiowalne’ etc.) zależą w sposób istotny od systemu, dla którego zostały zdefiniowane”.

Praktycznie każdy podręcznik logiki, w którym podejmowane są zagadnienia rozstrzygalności, zawiera jakieś sformułowanie TC oraz krótkiejej omówienie[3]. Świadczy to chyba o zainteresowaniu logików TC i o pewnym niepokoju z nią związanym. Otóż TC nie jest twierdzeniem matematycznym, ze względu na intuicyjne pojęcie efektywnej obliczalności występujące w jej sformułowaniu, a równocześnie przy jej założeniu dowodzi się twierdzenia o nierozstrzygalności logiki pierwszego rzędu[4]. Rodzi się wobec tego problem statusu TC. Można ją rozumieć co najmniej na następujące sposoby: jako definicję (Church), aksjomat (Kreise[5]), stwierdzenie o charakterze empirycznym[6]. Argumenty przemawiające za przyjęciem TC rozpadają się na trzy kategorie: (a) argumenty heurystyczne, wypływające z braku kontrprzykładów (b) argumenty bazujące na bezpośredniej i wyczerpującej symulacji aktu obliczania przez człowieka, (c) argumenty oparte na fakcie stwierdzonym matematycznie, iż różne próby uściślenia pojęcia efektywnej obliczalności (maszyny Turinga, funkcje rekurencyjne, λ–rachunek Churcha, algorytmy Markowa) wyróżniają tę samą klasę funkcji[7]. Pośród rozmaitych argumentów krytycznych wobec TC są takie, które ukazują jej paradoksalne konsekwencje, jak choćby krytyka dokonana przez Kalmara[8]. Filozofowie

[3]W niektórych przypadkach TC jest sformułowana niezgodnie z intencją Churcha i sprowadzona do postaci ściśle matematycznej. Por. na przykład: Yu. L. Ershov, E. A. Palyutin *Mathematical Logic*, Mir Publishers, Moscow 1984, s. 249.

[4]Problem „stopu” jest nierozstrzygalny, jeśli założymy prawdziwość TC. W tej sprawie por. G. Boolos, R. Jeffrey, *Computability and Logic*, Cambridge University Press, 1989, ss. 112–120.

[5]G. Kreisel, *Church's Thesis: A kind of reducibility axiom for constructive mathematics*, [w:] J. Myhill, A. Kino, R. Vesley (eds), *Intuitionism and Proof Theory*, Amsterdam 1970, ss. 121–150.

[6]Por. pracę licencjacką napisaną pod kierunkiem ks. prof. M. Hellera przez Jacka Dębca na Papieskiej Akademii Teologicznej w Krakowie w 1998 roku. Owa praca zatytułowana *Status oraz implikacje filozoficzne Tezy Churcha — zarys problemu* jest zwięzłym przedstawieniem ujęć TC, argumentów za i przeciw TC oraz prezentacją szerszego tle zagadnienia.

[7]Por. np. R. Murawski, *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. A. Mickiewicza, Poznań 1991.

[8]L. Kalmar, *An argument against the plausibility of Church's Thesis*, [w:] *Constructivity in Mathematics*, A. Heyting (ed.), North–Holland Publ. Comp., Amsterdam 1959, ss. 72–80.

rzadko zdają sobie sprawę ze znaczenia i roli TC, w przeciwieństiwie do logików[9].

2. Poprzez platonizm, wymieniony w tytule artykułu, rozumieć będziemy ten kierunek w filozofii matematyki, którego przedstawiciele twierdzą, iż obiekty matematyczne istnieją w świecie idei. W swoim bycie są niezależne od czasu, przestrzeni i poznającego podmiotu[10]. Wstępem do tego świata jest niesprzeczność. Trudno chyba w jakiś racjonalny sposób argumentować za prawdziwością, czy też słusznością stanowiska platońskiego w filozofii matematyki. Jest to raczej słabo uzasadnione przekonanie, przedmiot wiary. Z tego też powodu trudno jest znaleźć jakiś argument przeciwko niemu[11].

