Metody dowodowe: wstęp

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
http://logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
pogon@amu.edu.pl

MDTiAR

Wymagania

- Korzystać będziemy z wiadomości przekazanych na kursach: *Wprowadzenie do logiki*, *Logika I*, *Logika II*.
- Kurs *Matematyczne podstawy kognitywistyki* nie był obowiązkowy dla studentów obecnego V roku. Potrzebne nam pojęcia matematyczne będą omawiane na bieżąco.

- Konwersatoria 1–7 prowadzi Jerzy Pogonowski
- Kolokwium I (na konwersatorium 8)
- Konwersatoria 9–14 prowadzi Szymon Chlebowski
- Kolokwium II (na konwersatorium 15)
- Syllabus jest dostępny na stronach ZLiK.

Kurs kończy się egzaminem.

1. Preliminaria matematyczne i logiczne oraz uwagi historyczne
2. Ogólne operacje konsekwencji
3. Metoda aksjomatyczna
4. Postacie normalne i prefiksowe
5. Tablice analityczne Smullyana
6. Rezolucja
7. Dedukcja naturalna
8. Rachunki sekwentów
9. Dual tableaux (diagramy Rasiowej-Sikorskiego)
10. Metody dowodowe: zalety, wady, wzajemne związki
11. Wybrane twierdzenia metalogiczne i metody ich dowodzenia
12. Teoria rekursji a metody dowodowe
13. Automatyzacja rozumowań
14. Rozstrzygalność
15. Dowody matematyczne.

1. Fitting, M. 1996. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving*. Springer, Berlin.
2. Ławrow, I.A., Maksimowa, Ł.L. 2004. *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
3. Pogorzelski, W.A. 1992. *Elementarny słownik logiki formalnej*. Wydawnictwo Filii Uniwersytetu Warszawskiego, Białystok.
4. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*: http://plato.stanford.edu/ (artykuły poświęcone teorii dowodu oraz automatyzacji rozumowań: *The development of proof theory*, *Automated reasoning*).

- Proponuję także lekturę zamieszczonych na stronach ZLiK materiałów dydaktycznych: Pani Dr Doroty Leszczyńskiej-Jasion, Pana Prof. Mariusza Urbańskiego oraz Pana prof. Andrzeja Wiśniewskiego.

1. D'Agostino, M., Gabbay, D., Hähnle, R., Posega, J. (Eds.) 1999. *Handbook of Tableaux Methods*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.
2. Gallier, J. 2003. *Logic for Computer Science. Foundations of Automated Theorem Proving*. Dover Publications, Mineola, New York.
3. Kaye, R. 2007. *The Mathematics of Logic. A guide to completeness theorems and their applications*. Cambridge University Press, Cambridge.
4. Negri, S., von Plato, J. 2001. *Structural Proof Theory*. Cambridge University Press, Cambridge.
5. Nerode, A., Shore, R.A. 1997. *Logic for Applications*. Springer-Verlag, New York.
6. Orłowska, E., Golińska-Pilarek, J. 2011. *Dual Tableaux: Foundation, Methodology, Case Studies*. Springer, Dordrecht Heidelberg London New York.
7. Smullyan, R. 1968. *First-Order Logic*. Springer, Berlin.

Uciechy szkolne

- Podano kilkaset dowodów Twierdzenia Pitagorasa. Znasz co najmniej jeden?
- Czy istnieje największa liczba pierwsza?
- Szok cywilizacyjny: wielkości niewspółmierne. Czy równanie $n^2 = 2m^2$ ma rozwiązanie dla względnie pierwszych liczb $m, n \in \mathbb{N}$, $m > 0$?
- Czy $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną czy niewymierną?
- Jak obliczyć $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$?
- Czy możliwa jest kwadratura koła?

- Szkoła uczyła głownie prostych algorytmów. Pamiętasz algorytm dzielenia Euklidesa? Urocze ułamki łańcuchowe wygoniono ze szkoły.
- Dlaczego różniczkowanie jest łatwiejsze od całkowania?

Uciechy studenckie

- Wykładnicze okrucieństwo algorytmu $0-1$. Cóż, Mądra Księga nie obiecywała, że wszystkie algorytmy będą działać w czasie wielomianowym.
- Okrucieństwo metody aksjomatycznej: co dobre dla teorii, niekoniecznie jest przyjazne (Człowiekowi, a nawet Maszynie).
- Metody dowodowe popularne współcześnie: tablice analityczne, rezolucja, dedukcja naturalna, rachunki sekwentów.
- Współcześnie stosowane notacje (znasz) i notacje porzucone (Frege, Leśniewski).
- Algorytmiczne pożytki z diagramów Venna i Carrolla.

