INVESTIGATIONES LINGUISTICAE VOL. XXIII, 2011

Intuicja matematyczna – kilka uwag

Mathematical intuition – a few remarks

Jerzy Pogonowski

INSTYTUT JĘZYKOZNAWSTWA, UNIWERSYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA
AL. NIEPODLEGŁOŚCI 4, 61-874 POZNAŃ

pogon@amu.edu.pl

Abstract

This short note contains a few remarks about mathematical intuition *in action*. We stress the dynamic character of mathematical intuition.

1 Wstęp

Niniejszy krótki tekst poświęcony jest intuicji matematycznej *w działaniu*, czyli w praktyce badawczej zawodowych matematyków oraz w dydaktyce. Nie staramy się rozstrzygać problemów filozoficznych, nie odnosimy się do matematyki *intuicjonistycznej*, wypowiadamy subiektywne opinie, wspierając się ustaleniami z dziejów matematyki.

2 Intuicja w matematyce

Intuicje matematyczne to *przekonania* (bądź zbiory przekonań). Mówić rozsądnie możemy jedynie o intuicjach *zwerbalizowanych* – o nabywaniu i żywieniu przekonań niezwerbalizowanych wypowiadać można się tylko metaforycznie. W literaturze anglojęzycznej używa się czasem terminów: *intuition of* oraz *intuition that*. Ten pierwszy miałby dotyczyć poznawania *obiektów matematycznych* (liczb, zbiorów, funkcji, struktur, itd.), zaś ten drugi *trafności zdań* o treści matematycznej. W dalszym ciągu będziemy używali tylko tego drugiego rozumienia. Sądzimy, że jest ono bardziej podstawowe i warunkuje to pierwsze. Nadto, nie implikuje definitywnych rozstrzygnięć w ontologii matematyki.

2.1 Kontekst odkrycia

Gdzie widoczna jest intuicja matematyczna w działaniu? Po pierwsze, w aksjomatach poszczególnych teorii. Są one wszak podawane *bez dowodu*, mamy w nie po prostu *wierzyć*. Osobną sprawą jest to, że postać aksjomatyczną nadano wielu podstawowym teoriom matematycznym dopiero po zgromadzeniu i uporządkowaniu znacznej liczby faktów. Po drugie, to przede wszystkim intuicja matematyczna stanowi trzon *kontekstu odkrycia* w matematyce. Przekonania intuicyjne, wspierane już zebraną wiedzą inspirują do tworzenia nowych teorii, motywują zmiany kierunku rozwoju teorii, itp. Tego, *w jaki sposób* dochodzi się do nowych odkryć matematycznych nie można, rzecz jasna, precyzyjnie opisać. Można natomiast, na podstawie świadectw historycznych, domniemywać, czym kierował się dany matematyk przeprowadzając konstrukcję lub dowód, wprowadzając nowe pojęcia, dokonując uogólnień, wykorzystując analogie, itd. Dla przykładu:

1. To m.in. odkrycie pierścieni, w których nie ma jednoznaczności rozkładu (dla przykładu: w $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ element 6 rozkłada się na iloczyn $2 \cdot 3$ oraz na iloczyn $(1+i\sqrt{5})\cdot(1-i\sqrt{5})$ i żaden z tych elementów nie jest jednością rozważanego pierścienia) inspirowało do wprowadzenia *elementów idealnych* (teoria Kummera) oraz rozwoju *teorii ideałów* (teoria Dedekinda); por. np. (Corry 2004). Wprowadza się odróżnienie: a jest elementem *nieredukowalnym*, gdy nie jest iloczynem różnych od jedności elementów pierścienia; a jest elementem *pierwszym*, gdy jeśli dzieli iloczyn $b \cdot c$, to dzieli b lub dzieli c. Każdy element pierwszy jest nieredukowalny, lecz nie na odwrót: dla przykładu w $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ element 3 jest nieredukowalny, ale dzieli iloczyn $(2 + \sqrt{-5}) \cdot (2 - \sqrt{-5}) = 9$, nie dzieląc żadnego z jego czynników. To są jedynie bardzo powierzchowne uwagi, bardziej precyzyjny opis musiałby uwzględnić mnóstwo dalszych faktów z historii algebry.

2. Odkrycie przez Kleina w 1870 roku modelu rzutowego geometrii Łobaczewskiego inspirowane było (Juszkiewicz 1977: 219) badaniami analitycznymi nad geometrią rzutową prowadzonymi przez Möbiusa (1827), przy uwzględnieniu idei teorio-grupowych. W dalszej perspektywie owocowało to sformułowaniem przez Kleina jego *Programu erlangeńskiego* (1872), podającego klasyfikację różnych geometrii na podstawie grup ich przekształceń.

3. Topologia jest stosunkowo młodą dyscypliną matematyczną (uznana zostaje za osobną dyscyplinę około roku 1920). Wywodzi się zarówno z rozważań kombinatorycznych (Euler) jak i geometrycznych (Riemann) oraz z analizy (Cantor). Początkowo rozważano otwarte i domknięte podzbiory przestrzeni euklidesowych i stworzono teorię mnogości (Cantor). Ogólne przestrzenie topologiczne pojawiają się w pracach Hausdorffa (1914) oraz Kuratowskiego (1922 – definicja akceptowana dzisiaj). W 1906 roku Fréchet rozważa przestrzenie nazywane dziś *metrycznymi* (oraz ogólniejsze, zwane dziś *przestrzeniami Frécheta*). Zarówno metryzowalność, jak i specyficzne aksjomaty oddzielania zostają jednak później wyrugowane z definicji ogólnej przestrzeni topologicznej: w charakterystyce tej ostatniej uwzględnia się obecnie jedynie operator domknięcia albo rodzinę wszystkich zbiorów otwartych. Dość wcześnie, bo już pod koniec XIX wieku rozpoczyna się myślenie o topologii także w terminach algebraicznych, czyli *topologia algebraiczna* (Poincaré: 1894 – pojęcie *grupy podstawowej*, 1895 – *homotopie* i *liczby Bettiego*; trzy dekady później – *grupy homologii*, Noether oraz inni). Pozwala to m.in. na przyporządkowanie przestrzeniom nieodróżnialnym w topologii (*homeomorficznym*) izomorficznych struktur algebraicznych, które łatwiej jest charakteryzować rachunkowo. Oprócz topologii ogólnej oraz algebraicznej szybko rozwijają się też inne działy topologii: *topologia rozmaitości* (obejmująca *topologię różniczkową* i *teorię węzłów*), *topologiczna teoria wymiaru*. „Myślenie topologiczne" zaczyna też być obecne w innych działach matematyki (np. w analizie).

4. Aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych motywowane są – zgodnie z *programem Gödla* – powszechnie obecnie podzielanym intuicyjnym przeświadczeniem, że powinniśmy dopuszczać w teorii mnogości istnienie możliwie jak największej liczby zbiorów. Warto może zauważyć, że są to aksjomaty *maksymalności* (podobnie jak aksjomat zupełności w geometrii Hilberta), w odróżnieniu od rozważanych wcześniej, dla różnych celów, aksjomatów *minimalności* (aksjomat ograniczenia Fraenkla, aksjomat konstruowalności Gödla). Aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych nie pozwalają na rozstrzygnięcie np. hipotezy kontinuum, ale niektóre z nich mają treść matematyczną istotną w kontekście rozwiązywania pewnych problemów z różnych dziedzin matematyki (np. badania zbiorów liczb rzeczywistych). Aksjomaty te związane są z możliwościami dowodowymi teorii ZF i jej rozszerzeń. Początkowy opór wielu matematyków wobec rozważania takich aksjomatów jest obecnie nieco mniejszy: za całkiem rozsądne przyjmuje się np. te aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych, które są niesprzeczne z aksjomatem konstruowalności (a więc np.: liczb nieosiągalnych, Mahlo, słabo zwartych).

Po trzecie wreszcie, intuicja w działaniu widoczna jest w tych sytuacjach, gdy poprzez np. rysunki, obrazowe skojarzenia, wskazówki indukcyjne wspomagamy rozumienie dowodów oraz konstrukcji. Dla przykładu:

1. O elementach filtru mówimy obrazowo, że są *duże* (a elementy ideału są *małe*).

2. Uniwersa zbiorów przedstawiamy graficznie w postaci rysunku w kształcie litery „V". Uniwersa takie mogą być „cieńsze" (np. uniwersum konstruowalne) lub „szersze" (np. pełna hierarchia kumulatywna zbiorów).

3. Rysunki, diagramy, wykresy stosowane są w każdej właściwie dyscyplinie matematycznej. Nie mają one, rzecz jasna, mocy dowodowej, ale często bywają wielce pomocne.

4. Czasami chcemy, aby treść twierdzenia wywoływała jakieś obrazowe skojarzenia (dla przykładu: nazywamy twierdzenie *lematem o przelewaniu*).

5. Wspieranie się intuicją przejawia się także w samej terminologii matematycznej, która – choć może przecież być dowolna – zwykle dobierana jest tak, aby jakaś część znaczenia wyrazu w języku potocznym wiązała się matematyczną treścią wprowadzanego pojęcia (dla przykładu: mówimy o zbiorach *nigdzie gęstych*)

2.2 Co mówią matematycy?

Davis i Hersh piszą o różnych znaczeniach, w których matematycy używają terminu *intuicja matematyczna* (Davis, Hersh 1994: 340–341):

1. Intuicyjność jest przeciwstawieniem ścisłości.

2. Intuicyjność oznacza wizualność.

3. Przy braku dowodu intuicyjne oznacza prawdopodobne lub przekonujące.

4. Intuicyjne oznacza niekompletne.

5. Intuicyjne oznacza oparte na modelu fizycznym, lub na jakichś wiodących przykładach.

6. Intuicyjne oznacza holistyczne lub całościowe w przeciwstawieniu do szczegółowego lub analitycznego.

Warto może zwrócić uwagę, że chyba wszystkie z wymienionych wyżej znaczeń mają jakiś odcień wartościujący. W domyśle zawsze stawiamy precyzyjny dowód wyżej od intuicyjnej argumentacji. Oczywiście pamiętać należy też o aspektach pragmatycznych: kompletne (lub prawie kompletne) dowody są wymaganym standardem w pracach naukowych, natomiast skuteczność dydaktyki matematyki zależeć może od umiejętnego rozłożenia proporcji między tym co ścisłe, a tym co intuicyjne w prezentacji materiału. Ponadto, zwróćmy jeszcze uwagę na dwie sprawy:

1. Odnośnie związków intuicji z *oczywistością* poczyńmy następujące uwagi. Po pierwsze, zdarza się, że stwierdzenia mające walor oczywistości mogą mieć trudne dowody: dla przykładu dowód twierdzenia Jordana o krzywej zamkniętej na płaszczyźnie (*Krzywa zwykła zamknięta na płaszczyźnie dzieli tę płaszczyznę na dwa obszary, jeden skończony i drugi nieskończony*) jest niezwykle skomplikowany. Samo zaś twierdzenie wydaje się całkiem oczywiste. Po wtóre, stwierdzenia, które nie wydają się oczywiste (przynajmniej z punktu widzenia jakiejś potocznej oczywistości) mogą mieć dowody proste – tu chyba dobrym przykładem jest stosowanie metody przekątniowej. Jest to również chyba przypadek twierdzenia ustalającego równoliczność zbiorów punktów: prostej oraz płaszczyzny. Dalej, sama prostota sformułowania jakiegoś stwierdzenia może nie pozostawać w bezpośrednim związku ani z jego intuicyjnością, ani z prostotą dowodu. Dla przykładu, sformułowanie Wielkiego Twierdzenia Fermata jest zrozumiałe dla uczniów gimnazjum, natomiast jego dowód jest, jak się okazało po dość długim czasie od momentu sformułowania samego problemu, wielce skomplikowany.

2. Kryterium *piękna* (konstrukcji matematycznej, dowodu, teorii, itd.) odgrywa bardzo dużą rolę w twórczości matematycznej. Jednym z naczelnych regulatorów tej twórczości jest oczywiście *niesprzeczność*. Dla określonych celów (np. dydaktycznych) pożądana jest *prostota* wywodów. Tworzymy matematykę dla zaspokojenia naszej *ciekawości* poznawczej, jednak chcemy osiągać ten cel w sposób elegancki, czyniący zadość kryteriom *matematycznego piękna*. O sprawach tych wypowiadało się obszernie wielu znanych matematyków, często wskazując właśnie na piękno jako inspirację do określonych badań.

2.3 „Prawdziwość z prawdopodobieństwem 1”

Rozważmy teraz przykład dotyczący naszych przekonań, że pewne zjawiska mają charakter nieprzewidywalny, chaotyczny, a jednak możemy coś powiedzieć o prawdopodobieństwach, co z kolei miałoby nas upoważniać, iż rozważane stwierdzenie jest *prawie pewne* (pewne z prawdopodobieństwem 1). Powołamy się na prezentację podaną w książce Davisa i Hersha (Davis, Hersh 1994: 315–321). Rzecz dotyczy jednego z największych dotąd nierozwiązanych problemów matematyki, a mianowicie *Hipotezy Riemanna*.

