

# Intuicja Matematyczna

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM  
[www.logic.amu.edu.pl](http://www.logic.amu.edu.pl)  
[pogon@amu.edu.pl](mailto:pogon@amu.edu.pl)

Filozofia Matematyki III

# Cel projektu

- Celem jest przygotowanie *propedeutycznego* tekstu ukazującego intuicję matematyczną „w działaniu”.
  - Wykorzystujemy głównie prace matematyczne i historyczne, rzadziej – opracowania z filozofii matematyki.
- 
- Analizowane przykłady należą do: arytmetyki i teorii liczb, analizy, geometrii (i topologii), algebry, rachunku prawdopodobieństwa, teorii mnogości, teorii obliczalności, logiki matematycznej.
  - Piszemy m.in. o: zmienności i źródłach intuicji matematycznych, ich związkach z procedurami badawczymi matematyki.
  - Wykorzystujemy wybrane przykłady (ze stopniowaniem trudności) z prac popularnych.

# Czym jest intuicja matematyczna?

- Intuicje matematyczne uważamy za zbiory *przekonań* (w tym także wartościujących i normatywnych). Wystrzegamy się mówienia o *wiedzy* intuicyjnej.
- Rozważamy *poziomy* intuicji matematycznej: *elementarny* (przekonania narzucone w edukacji szkolnej) oraz *zaawansowany* (przekonania zawodowych matematyków).
- Niektóre własności intuicji matematycznych (za: Davis, Hersh *Świat matematyki*); *intuicyjne* oznacza:
  - przeciwstawione ścisłemu, wizualne, niekompletne,
  - prawdopodobne lub przekonujące,
  - oparte na modelu fizycznym, holistyczne.

Ważne: intuicja a poczucie piękna w matematyce.

# Intuicja w działaniu

- 1 Aspekt *globalny*: tworzenie nowych teorii lub rozwijanie teorii w wybranym kierunku (inspiracje, motywacje, itp.).
  - 2 Aspekt *lokalny*: wspomaganie rozumienia dowodów oraz konstrukcji (np. rysunkami), wskazówki indukcyjne, obrazowe skojarzenia, itp.
- 
- 1 Przykłady: od rozwiązywania równań do teorii grup, od liczb pierwszych do ideałów, od topologii ogólnej do algebraicznej, aksjomaty ekstremalne w teorii mnogości, itd.
  - 2 Przykłady: mówienie, że elementy filtru są „duże”, „prawdziwość z prawdopodobieństwem 1” Hipotezy Riemanna, wizualizacje uniwersum zbiorów, diagramy, rysunki, wykresy, itp.

# Dynamika intuicji

- Przykłady zmian przekonań intuicyjnych: algebra (pierwiastniki), analiza (nieskończenie małe), geometria (rola geometrii Euklidesa), teoria mnogości (aksjomaty ekstremalne).
- Paradoksy i antynomie jako niektóre z przyczyn zmian intuicji. Klasyczne przykłady: *niewymierność*, *paradoks Russella*, *paradoksy nieskończoności*.
- Zbieżność intuicji początkowo różnych (lub wypieranie jednych intuicji przez inne): algebra (wektory – Hamilton vs Grassmann), analiza (początki rachunku różniczkowego), obliczalność (teza Churcha-Turinga).
- Przykłady rozbieżności intuicji: teoria mnogości (aksjomaty ekstremalne, AC *versus* AD).

# Normalne i dziwne

- Kiedy intuicja matematyczna podąża za standardem, normalnością?
  - Standardowe (normalne, „dobrze zachowujące się”) niekoniecznie dotyczy *większości* obiektów, przypadków, itp.
  - Pragmatyczny aspekt w odróżnieniach: standard, wyjątek, patologia.
- 
- Standard: model standardowy PA, zbiory Borelowskie, przestrzenie Hausdorffa, funkcje analityczne, ciała  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  oraz  $\mathbb{C}$ ,...
  - Wyjątek: sfera rogata, wielościany foremne, grupy sporadyczne, egzotyczna  $\mathbb{R}^4$ , 2 wśród liczb pierwszych, iloczyn wektorowy,...
  - Patologia: krzywe patologiczne, patologiczne klasy spełniania, liczne konstrukcje topologiczne,...