Rozważmy dwa przykłady argumentacji:

- Nasza Pani od Biologii i Nietoperze
- „Milicja, Wrocław i ja"

Nasza Pani od Biologii i Nietoperze

- Nasza Pani od Biologii opowiada o Nietoperzach: *Jeśli Nietoperze nie mają piór, to: są Ptakami, o ile fruwają.* Nasza Pani od Biologii wyciąga z kieszeni Nietoperza i stwierdza: *Nietoperze nie mają piór.* Nasza Pani od Biologii zagląda do podręcznika systematyki Zwierząt i stwierdza: *Ale przecież Nietoperze nie są Ptakami.* Nasza Pani od Biologii konkluduje: *A zatem Nietoperze nie fruwają.*
- p: *Nietoperze mają pióra.*
- q: *Nietoperze fruwają.*
- r: *Nietoperze są Ptakami.*
- Przesłanka: $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- Przesłanka: $\neg p$
- Przesłanka: $\neg r$
- Wniosek: $\neg q$

Nasza Pani od Biologii i Nietoperze

Drzewo argumentacji (dowodu) ma postać następującą:

$$\dfrac{\neg r \qquad \dfrac{\neg p \to (q \to r) \qquad \neg p}{q \to r}}{\neg q}$$

W tej argumentacji posłużono się kolejno regułami:

- *modus ponens*
- *modus tollens*.

Argumentacja jest poprawna z logicznego punktu widzenia. Wniosek jest fałszywy, a zatem któraś z przesłanek jest fałszywa.

„Milicja, Wrocław i ja”

Czy na podstawie uznania następujących stwierdzeń:

- *Jeśli nie udowodniono podejrzanemu popełnienia morderstwa, to: stwierdzono samobójstwo denata lub wykonano sentencję wyroku, o ile udało się zatrzymać podejrzanego.*
- *Podejrzanemu nie udowodniono popełnienia morderstwa.*
- *Nie stwierdzono samobójstwa denata.*
- *Udało się zatrzymać podejrzanego.*

gotowa jesteś uznać stwierdzenie:

- *Wykonano sentencję wyroku*?

Uwaga: musimy podjąć decyzję dotyczącą reprezentacji składniowej pierwszej przesłanki.

„Milicja, Wrocław i ja"

Zdania proste w tym tekście:

- p: *Udowodniono podejrzanemu popełnienie morderstwa.*
- q: *Stwierdzono samobójstwo denata.*
- r: *Udało się zatrzymać podejrzanego.*
- s: *Wykonano sentencję wyroku.*

- Przesłanka: $\neg p \rightarrow (q \vee (r \rightarrow s))$
- Przesłanka: $\neg p$
- Przesłanka: $\neg q$
- Przesłanka: r
- Wniosek: s

„Milicja, Wrocław i ja"

Drzewo argumentacji (dowodu):

$$\frac{r \qquad \dfrac{\neg q \qquad \dfrac{\neg p \qquad \neg p \to (q \lor (r \to s))}{q \lor (r \to s)}}{r \to s}}{s}$$

W tej argumentacji posłużono się kolejno regułami:

- *modus ponens* (*reguła odrywania*)
- *opuszczania alternatywy*
- *modus ponens*.

Argumentacja jest *poprawna* z logicznego punktu widzenia.

Ku Wrogiej Sztucznej Inteligencji?

- Dowody (w sensie logicznym): dobrze określone obiekty syntaktyczne.
- Dowody matematyczne: argumentacje stosowane w matematyce.
- Dogmat: każdy dowód matematyczny może zostać przekształcony w dowód w sensie logicznym.

- Algorytm: czysto mechaniczna procedura, pozwalająca w skończonej liczbie prostych, z góry określonych kroków uzyskać wynik (odpowiedź, rozwiązanie).
- Intuicyjne pojęcie *procedury obliczalnej* poddano formalizacji, na wiele sposobów: funkcje rekurencyjne, maszyny Turinga, systemy Posta, algorytmy Markowa, rachunek λ Churcha, itd.
- Uzyskano wyniki dotyczące *niezupełności* oraz *nierozstrzygalności* ważnych teorii matematycznych.