Funkcja zeta Riemanna jest zdefiniowana dla wszystkich liczb zespolonych (o części rzeczywistej większej od 1) wzorem:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}.$$

Jak wiadomo, ma ona zera dla $z = 1$ oraz $z = -2, -4, -6, \ldots$ Wszystkie pozostałe jej zera muszą leżeć w pasie liczb o części rzeczywistej między 0 a 1. *Hipoteza Riemanna* głosi, że wszystkie te zera leżą na prostej o równaniu $Re(z) = \frac{1}{2}$. Pokazano (G.H. Hardy), że na tej prostej znajduje się *nieskończenie wiele* zer funkcji ζ. Nadto, sprawdzono rachunkowo, że pierwsze dziesiątki milionów zer funkcji ζ leżą na tej prostej. Nie jest to jeszcze żaden precyzyjny dowód. Znane są przypadki stwierdzeń prawdziwych dla miliardów przypadków początkowych wartości zmiennej, lecz fałszywych w pełnej ogólności (Littlewood). Dla przykładu, zdanie „n jest mniejsza od $10^{10} + 1$" jest prawdziwe dla pierwszych 10^{10} liczb naturalnych, a fałszywe dla wszystkich pozostałych. Ponadto, w teorii funkcji ζ spotykamy w wielu oszacowaniach iterowany logarytm $\log \log x$, a gdy ta wartość równa jest, powiedzmy 10, to wartość x wynosi 10^{10000}, co w praktyce uniemożliwia przeprowadzenie rachunków, nawet na najszybszych dostępnych maszynach cyfrowych.

W pracy (Good, Churchhouse 1968) podaje się pewne „powody" (cudzysłów autorów) natury probabilistycznej, które mogłyby skłaniać do *uwierzenia* w prawdziwość Hipotezy Riemanna. Aby je, choćby w największym skrócie, przedstawić, przypomnieć trzeba jeszcze funkcję Möbiusa $\mu(x)$. Dla dowolnej liczby naturalnej x jej wartość związana jest w następujący sposób z rozkładem x na czynniki pierwsze:

1. Jeśli jakiś czynnik w tym rozkładzie liczby x się powtarza, to przyjmujemy $\mu(x) = 0$.

2. Jeśli wszystkie czynniki rozkładu są różne, to gdy jest ich parzysta liczba, to niech $\mu(x) = -1$.

3. Jeśli wszystkie czynniki rozkładu są różne, to gdy jest ich nieparzysta liczba, to niech $\mu(x) = 1$.

Niech teraz $M(x)$ będzie równe sumie wszystkich $\mu(y)$ dla $y \leqslant x$. Wiadomo, iż Hipoteza Riemanna jest równoważna temu, że $M(x)$ rośnie nie szybciej niż stały mnożnik w $x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, przy x dążącym do nieskończoności, gdzie ε jest dowolną liczbą rzeczywistą większą od zera. Myślimy teraz o funkcji $M(x)$ jak o zmiennej losowej. Oczywiście każda konkretna wartość $M(x)$ jest w pełni określona. „Wygląda" jednak ta funkcja losowo, gdyż nie ma tu żadnej, jak się zdaje, regularności, za wyjątkiem tego, iż wartość samej funkcja μ jest „z równym prawdopodobieństwem" równa 1 lub -1.

Obliczenie prawdopodobieństwa, że $\mu(x) \neq 0$ sprowadza się do wykluczenia sytuacji, że losowo wybrana liczba x nie zawiera w swoim rozkładzie na czynniki pierwsze żadnego kwadratu liczby pierwszej. Nadto, podzielność przez jakąś liczbę pierwszą jest niezależna od podzielności przez inną liczbę pierwszą. Tak więc, prawdopodobieństwo, że $\mu(x) \neq 0$ będzie równe iloczynowi:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49} \cdot \ldots$$

Wiadomo, że iloczyn ten ma wartość $\frac{6}{\pi^2}$. Mielibyśmy z tego zatem, że prawdopodobieństwo, iż $\mu(x) = 1$ wynosi $\frac{3}{\pi^2}$ (i tak samo dla $\mu(x) = -1$). „Wartość oczekiwana" funkcji μ wynosi 0, gdyż średnio jedynki z plusem oraz z minusem powinny się znosić. Wydaje się wielce nieprawdopodobne, abyśmy wybierając losowo (oraz niezależnie) bardzo dużą liczbę liczb naturalnych dostali dla nich znacznie częściej wartości 1 (niż pozostałe dwie wartości funkcji μ). Z pewnych twierdzeń probabilistycznych wynika, że przy takim wyborze N liczb ich suma *z prawdopodobieństwem* 1 rośnie nie szybciej niż $N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ przy N zmierzającej do nieskończoności.

Daje to zatem „prawdziwość z prawdopodobieństwem 1" Hipotezy Riemanna, przy następującym *przekonaniu* (*wrażeniu*, *intuicyjnym założeniu*): tablica wartości funkcji μ jest „losowa" („nieprzewidywalna"). Wtedy usprawiedliwione jest *losowe* wybranie N liczb, zamiast sumowania wartości funkcji μ dla *pierwszych* N argumentów. Można rzec, że także pierwsze N wartości funkcji μ są „próbką losową."

Good i Churchhouse przeprowadzili niezależne rachunki, uzyskując „zadziwiająco bliską" zgodność z wynikami proponowanego rozwiązania heurystycznego. Można *wierzyć*, że zgodność ta nie jest przypadkowa (w istocie, jest większa od zgodności uzyskiwanych w pomiarach w badaniach empirycznych w naukach ścisłych), można też nazywać tego typu uzasadnienia całkowicie absurdalnymi.

2.4 Źródła intuicji

Bez wdawania się w bardziej wnikliwe rozważania, chcemy zwrócić uwagę na dwa źródła intuicji matematycznych:

1. *Uposażenie poznawcze*. Jesteśmy wyposażeni w pewien (niewielki) zestaw zmysłów; dodatkowo stosujemy różnego rodzaju „podpórki" epistemiczne,

pozwalające na detekcję zjawisk bezpośrednio naszym zmysłom niedostępnych. W jaki sposób percepcja zmysłowa wpłynęła na tworzenie matematyki? Czy gdybyśmy byli np. istotami gazowymi w czysto gazowym otoczeniu (bez żadnych ciał sztywnych), to zbudowalibyśmy inną geometrię? Albo: gdybyśmy rachowali nie na liczbach naturalnych lecz, powiedzmy na obrotach (w przestrzeni trójwymiarowej), to czy naturalna byłaby dla nas arytmetyka z nieprzemiennym mnożeniem (jak w algebrze kwaternionów)? Można oczywiście uważać takie *eksperymenty myślowe* za bezwartościowe dywagacje. Sądzimy jednak, że mają one znaczenie dla poszukiwania odpowiedzi zarówno na pytanie, czy możliwa jest *wyłącznie jedna* matematyka, jak i na znane pytanie o *skuteczność* matematyki w opisie przyrody.