Poniżej zostanie przedstawiony pewien argument o charakterze filozoficznym, który powinien ustalić pewną zależność wymienioną w tytule artykułu. Przyjmijmy, że TC jest prawdziwa. Przyjmijmy również, że jest tak jak uważają platonicy, w powyżej wyróżnionym sensie. Można na tej podstawie wnosić, iż wszystkie funkcje, określone w zbiorze liczb naturalnych wraz z zerem już istenieją. Załóżmy, że dysponujemy jakąś maszyną, zbudowaną na bazie komputera, która korzystając z jakiegoś peryferyjnego urządzenia w sposób losowy rzyca monetą. Każdy kolejny rzyt (jego numer) oraz wynik każdego rzutu jest notowany na odpowiednim nośniku (zbiorem wartości byłyby 0 i 1). Gdyby ten proces (przy pewnych założeniach) udało się prowadzić w nieskończoność, określona zostałaby pewna funkcja. Funkcja ta zostałaby, w pewnym sensie, skonstruowana. Jednak jako obiekt platoński istenije zawsze. Co więcej, dla dowolnej liczby naturalnej, będącej numerem kolejnego rzytu, można obliczyć wartość w tym punkcie. Wydaje się zatem, że jest ona obliczalna w sensie intuicyjnym. Trudno mi jednak wyobrazić sobie dowód jej obliczalności w sensie matematycznym[12]. Oba założenia: TC oraz istnienie platońskich obiektów doprowadziło do negacji TC. Pokazuje to, jak mi się wydaje, że oba wymienione założenia mogą być od siebie

---

[9]Por. filozoficzny artkykuł S. Shapiro, *Understanding Church's Thesis*, „Journal of Philosophical Logic", 10 (1981), ss. 353–365. Tam omówiona jest rola TC dla filozofii oraz waga całego zagadnienia.

[10]Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, PWN, Warszawa 1995, s. 154.

[11]Ciekawą rzeczą jest fakt, iż niektóre formalne ujęcia obliczalności, czynią pewne założenia odnośnie czasu, przestrzeni i możliwości poznającego podmiotu. W tej sprawie por. Bools, Jeffrey, *Computability and logic*, Cambridge University Press, 1989, ss. 19–20.

[12]Por. L. Kalmar, *An argument against the plausibility of Church's Thesis*, [w:] A. Heyting (ed.), *Constructivity in mathematics*, North–Holland Publ. Comp., Amsterdam 1959, s. 73, w sprawie jednorodności procedury obliczania.

w jakiś sposób zależne. Cały ten argument jest z pewnością problematyczny i nie całkiem jasny, dlatego z chęcią rozważę wszelkie uwagi krytyczne[13].

3. W niniejszej części artykułu pragnę, dla łatwiejszego uchwycenia, przedstawić schemat mego nieformalnego rozumowania.

(i)	(Teza Churcha)		(założenie)
(ii)	(Platonizm)	$\Rightarrow$	$\neg$ (Teza Churcha)
			(na podstawie opisanej funkcji)
(iii)	(Teza Churcha)	$\Rightarrow$	$\neg\neg$ (Teza Churcha)
			(podstawienie prawa logiki)
(iv)	$\neg\neg$ (Teza Churcha)	$\Rightarrow$	$\neg$ (Platonizm)
			(z (ii) na podstawie prawa logiki)
(v)	$\neg$ (Platonizm)		(z (iii), (iv), (i) i reg. odrywania)

Jaki widać przesłanka (ii) pełni tutaj decydującą rolę. Dla jej sformułowania potrzeba było, zakładając pewną postać platonizmu, dysponować metodą obliczania pewnej „dziwnej” funkcji.

[13]Por. G. Hunter, *Metalogika*, PWN, Warszawa 1982, zadania ze strony 18. Mój argument nie odnosi się do tych sformułowań pojęcia algorytmu, które wymagają, aby w definicji algorytmu nie występowała „przypadkowość”, czy też „empiryczność”, por. na przykład: H. Rogers Jr., *Recursive functions and effective computability*, McGraw–Hill Book, New York 1967, ss. 1–5 oraz E. Mendelson, *Second thoughts about Church's thesis and mathematical proofs*, „The Journal of Philosophy”, 87 (1990), ss. 225–233.