Optymistyczne początki

- Początki logiki: Arystoteles, Stoicy, logicy Średniowiecza, Leibniz.
- Początki logiki matematycznej: De Morgan, Boole, Peano, Frege, Pierce, Schröder, Russell, Leśniewski, Łukasiewicz,...

- Nurt algebraiczny w logice
- Stanowiska filozoficzne: logicyzm, formalizm, intuicjonizm
- Inspiracje matematyczne

- Szkoła Lwowsko-Warszawska
- Podstawy matematyki i metalogika
- 4T: teoria dowodu, teoria modeli, teoria rekursji, teoria mnogości
- Uwaga: bardziej szczegółowe informacje historyczne podawane będą podczas kolejnych wykładów.

Złoty wiek XX

- David Hilbert (1862–1943) i jego program
- Ernst Zermelo (1871–1953): teoria mnogości
- Emil Post (1897–1954): algebra logiki, systemy Posta
- Gerhard Gentzen (1909–1945): dedukcja naturalna, sekwenty
- Alan Turing (1912–1954): teoria obliczeń
- Jacques Herbrand (1908–1931): twierdzenie Herbranda, obliczalność
- Thoralf Skolem (1887–1963): teoria mnogości, arytmetyka
- Kurt Gödel (1906–1978): niezupełność PM, teoria mnogości
- Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966): intuicjonizm
- Alonzo Church (1903–1995): nierozstrzygalność KRP
- Stanisław Jaśkowski (1906–1965): dedukcja naturalna
- Alfred Tarski (1903–1983): teoria modeli
- Adolf Lindenbaum (1904–1941): lemat Lindenbauma

Nadchodzi Matrix

- Błogosławiony Rajmund Lull (*Doctor Illuminatus*, 1232–1315): logika w służbie nawracania niewiernych.
- Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716): prekursor logiki formalnej.

- Od mechanicznych kalkulatorów do elektronicznych maszyn cyfrowych.
- Matematyczne reprezentacje obliczeń. Teza Churcha-Turinga.
- Automatyczne dowodzenie twierdzeń: ile można osiągnąć?

- Marciszewski, W., Murawski, R. 1995. *Mechanization of reasoning in a historical perspective*. Rodopi, Amsterdam-Atlanta.
- Ligonniére, R. 1992. *Prehistoria i historia komputerów*. Ossolineum, Wrocław-Warszawa-Kraków.

Drzewem (o korzeniu x_0) nazwiemy każdy układ $\langle X, R, x_0 \rangle$ taki, że:

1. $\langle X, R \rangle$ jest grafem o zbiorze *wierzchołków* X i zbiorze *krawędzi* $R \subseteq X \times X$;
2. R jest częściowym porządkiem w X;
3. x_0 jest elementem R-najmniejszym w X;
4. zbiór wszystkich R-poprzedników każdego wierzchołka jest liniowo uporządkowany przez relację R.

- *Liśćmi* drzewa D nazywamy wszystkie te jego wierzchołki, które nie mają R-następników.
- Jeśli $(x, y) \in R$ jest krawędzią w D, to x nazywamy *przodkiem* y, a y nazywamy *potomkiem* x. Jeśli $(x, y) \in R - R^2$ jest krawędzią w D, to x nazywamy *bezpośrednim przodkiem* y, a y nazywamy *bezpośrednim potomkiem* x.

- Każdy podzbiór zbioru wierzchołków drzewa D, który jest uporządkowany liniowo przez R nazywamy *łańcuchem* w D (czasem: *ścieżką* w D). Każdy łańcuch maksymalny (względem inkluzji) w D nazywamy *gałęzią* w D.
- Przez *długość* łańcucha P rozumiemy liczbę elementów zbioru P.
- *Rzędem* wierzchołka x nazywamy moc zbioru wszystkich bezpośrednich potomków x. *Rzędem* drzewa D jest kres górny rzędów wszystkich wierzchołków drzewa D.
- Drzewo D jest *skończone*, jeśli zbiór jego wierzchołków jest skończony; w przeciwnym przypadku jest *nieskończone*. Drzewo D jest *rzędu skończonego* (jest *skończenie generowane*), jeśli każdy jego wierzchołek ma rząd skończony.
- Przez indukcję definiujemy *poziomy* drzewa:
  1. poziom *zerowy* to zbiór jednoelementowy, złożony z korzenia drzewa;
  2. poziom $k+1$ to zbiór wszystkich bezpośrednich następników wierzchołków poziomu k.