2. *Przemoc symboliczna szkoły*. Elementarne intuicje matematyczne są nam narzucane przez szkołę. Nauczanie matematyki polega na rozwiązywaniu zadań i analizie przykładów – nie jest to więc nauczanie „pamięciowe", lecz raczej „interaktywne". Poprawne rozwiązania są nagradzane, niepoprawne korygowane. Niepoślednią rolę odgrywa tu zatem perswazja odwołująca się do autorytetu. Nauczanie matematyki próbuje się dostosować do ustaleń psychologii poznawczej. W ciągu ostatnich, powiedzmy, dwustu lat programy nauczania podlegały wielu zmianom, związanym zarówno z rozwojem samej matematyki, jak i czynnikami natury technologicznej, politycznej oraz ustaleniami z dziedziny psychologii poznawczej i teorii dydaktyki. Od nauczania „wzorowanego na Euklidesie" przechodzono do nauczania uwzględniającego metody indukcyjne i heurystyczne, proponowano system *New Math*, propagujący matematykę nowoczesną, później od tego systemu odchodzono, itd.

Oczywistym źródłem klarowania się pewnych intuicji matematycznych jest praktyczna działalność człowieka związana z *liczeniem* oraz *mierzeniem*. To właśnie z niej wyrastają arytmetyka i geometria, pierwsze działy matematyki, które próbowano systematyzować. Inspiracje dla wykształcenia się intuicji matematycznych płyną również z innych dyscyplin, przede wszystkim z różnych działów fizyki. Rozważania dotyczące *ruchu* oraz *zmiany* leżą wszak u podstaw analizy matematycznej. Klasa tych inspiracji jest niezwykle obszerna. Jak wiadomo z historii nauki, matematyka czasem nie nadąża, czasami zaś wyprzedza rozważania w naukach empirycznych.

Przywołajmy w tym kontekście – po części zabawny, po części chyba jednak trafiający w sedno rzeczy – przykład omawiany w (Barrow 1996). Na początku rozdziału 5 książki (Barrow 1996), w punkcie *Matematyka z kosmosu* autor przedstawia hipotetyczną sytuację, w której otrzymujemy sygnały świadczące o istnieniu inteligencji pozaziemskiej. Najpierw dostarczone zostają spisy treści dokumentów, które mają nadejść później. Zawierają one zapowiedź zarówno znanych nam twierdzeń matematycznych, jak też rozwiązań mnóstwa hipotez, o których prawdziwości nic dzisiaj nie wiemy (Hipoteza Riemanna, Hipoteza Goldbacha, itd.). Wywołuje to zrozumiałe podniecenie wśród matematyków. Gdy jednak obiecane dokumenty w końcu docierają, matematycy ziemscy są rozczarowani. Otóż inteligencja, które je przysłała ma całkowicie inną wizję matematyki niż my: traktuje mianowicie matematykę jako naukę czysto empiryczną. Stwierdzenia (takie jak np. Hipoteza Riemanna lub Hipoteza Goldbacha) są sprawdzane w bardzo dużej liczbie przypadków, przez niezwykle szybkie komputery i uznawane za prawdziwe, gdy owe miliardy miliardów miliardów przypadków je potwierdzają. Poziom technologii kosmitów okazał się o wiele bardziej zaawansowany od naszego. Ich całkowicie empiryczne podejście do matematyki nie stanowiło tu żadnej przeszkody, wręcz przeciwnie. Co prawda niektórzy (nieliczni!) z kosmicznych filozofów zastanawiali się czasem, czy nie byłoby warto znaleźć jakieś sposoby upewniania się, że prawdy ich matematyki stosują się we *wszystkich* przypadkach, ale takie podejście uznawano raczej za przeszkodę w rozwoju ich nauki: należałoby wtedy przecież odrzucić wiele uznawanych dotąd za prawdziwe wyników. Jest to wizja matematyki całkowicie odmienna od tej, do której przywykliśmy. Taka empiryczna matematyka pozaziemska miałaby się opierać zatem wyłącznie na intuicji, sprytnie planowanych eksperymentach oraz sprawdzaniu zachodzenia hipotez w wystarczająco dużej (dla potrzeb praktycznych) liczbie przypadków.

2.5 Intuicja a procedury badawcze matematyki

W rozumowaniach matematycznych – przy tworzeniu nowych pojęć lub teorii – stosuje się różne techniki. Bardzo ważną taką procedurą jest *uogólnianie*. Również odwołania się do *analogii* pełnią w tym zakresie niebagatelną rolę twórczą. Jak jednak obie te procedury – uogólnianie oraz analogia – mają się do myślenia w kategoriach intuicji matematycznej? Czy owa intuicja nimi *steruje*, podpowiada właściwy kierunek rozumowania? Czy też są to procedury całkowicie od intuicji niezależne? Zwróćmy uwagę, że:

1. Procedurę *uogólniania* można dość dobrze scharakteryzować. Początkowo badamy np. pewną szczególną strukturę matematyczną, a później (powiedzmy pomijając jej wybrane własności) przechodzimy do badania całej *klasy* struktur o własnościach bardziej ogólnych.

2. Pewnym aspektem rozumowań przez *analogię* są odwołania do pojęć *izomorfizmu* lub *homomorfizmu*. W tym sensie, również analogie dają się dość dobrze scharakteryzować.

3. *Intuicja matematyczna* pozostaje tajemnicza. Nie dysponujemy ani zestawem reguł *dedukcyjnych*, ani reguł *algorytmicznych*, które wyznaczałyby działanie intuicji matematycznej.

Nie potrafimy w tym momencie zebrać i uporządkować refleksji na temat związków trzech pojęć tego punktu. Strona wolframscience.com podaje jako przykład ciągu uogólnień rozwijanie pojęcia *liczby*, wyliczając 34 etapy, na których wprowadzano pojęcia związane z tymi uogólnieniami.

Pisze się przy tym, że w takich uogólnieniach nie tylko rozszerzano dziedzinę (dla wykonywania określonych operacji), ale starano się również zachować tak wiele twierdzeń, jak to tylko możliwe, zgodnie z *Principle of Permanence* omawianą w 1830 roku przez George'a Peacocka i rozszerzoną w 1869 roku przez Hermanna Hankela.

Uogólnienia stanowią jedno ze źródeł nowych twierdzeń w matematyce. Dąży się do przedstawienia problemu, konstrukcji, argumentacji w możliwie największej ogólności, wyprowadzając potem twierdzenia o konkretnych strukturach jako szczególne przypadki twierdzeń ogólnych. Może to sugerować, że odchodzimy w takich uogólnieniach od dobrze wykształconych intuicji matematycznych, związanych z konkretną strukturą (np. liczbową lub geometryczną). Ale można też uważać, że wykształcamy przy uogólnieniach nowe intuicje matematyczne, obejmujące szerszy zakres zjawisk.