Obiekty, przedstawiane jako patologiczne w literaturze popularnej bywają normalnymi, standardowymi obiektami w matematyce profesjonalnej (np. zbiór Cantora).

# Błędy intuicji

- Paralogizmy, błędy nieuwagi lub niekompetencji.
  - Pożytki z sofizmatów (np. dla teorii miary).
  - Czy aksjomat konstruowalności Gödla wyraża *błędne* intuicje?
- 
- Intuicje wielkich matematyków okresu przedaksjomatycznego. Przypadki „wyprzedzania swojej epoki”.
  - Wtórność intuicji zawartych w aksjomatach: podstawy aksjomatyczne wielu działów matematyki tworzone były dopiero po nagromadzeniu wiedzy (!) w danej dyscyplinie.
  - Dowodzenie jako potwierdzanie intuicji: przemiana mniemań w wiedzę.

# Komplementarne intuicje

- Intuicje wzajem sprzeczne – czy jest to sytuacja możliwa w matematyce? Co przesądza o unifikacji intuicji matematycznych?
  - Intuicje komplementarne: np. AC i AD (ale AC ma walor ogólności, zaś AD związany jest tylko z wybraną przestrzenią).
- 
- Czysto formalne operowanie niektórymi obiektami (np. liczbami zespolonymi) przed uznaniem ich za „oficjalnie istniejące”.
  - Co począć ze zdaniem nierozstrzygalnymi (w arytmetyce i teorii mnogości)? Czy decydujący głos będzie miała praktyka badawcza matematyki?
  - Przypuśćmy, że w epidemii wymarli wszyscy matematycy klasyczni, pozostali tylko intuicjoniści. Co dalej z matematyką?



# Nic nie jest takie, jakim się wydaje

Iluzje optyczne:

- Lokalna zgodność, globalna niezgodność (sześcián Neckera, trójkąt Penrose'a, grafiki Eschera, itp.).
  - Jak iluzje optyczne zależą od tła? Por. np. przedstawienia powierzchni jednostronnych na płaszczyźnie lub w przestrzeni trójwymiarowej.
- 
- Iluzje związane ze słuchem, dotykiem lub zmysłem równowagi.
  - Czy matematyka jest bez zapachu (i bez smaku)?
  - Percepcja czy wyobrażanie sobie obiektów matematycznych? Które liczby porządkowe są „intuicyjnie uchwytny”?

# Eksperymenty myślowe i filozofia matematyki

- Jak nasze uposażenie poznawcze determinuje *naszą* matematykę? Matematyka Rozumnych Kleksów.
  - Dlaczego przemienność? Dlaczego dwuwartościowość?
  - *Matematyka z Kosmosu* – przykład Barrowa.
- 
- Różnorodność poglądów dotyczących intuicji matematycznej we współczesnej filozofii matematyki.
  - Tieszen: fenomenologiczne ujęcie intuicji matematycznej.
  - Jak *moda matematyczna* kształtuje intuicje?

# Przemoc symboliczna

- Matematyka w przekazie kulturowym. Przemoc symboliczna w szkole (i na uniwersytecie).
  - Komu wolno mieć oryginalne intuicje matematyczne?
- 
- Zmiany w programach nauczania matematyki:
    - Naśladowanie Euklidesa;
    - Nacisk na metody indukcyjne i heurystyczne;
    - New Math;
    - Agresja informatyki.

# Koniec

Artykuły związane z projektem:

- *Intuicja matematyczna w działaniu.*
  - *Intuicja matematyczna a paradoksy.*
  - *Intuicja matematyczna: przypadki siedmiu pojęć.* [Liczba, Kontinuum, Przestrzeń, nieskończoność, Funkcja, Struktura, Obliczenie.]
- 
- Czy – zdaniem audytorium – warto kontynuować projekt? Jeśli tak, to jakie wprowadzić poprawki?
  - Uprzejmie dziękuję Panu Profesorowi Romanowi Murawskiemu za zaproszenie do wygłoszenia odczytu.