Oswajanie drzew

- W dalszym ciągu będziemy rozważać głównie drzewa skończone lub rzędu skończonego. Bliżej oswoimy się z drzewami na konwersatorium.
- *Drzewo dwójkowe* to drzewo, w którym każdy wierzchołek ma co najwyżej dwóch bezpośrednich potomków. *Pełne drzewo dwójkowe* to drzewo, w którym każdy wierzchołek ma dokładnie dwóch bezpośrednich potomków.
- Przez *drzewo znakowane* (elementami ze zbioru L) rozumiemy parę uporządkowaną (D, f), gdzie D jest drzewem, a f jest funkcją ze zbioru wierzchołków drzewa D w zbiór L. Zwykle L będzie pewnym zbiorem formuł.
- Graficzne reprezentacje drzew są rysunkami, na których wierzchołki (jakoś znakowane — punktami, liczbami, formułami, itd.) połączone są liniami, odpowiadającymi krawędziom. Przy tym, jeśli $\langle X, R, x_0 \rangle$ jest drzewem, to na rysunku zaznaczamy tylko krawędzie należące do $R - R^2$.

Lemat Königa. Jeśli drzewo $D = \langle X, R, x_0 \rangle$ rzędu skończonego jest nieskończone, to ma gałąź nieskończoną.

Dowód. Przypuśćmy, że D jest nieskończone. Zdefiniujemy gałąź nieskończoną $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ w D przez indukcję matematyczną. Element x_0 (czyli korzeń drzewa D) jest pierwszym elementem konstruowanej gałęzi. Ponieważ D jest nieskończone, więc x_0 ma nieskończenie wiele R-następników.

Przypuśćmy, że $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ zostały zdefiniowane tak, że x_i należy do i-tego poziomu drzewa D oraz x_i ma nieskończenie wiele R-następników. Z założenia, x_{n-1} ma tylko skończenie wiele *bezpośrednich* R-następników. Ponieważ x_{n-1} ma nieskończenie wiele R-następników, więc co najmniej jeden z jego bezpośrednich R-następników także ma nieskończenie wiele R-następników. Wybieramy więc element x_n z n-tego poziomu drzewa D o tej właśnie własności. Wtedy x_n ma nieskończenie wiele R-następników. Ponieważ jest tak dla każdego n, pokazaliśmy istnienie nieskończonej gałęzi $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ w drzewie D.

Logiczne BHP

Konstrukcje syntaktyczne w językach systemów logicznych są jednoznaczne. Termy, formuły, dowody można reprezentować np. przez stosowne drzewa. Indukcyjne definicje termów i formuł wykorzystywać można w dowodach wielu własności, opierając się na następującym twierdzeniu o oczywistym dowodzie (zob. np. Fitting 1990, 10):

Twierdzenie. (Zasada Indukcji Strukturalnej). Każda formuła języka KRZ ma własność Q, o ile:

1. *Krok początkowy*. Każda formuła atomowa ma własność Q;
2. *Kroki indukcyjne*.
    1. Jeśli φ ma własność Q, to $\neg\varphi$ ma własność Q;
    2. Jeśli φ oraz ψ mają własność Q, to $(\varphi \circ \psi)$ ma własność Q, gdzie $\circ$ jest funktorem dwuargumentowym.

Logiczne BHP

W teorii mnogości dowodzi się twierdzenia o definiowaniu przez rekursję. Jego zastosowaniem w przypadku języków logiki jest twierdzenie (zob. np. Fitting 1990, 10):

Twierdzenie. (Zasada Rekursji Strukturalnej). Istnieje dokładnie jedna funkcja f określona na zbiorze F wszystkich formuł języka KRZ taka, że:

1. *Krok początkowy*. Wartość f jest podana wyraźnie dla formuł atomowych.
2. *Kroki rekurencyjne*.
    1. Wartość f dla $\neg\psi$ jest określona w terminach wartości f dla ψ;
    2. Wartość f dla $(\varphi \circ \psi)$ jest określona w terminach wartości f dla φ oraz dla ψ, gdzie $\circ$ jest funktorem dwuargumentowym.