Jednym z matematycznych odpowiedników pojęcia *analogii* jest wykorzystywane w teorii kategorii pojęcie *funktora*. Przypomnijmy, funktor jest odwzorowaniem z jednej kategorii w drugą, odwzorowaniem, które pozwala niejako „przekładać" stwierdzenia o jednego rodzaju obiektach (np. przestrzeniach topologicznych) na stwierdzenia o obiektach innego rodzaju (np. grupy).

Obok uogólniania oraz analogii rozważać można inne jeszcze metody stanowiące podstawę dla twórczości matematycznej bądź wspomagające taką twórczość. Myśleć można np. o różnego rodzaju metodach *heurystycznych*, które miałyby naprowadzać matematyka szukającego rozwiązania problemu na cel.

Choć może to nie być widoczne w ostatecznej redakcji tekstu matematycznego, zdarza się i tak, że rozwiązanie problemu bywa podsuwane mniej lub bardziej formalnymi metodami odwołującymi się do rozważenia kilku, kilkunastu, lub większej jeszcze liczby przypadków potwierdzających tezę twierdzenia ogólnego, którego dowodu szukamy. Pamiętamy oczywiście, że żadna skończona liczba przypadków sprzyjających nie stanowi dowodu twierdzenia ogólnego (choć jeden tylko kontrprzykład wystarcza do jego obalenia), ale obserwacja narzucających się regularności może stanowić impuls do formułowania, a później poszukiwania dowodu twierdzeń ogólnych.

W jednym z wyżej przytoczonych rozumień terminu *intuicja matematyczna* przez samych matematyków pojawiły się pojęcia: *modelu fizycznego* oraz *wio-*

dącego przykładu. Te pojęcia odegrały istotna rolę np. w rozwoju *rachunku nieskończonościowego* w analizie matematycznej. Dla przykładu, pierwsza i druga pochodna funkcji była interpretowana w terminach *prędkości* oraz *przyspieszenia*, odpowiednio. W dalszym rozwoju analizy matematycznej inspiracje z fizyki pojawiają się nieustannie, przy czym czasem matematyka *wyprzedza* fizykę, a czasem jest właśnie na odwrót. Wreszcie, całkiem możliwe są sytuacje, gdy matematyka oraz fizyka idą, by tak rzec, całkiem innymi drogami, po pewnym czasie znowu się spotykając.

Rozważania *geometryczne*, zgodnie zresztą z etymologią tego terminu, zapoczątkowane były, jak można rozsądnie przypuszczać, problemami czysto praktycznymi, związanymi z mierzeniem długości, powierzchni oraz objętości. Widzimy geometrię (Euklidesa) jako już gotowy system, z wyraźnie podanymi aksjomatami oraz twierdzeniami zaopatrzonymi w wyraźnie podane dowody. Dzisiaj trudno chyba (o ile jest to w ogóle możliwe) ustalić, jaka kumulacja konkretnych obserwacji związanych z pomiarami dostarczyła wystarczającej bazy dla *rewolucyjnego*, jakościowo nowego ujęcia tego materiału w system dedukcyjny.

Zdarza się, że cała dyscyplina matematyczna wyrasta początkowo *wyłącznie* na potrzeby opisu i wytłumaczenia pewnej klasy zjawisk czysto empirycznych, a dopiero później uzyskuje własną, wewnętrzną, matematyczną dynamikę rozwoju. Tak rzecz się miała np. z *rachunkiem prawdopodobieństwa* oraz *statystyką matematyczną*. Są to dyscypliny stosunkowo młode, inaczej niż geometria. Widać więc w ich przypadku wyraźniej ową dynamikę rozwoju teorii. Podobnie rzecz się ma np. z *teorią grafów*.

Osobną klasę *eksperymentów* stanowią eksperymenty *myślowe*. Interesującym przykładem takiego rodzaju eksperymentowania, odnoszącym się do rozważań topologicznych są np. rozważania dotyczące *Płaskoświata*.

Do nowych twierdzeń matematycznych dochodzi się różnymi drogami. Czasami rozważenie pewnej liczby przypadków szczególnych sugeruje przypuszczenie, że można sformułować bardziej ogólne twierdzenie. Dobrych przykładów dostarcza tu chyba teoria liczb: znajdujemy regularności w pewnej liczbie przypadków i odważnie stawiamy hipotezę ogólną, że zaobserwowana regularność zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych. Intuicyjne jest zatem w takim przypadku *indukcyjne* dochodzenie do sformułowania ogólnej prawidłowości; jej dowód jest uzyskiwany już na drodze *dedukcyjnej*.

W pewnych okresach (po kumulacji wyników) sporo uwagi poświęca się uzyskiwaniu *nowych dowodów* dla twierdzeń już udowodnionych. Nie jest to rzecz jasna okazywanie podejrzliwości istniejącym dowodom. Najczęściej chodzi o uzyskiwanie dowodów *prostszych*, bardziej *eleganckich* (wedle obowiązujących w danym okresie kryteriów estetycznych), czynionych przy *słabszych* założeniach, itd. Chciałoby się (metaforycznie) rzec, że w takich przypadkach próbujemy dokonywać melioracji intuicji matematycznych.

Zarówno w dowodach twierdzeń polegających na uogólnianiu, jak i twierdzeń odwołujących się do analogii intuicje matematyczne pełnią role drogowskazów dla roboty dedukcyjnej. Wybór kierunku, w którym uogólnia się jakiś wynik nie jest wszak całkowicie arbitralny – uogólnienie musi mieć dobrze określony sens matematyczny, prowadzić do szerszej klasy struktur wyodrębnianych w jakiś *naturalny* sposób. Podobnie przy rozumowaniach przez analogię: wybrać należy jakieś *istotne* cechy struktur z jednej dziedziny, które przenosimy na ich odpowiedniki dla struktur innej dziedziny.

Chyba dość rzadko zdarzającym się przypadkiem jest ten, gdy nowe twierdzenia uzyskujemy jedynie przez odwołanie się do czysto zewnętrznej, symbolicznej postaci innych twierdzeń i ustaleń dotychczasowych. Istotnie nowe, posiadające głębszą treść matematyczną twierdzenia powstają bodaj prawie zawsze jako dedukcyjne potwierdzenie wprzódy posiadanych intuicji matematycznych. Twierdzenia są przekładem owych intuicji na komunikowalny intersubiektywnie formalizm, a ich dowody dostarczają uzasadnienia (wedle przyjętych reguł) dla w ten sposób precyzyjnie wyrażonej wiary w intuicyjne przekonania.

3 Zmienność intuicji

Intuicje potoczne (codziennego doświadczenia) są dość stabilne, natomiast intuicje matematyczne – przynajmniej w odniesieniu do zawodowych matematyków – są dynamiczne, podlegają zmianom. Zmiany te warunkowane są zarówno poprzez nowe wyniki matematyczne, jak i poprzez napotykanie antynomii lub paradoksów. Przywołajmy kilka przykładów:

1. Przekonanie, że każda własność wyznacza zbiór. Prowadzi, jak wiadomo, do antynomii. Zostaje później (w aksjomatycznej teorii mnogości Zermela-Fraenkla) zastąpione przekonaniem (wyrażonym w aksjomacie *wyróżniania*), że własności wyznaczają podzbiory już wprzódy danych zbiorów.

2. Przekonanie, że granica punktowa ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą (jak w jednej z prac napisał Cauchy). Jak pokazał Dirichlet, trzeba w założeniu zastąpić zbieżność punktową mocniejszym warunkiem *zbieżności jednostajnej*.

3. Przekonanie, że to co prawdziwe jest dla wszystkich wyrazów ciągu, prawdziwe jest też dla jego granicy (żywione przez matematyków jeszcze w wieku XVIII).

4. Przekonanie, że wszystkie równania algebraiczne jednej zmiennej posiadają rozwiązania podane przez pierwiastniki. W wieku XVI znane były takie

rozwiązania dla równań stopnia $\leqslant 4$. Wierzono (Euler, Bézout, Lagrange), że można podać ogólną metodę pierwiastników, jednak dopiero Paolo Ruffini pokazał (1799), iż jest to niemożliwe dla równań stopnia $\geqslant 5$; jego nie całkiem ścisły dowód poprawił Niels Abel (1824), a podstawy ogólnej teorii naszkicował Évariste Galois.

5. Przekonanie, że geometria euklidesowa jest *prawdziwą* geometrią, że opisuje adekwatnie przestrzeń fizyczną. Okrycie (skonstruowanie?) geometrii *nieeuklidesowych* ukazało, że *możliwe* są inne jeszcze systemy geometrii. To, jaki system geometrii adekwatnie przystaje do rzeczywistości fizycznej (globalnie, bądź w ustalonej skali) jest oczywiście problemem *pozamatematycznym*. Zwróćmy uwagę, że oprócz skonstruowania systemów geometrii nieeuklidesowych (Gauss, Bolayi, Łobaczewski) badano również ogólne pojęcie *krzywizny* przestrzeni (Riemann, który wykorzystywał pewne pomysły Gaussa); poszczególne typy geometrii są wtedy wyznaczone przez własność ogólną: krzywizna dodatnia, ujemna bądź zerowa.

6. Przekonanie, że wszystkie problemy matematyczne są *rozstrzygalne* oraz że możliwy jest dowód *niesprzeczności* całości matematyki, w dodatku dowód *finitarny*. Stanowiło to jądro *programu Hilberta*. Jak pokazały wyniki Gödla, Turinga, Tarskiego i innych, program ten *w całości* nie może zostać zrealizowany; możliwe są jednak jego częściowe realizacje. W każdym razie wiadomo, iż *całości* matematyki nie można ująć w jednym finitarnym, niesprzecznym i rozstrzygalnym systemie.

Czy zmienność żywionych przez nas intuicji matematycznych jest wyłącznie *liniowa*, w tym sensie, że dodajemy, wyrzucamy, zmieniamy pewne intuicje, ale nie stajemy przed sytuacją *wyboru*: albo jedna intuicja, albo inna? Rozważyć przy tym warto chyba oba przypadki:

1. mamy do wyboru dwie różne intuicje, które nie są wzajem sprzeczne (ani nawet się wzajemnie nie wykluczają);

2. mamy do wyboru dwie różne intuicje, które się nawzajem wykluczają (w szczególności, są wzajem sprzeczne).

Z pierwszą sytuacją mieliśmy być może do czynienia np. w dwóch różnych koncepcjach starożytnych: tej proponowanej przez Teajtetosa oraz tej drugiej, promowanej przez Eudoksosa. Chodziło, przypomnijmy, o opisy *wielkości* tego samego rodzaju (oraz *proporcje*). We współczesnym sformułowaniu moglibyśmy zapewne mówić o dwóch sposobach wprowadzania pojęcia *liczby rzeczywistej*. Jak pokazuje rozwój matematyki, to koncepcja Eudoksosa zwyciężyła. Dedekind definiując liczby rzeczywiste z wykorzystaniem swojej metody *przekrojów* właściwie rozwinął myśl Eudoksosa. To rozwinięcie było przy tym istotne, gdyż nie tylko każda liczba rzeczywista jest przekrojem, ale także każdy przekrój jest liczbą rzeczywistą, a tego drugiego warunku u Eudoksosa przecie nie było.

O różnych intuicjach możemy też chyba mówić u twórców rachunku różniczkowego: Sir Izaaka Newtona oraz Tajnego Radcy Wilhelma von Leibniza. Newton różniczkował *równania*. Wielkości *zmienne* (w jego terminologii: *fluenty*) były zależne od *czasu* jako parametru. Pochodne tych wielkości (*fluksje*) liczone były właśnie względem czasu. Podejście Newtona inspirowane było *geometrią* oraz *kinematyką*. Newton rachował na dobrze określonych wielkościach. Styczna była u niego *granicą* siecznych. Solidne podstawy matematyczne podejście Newtona uzyskało dopiero w momencie dokonania arytmetyzacji analizy w wieku XIX.

Inspiracje von Leibniza były natury *arytmetycznej*. Leibniz postulował istnienie wielkości nieskończenie małych i to na nich dokonywał rachunków. Różniczkował *funkcje*, a nie równania. Ponadto, podawał *metafizyczne* uzasadnienia dla rachunku nieskończonościowego, wiążąc wielkości z odpowiadającymi im *monadami*. Zasady rachunku na monadach pozwalają na dość sprawne i czysto mechaniczne obliczanie pochodnych dla wielu funkcji. Leibniz wprowadził dogodną notację, którą posługujemy się do dziś. Jak pisze Marek Kordos (Kordos 2005: 160), formalna strona analiz von Leibniza została przyjęta, odrzucono natomiast (w matematyce ówczesnej) jej uzasadnienia oraz filozofię wspierającą te metody. Solidnych podstaw matematycznych dla rachunku wielkości nieskończenie małych dostarczyła *analiza niestandardowa*, rozwijana od drugiej połowy wieku XX.