Możemy zatem definiować m.in. różne funkcje o wartościach liczbowych, charakteryzujących złożoność formuł.

Chyba nie spaliłaś notatek z wykładów?

- W omawianiu własności metod dowodowych pożyteczne będzie korzystanie z Lematu Hintikki oraz Twierdzenia o Istnieniu Modelu (najpierw: dla KRZ; później: dla KRP); zob. np. Fitting 1990, 51–56.
- Zakładamy też, że intensywne przeżycia wakacyjne nie wymazały z pamięci słuchaczy definicji podstawowych pojęć logicznych (z KRZ oraz KRP).
- Zwykle korzystać będziemy jedynie z wybranych funktorów prawdziwościowych (*primary connectives* w terminologii podanej w Fitting 1990, 13).
- Być może słuchacze mieli już styczność z notacją Smullyana (α-formuły i β-formuły). Oswoimy się z nią na konwersatorium.

Nie zakładamy pryncypialnie, że podczas całego cyklu wykładów zachowamy konsekwencję w oznaczeniach.

Wszystkie funkcje prawdziwościowe 2-argumentowe

p	q	$\bot$	$\wedge$	$\nrightarrow$	p	$\nleftarrow$	q	$\not\equiv$	$\vee$	$\downarrow$	$\equiv$	$\neg q$	$\leftarrow$	$\neg p$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\top$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Pierwsze dwie kolumny podają wszystkie układy wartości argumentów, kolejne kolumny podają wartość dla tego układu argumentów każdej z szesnastu dwuargumentowych funkcji prawdziwościowych. Czy widzisz jakieś *symetrie* w tej tabeli?

- Lubimy odróżniać: spójnik, funktor oraz funkcję (wszystkie z określeniem: prawdziwościowy). Nie jesteśmy jednak ortodoksami i przystajemy na uproszczenia w podręcznikach.

Funktory pierwszorzędne

1arg.	2 arg.	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\not\rightarrow$	$\not\leftarrow$
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0

Poszczególne kolumny tej tabeli odpowiadają: pierwszemu argumentowi, drugiemu argumentowi, koniunkcji, alternatywie, implikacji prostej, implikacji odwrotnej, kresce Sheffera, binegacji, zaprzeczeniu implikacji prostej, zaprzeczeniu implikacji odwrotnej.
Funktor $\uparrow$ jest (przez informatyków) nazywany NAND, natomiast $\downarrow$ nazywany jest (przez informatyków) NOR.

- Uwaga na porządek wierszy tej tabeli! Taki podaje Fitting, my lubimy dokładnie odwrotny porządek.

Notacja Smullyana

- Od kilku dekad karierę robi notacja zaproponowana przez Raymonda Smullyana, zwana też jednolitą notacją (*uniform notation*).
- Notacja ta motywowana jest własnościami semantycznymi.
- Naszym zdaniem łatwo ją zapamiętać, patrząc na diagram Hassego stosownej algebry Lindenbauma-Tarskiego, który narysujemy na konwersatorium.

- Wśród funktorów pierwszorzędnych oraz ich zaprzeczeń wyróżnimy te, które „działają" koniunkcyjnie oraz te, które „działają" alternatywnie. Formuły z tymi pierwszymi funktorami oznacza się symbolem α, te drugie zaś symbolem β. *Składniki* takich formuł są oznaczane symbolami, odpowiednio: α_1, α_2 oraz β_1, β_2. Składniki te wyznaczane są wedle następującej konwencji:

Formuły koniunkcyjne i formuły alternatywne

α	α_1	α_2
$\varphi \wedge \psi$	φ	ψ
$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	φ	$\neg\psi$
$\neg(\varphi \leftarrow \psi)$	$\neg\varphi$	ψ
$\neg(\varphi \uparrow \psi)$	φ	ψ
$\varphi \downarrow \psi$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$\varphi \nrightarrow \psi$	φ	$\neg\psi$
$\varphi \nleftarrow \psi$	$\neg\varphi$	ψ

β	β_1	β_2
$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$\varphi \vee \psi$	φ	ψ
$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg\varphi$	ψ
$\varphi \leftarrow \psi$	φ	$\neg\psi$
$\varphi \uparrow \psi$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$\neg(\varphi \downarrow \psi)$	φ	ψ
$\neg(\varphi \nrightarrow \psi)$	$\neg\varphi$	ψ
$\neg(\varphi \nleftarrow \psi)$	φ	$\neg\psi$

- Później rozszerzymy jednolitą notację na język KRP.
- Zasady: Indukcji Strukturalnej oraz Rekursji Strukturalnej zachodzą też w następujących wersjach:

Zasada Indukcji Strukturalnej

Twierdzenie. (Zasada Indukcji Strukturalnej). Każda formuła języka KRZ ma własność Q, o ile:

1. *Krok początkowy.* Każda formuła atomowa oraz jej negacja mają własność Q;
2. *Kroki indukcyjne.*
   1. Jeśli φ ma własność Q, to $\neg\neg\varphi$ ma własność Q;
   2. Jeśli α_1 oraz α_2 mają własność Q, to α ma własność Q.
   3. Jeśli β_1 oraz β_2 mają własność Q, to β ma własność Q.

Dowód (Fitting 1990, 21–22). Załóżmy, że Q jest własnością spełniającą warunki twierdzenia. Powiemy, że formuła ψ jest *dobra*, jeśli ψ oraz $\neg\psi$ mają własność Q. Jeśli pokażemy, że każda formuła jest dobra, to wyniknie z tego, że każda formuła ma własność Q.

Dowód Zasady Indukcji Strukturalnej

- Jeśli ψ jest atomowa, to jest dobra (na mocy kroku początkowego).
- Załóżmy, że ψ jest dobra. Wtedy ψ, $\neg\psi$ mają własność Q. Na mocy kroku indukcyjnego 1, $\neg\neg\psi$ ma własność Q. A zatem $\neg\psi$ jest dobra.
- Załóżmy, że φ oraz ψ są dobre. Jeśli $(\varphi \circ \psi)$ jest α-formułą, to $\neg(\varphi \circ \psi)$ jest β-formułą, a jeśli $(\varphi \circ \psi)$ jest β-formułą, to $\neg(\varphi \circ \psi)$ jest jest α-formułą. W każdym z tych przypadków, $\{\alpha_1, \beta_1\} \subseteq \{\varphi, \neg\varphi\}$. Ponieważ φ oraz $\neg\varphi$ są dobre, więc obie mają własność Q (czyli α_1 i β_1 mają własność Q).
- Podobnie, $\{\alpha_2, \beta_2\} \subseteq \{\psi, \neg\psi\}$, a więc α_2, β_2 mają własność Q.
- Na mocy ostatnich dwóch kroków indukcyjnych, α i β mają własność Q.
- Na mocy pierwotnej wersji Zasady Indukcji Strukturalnej, każda formuła jest dobra, czyli każda formuła ma własność Q.

Zasada Rekursji Strukturalnej

Twierdzenie. (Zasada Rekursji Strukturalnej). Istnieje dokładnie jedna funkcja f określona na zbiorze F wszystkich formuł języka KRZ taka, że:

1. *Krok początkowy*. Wartość f jest podana wyraźnie dla formuł atomowych oraz ich negacji.
2. *Kroki rekurencyjne*.
   1. Wartość f dla $\neg\neg\psi$ jest określona w terminach wartości f dla ψ;
   2. Wartość f dla α jest określona w terminach wartości f dla α_1 oraz dla α_2.
   3. Wartość f dla β jest określona w terminach wartości f dla β_1 oraz dla β_2.

- Twierdzenie to można wykorzystać do definiowania stopnia złożoności formuł, zapisywanych w jednolitej notacji.

Stopnie i rangi formuł języka KRZ

Funkcja stopnia *dg* zdefiniowana jest indukcyjnie:

- Stopień formuł atomowych (zmiennych oraz $\bot$ i $\top$) jest równy 0.
- $dg(\neg\psi) = dg(\psi) + 1$
- $dg((\varphi \circ \psi)) = dg(\varphi) + dg(\psi) + 1$, gdzie $\circ$ jest funktorem dwuargumentowym.

Funkcja rangi *rk* zdefiniowana jest indukcyjnie:

- $rk(p) = rk(\neg p) = 0$ dla zmiennych zdaniowych p.
  $rk(\bot) = rk(\top) = 0$.
- $rk(\neg\neg\psi) = rk(\psi) + 1$
- $rk(\alpha) = rk(\alpha_1) + rk(\alpha_2) + 1$
- $rk(\beta) = rk(\beta_1) + rk(\beta_2) + 1$