Z potencjalnym *rozgałęzianiem się* intuicji matematycznych mamy natomiast do czynienia w przypadku niektórych zdań *nierozstrzygalnych* ψ, gdy nie potrafimy wskazać, które ze zdań: ψ czy też $\neg\psi$ jest prawdziwe (w ustalonym modelu; przypomnijmy, że w przypadku zdania Gödla potrafimy to zrobić w odniesieniu do modelu standardowego arytmetyki). Takim zdaniem jest, jak wiadomo, hipoteza kontinuum. Zauważmy jednak, iż nigdy w historii teorii mnogości nie decydowano się na przyjęcie bądź hipotezy kontinuum, bądź jej negacji jako kolejnego aksjomatu. Pozostawiamy sobie nadzieję, że być może rozwój teorii mnogości dostarczy takich aksjomatów, które hipotezę tę pozwolą rozstrzygnąć (może przy zmianie języka i środków dowodowych). Być może to *praktyka matematyczna*, odzwierciedlona w konsekwencjach hipotezy kontinuum bądź jej zaprzeczenia będzie miała tu głos decydujący. Może warto jeszcze dodatkowo zwrócić uwagę na to, że o istnieniu zdań nierozstrzygalnych w bogatszych teoriach matematycznych wiemy od stosunkowo niedawna.

Czy może zdarzyć się tak, że proponowane z osobna nowe aksjomaty dla teorii mnogości będą sobie nawzajem przeczyć? Nie mamy przy tym na myśli przypadku hipotezy kontinuum oraz jej zaprzeczenia. Chodzi raczej o sytuację, gdy mamy dwa zdania, φ oraz ψ (które nie są konsekwencjami aksjomatów ZF) takie, że:

1. Każde z tych zdań wyraża jakieś ważne *intuicje matematyczne* dotyczące zbiorów, każde wydaje się być kandydatem na całkiem *naturalne* założenie o zbiorach.

2. Zarówno za przyjęciem φ, jak i za przyjęciem ψ przemawiają jakieś racje natury matematycznej: każde z tych zdań ma interesujące konsekwencje, które są *istotnie* wykorzystywane w obszernych fragmentach matematyki.

3. φ jest sprzeczne z ψ.

Nie widać żadnych powodów, aby istnienie takich zdań z góry wykluczyć. Czy jednak można obecnie podać stosowne przykłady? *Częściowo* odpowiada temu przypadkowi para zdań AC oraz AD, gdzie AC jest aksjomatem wyboru, natomiast AD jest *aksjomatem determinacji*. Pożytki z aksjomatu wyboru są powszechnie znane. Aksjomat determinacji jest atrakcyjny np. z punktu widzenia *teorii miary*. Implikuje on, że każdy podzbiór odcinka jednostkowego $[0, 1]$ zbioru liczb rzeczywistych jest mierzalny w sensie Lebesgue'a. Jego konsekwencjami są też inne jeszcze ważne stwierdzenia o zbiorach liczb rzeczywistych, o liczbach kardynalnych, o dowodliwości w ZF. Tak więc, AC oraz AD, będąc wzajem sprzecznymi, wyrażają jednak, każdy z osobna, istotne intuicje matematyczne. Ich rola w teorii mnogości jest jednak nierówna. Aksjomat wyboru jest bardziej podstawowy, odnosi się do *wszelkich* zbiorów. Natomiast aksjomat determinacji AD dotyczy właściwie podzbiorów przestrzeni Baire'a. Aksjomat determinacji (Mycielskiego-Steinhausa) nie jest ogólnym aksjomatem teorii mnogości. Ponadto, ZF wraz ze zdaniem mówiącym o zdeterminowaniu *każdej* gry (dla dowolnych zbiorów, nie tylko podzbiorów przestrzeni Baire'a) jest sprzeczna.

Zwykle przywołuje się trzy klasyczne przykłady, ukazujące konieczność zmiany intuicji na skutek wykrycia antynomii lub paradoksów:

1. odkrycie *niewymierności*,

2. paradoksy *nieskończoności*,

3. *antynomia Russella*.

W pierwszym z tych przypadków zmiana intuicji (dotyczących pojęcia liczby) dokonywała się dość długo – rozsądne jest założyć, że dopiero w wieku XIX ustalono precyzyjne rozumienie pojęcia liczby rzeczywistej (choć pewne uogólnienia formułowane były dopiero w wieku XX). Paradoksy nieskończoności związane były zarówno z faktem (dostrzeganym np. przez Proklosa, Galileusza, Bolzanę) równoliczności zbiorów nieskończonych z ich częściami właściwymi, jak również z wykorzystywaniem tego faktu w rozważaniach geometrycznych, np. dla sofistycznych sztuczek odnoszących się do rzekomej równości miary różnych obiektów geometrycznych, czy wreszcie z rozważaniami dotyczącymi natury kontinuum geometrycznego. Obecnie operować możemy kilkoma pojęciami nieskończoności (np. Dedekinda, von Neumanna, Tarskiego) i stare paradoksy zostały, można rzec, oswojone i rozwikłane. Osobną sprawą jest oczywiście dyskusja dotycząca zasadności przyjmowania w teorii mnogości aksjomatów istnienia bardzo dużych liczb kardynalnych. Antynomia Russella została z teorii mnogości wyeliminowana poprzez narzucenie stosownego ograniczenia na postać aksjomatu wyróżniania, jak wiadomo.

Czy współcześnie napotykamy na paradoksy w matematyce? Wyliczmy niektóre z wyników, które czasami opatruje się etykietką „paradoksalne". Przykłady dobrane są trochę *ad hoc*, bez jakiegokolwiek zamiaru systematyczności prezentacji:

1. *Paradoks Banacha-Tarskiego*. Twierdzenie, udowodnione przez Banacha i Tarskiego głosi, że kulę trójwymiarową można podzielić na skończoną liczbę części, z których poprzez izometrie otrzymać można dwie kule, każda o mierze równej kuli wyjściowej. Paradoksalność tego wyniku – z punktu widzenia potocznych intuicji – jest oczywista. Należy jednak pamiętać, że wynik ten otrzymujemy wykorzystując środki nieefektywne (aksjomat wyboru) oraz że części, z których składamy owe dwie kule są „bardzo dziwne", z punktu widzenia intuicji potocznych (nie są mierzalne w sensie Lebesgue'a).

2. *Paradoks Smale'a*. Sferę dwuwymiarową można „przenicować" na drugą stronę w przestrzeni trójwymiarowej. Problem ma oczywiście precyzyjny opis analityczny, odwołujący się do homotopii zanurzeń sfery S^2 w przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Możliwe są także „wizualizacje" tego procesu. Dopuszczalne jest przy tym „samoprzenikanie" się przekształcanej sfery, natomiast wykluczone zostaje tworzenie pewnych nieregularności. Wynik ten przeczy, rzecz jasna, intuicjom potocznym. Dodajmy, że „przenicowanie" okręgu S^1 na płaszczyźnie nie jest wykonalne.

3. *Paradoksy probalistyczne i statystyczne*. Zwróćmy uwagę, że wszyscy czujemy się *intuicyjnymi statystykami*: zdaje nam się na ogół, że potrafimy (bezrefleksyjnie!) poprawnie ocenić prawdopodobieństwa. Tak oczywiście nie jest: szukane prawdopodobieństwa trzeba *policzyć*. Znakomitym (i dość powszechnie znanym) przykładem pułapki w ocenie prawdopodobieństw jest np. tzw. *Monty Hall Problem*. Innego przykładu dostarczają *ciągi von Misesa*. Ciągi zerojedynkowe, w których prawdopodobieństwo wystąpienia każdego układu n kolejnych wyników jest równe $\frac{1}{2^n}$ nazywamy ciągami

nieskończenie dystrybytuwnymi, a ciągami *von Misesa* nazywamy każdy nieskończony ciąg zerojedynkowy, którego dowolny podciąg nieskończony (a zatem jakkolwiek wybrany) jest nieskończenie dystrybutywny. Bez głębszej analizy matematycznej mogłoby się zdawać, że ciągi von Misesa są dobrymi kandydatami na (intuicyjnie rozumiane) ciągi całkowicie losowe, nie wykazujące więc żadnych regularności. Zachodzi jednak twierdzenie, udowodnione przez Josepha Dooba: *ciągi von Misesa nie istnieją*. Podane przez nas warunki okazały się zatem razem wewnętrznie sprzeczne, choć mogłoby się wydawać, że staraliśmy się przecież zachować pełen obiektywizm w próbie podania definicji obiektu całkowicie losowego.

4 Standard, wyjątek, patologia

W jakim sensie można (i czy trafnie) powiedzieć, że intuicja matematyczna podąża za standardem, za normą, za zwyczajnością? Czy są (i jakie) różnice między *intuicyjnym* a *oswojonym*? Pojęcia: *standard* oraz *patologia* są wyróżniane przy użyciu czynników *pragmatycznych*, nie zawsze klarownych. Natomiast terminy: *wyjątek* oraz *kontrprzykład* można określić dość precyzyjnie (choć jakiś obiekt może być jednocześnie wyjątkiem i patologią). Wszystkie te pojęcia odnosimy przy tym do *obiektów* matematycznych, a nie np. do *zachowań* matematyków.

4.1 Standard

Bardzo często w tekstach matematycznych spotykamy określenie „dobrze się zachowujący" (*well behaved*), w odniesieniu np. do: funkcji, przestrzeni, zbiorów, struktur algebraicznych. Nie ma to określenie żadnej precyzyjnej definicji, przydawane mu znaczenie zależy m.in. od: celów rozważanej teorii, odczuć estetycznych matematyków, czy wreszcie „mody" matematycznej ustalonego okresu. Zdarza się, że to, co było uważane za odbiegające od standardu, za patologiczne w pewnym okresie, staje się później dobrze wyodrębnionym działem matematyki – pomyślmy np. o: liczbach *niewymiernych*, liczbach *urojonych*, obiektach *fraktalnych*.

Ze względu na przydatność w zastosowaniach, można na przykład rzec, że *ciała* zachowują się *lepiej* niż pierścienie, a funkcje *rekurencyjne* są lepsze od całkiem dowolnych funkcji. Podobnie, w analizie matematycznej lub topologii można orzekać, iż np.:

1. Funkcje *analityczne* (czyli funkcje klasy C^ω) zachowują się lepiej od funkcji *gładkich* (funkcji klasy C^∞).

2. Funkcje *różniczkowalne* zachowują się lepiej od funkcji *ciągłych*.

3. Przestrzenie *Hausdorffa* zachowują się lepiej niż *ogólne* przestrzenie topologiczne.

4. Zbiory *Borelowskie* zachowują się lepiej niż *dowolne* zbiory liczb rzeczywistych.

Należy przy tym wyraźnie podkreślić, że „zachowywać się lepiej" wcale nie musi oznaczać „być w większości". Jak wiadomo, większość funkcji (zmiennej rzeczywistej) to funkcje *nieciągłe*, większość funkcji gładkich to funkcje, które analityczne nie są, jest kontinuum wszystkich funkcji o argumentach i wartościach w zbiorze liczb naturalnych, a tylko przeliczalnie wiele *rekurencyjnych* takich funkcji. W tym znaczeniu „dobrze się zachowujący" znaczy więc *prototypowy* ze względu na rozważania aplikacyjne.

Tworzenie nowych teorii matematycznych może się wiązać z porzucaniem standardu, zwykłości, normalności. Dla przykładu, możemy pewne obiekty traktowane do tej pory jako jedynie użyteczne fikcje formalne (np. liczby urojone) zacząć uważać za obiekty normalne, standardowe, których istnienie przyjmujemy bez zastrzeżeń. Konkretny wynik matematyczny lub konstrukcja (np. odkrycie geometrii nieeuklidesowych) może stanowić o tym, że jakiś obiekt traci cechę bycia standardowym i zaczyna być postrzegany w innym świetle, jako przypadek szczególny ogólniej pojmowanych obiektów.

Terminu *standardowy* używamy też w znaczeniu *zamierzony*. Nie będziemy w tym tekście przypominać trudności, związanych z rozumieniem terminu *model zamierzony*. Zwróćmy jedynie uwagę, że np. model standardowy arytmetyki Peana pierwszego rzędu PA (będący jej modelem zamierzonym) jest właściwie *wyjątkiem* wśród kontinuum jej wszystkich modeli przeliczalnych. Tego, co go w tej klasie wyróżnia, nie daje się wyrazić ani środkami składniowymi teorii, ani jej własnościami semantycznymi. Dopiero za pomocą środków *metajęzykowych* możemy ów model scharakteryzować:

1. Model standardowy arytmetyki jest jej modelem *pierwszym*.

2. Model standardowy arytmetyki jest jej jedynym modelem *dobrze uporządkowanym*.

3. Model standardowy arytmetyki jest jej jedynym modelem *rekurencyjnym*.

Wszystkie pozostałe modele arytmetyki – jej modele *niestandardowe* – nazywamy *patologicznymi*, a to ze względu na to, iż różnią się od modelu *zamierzonego* tej teorii, który stanowić mają – jakoś wprzódy intuicyjnie dane – *prawdziwe* liczby naturalne. Wyraźnie widoczna jest tu *pragmatyczna* podstawa dla użycia terminu *patologiczny*.

4.2 Wyjątek

Klasyfikacja wszystkich grup skończonych podaje całe rodziny takich grup, tworzonych wedle określonych wzorców. Poza tymi rodzinami pozostaje nieliczna grupa *wyjątków*: grupy *sporadyczne*. Są to więc grupy skończone, które nie pasują do wybranych w klasyfikacji wzorców. Nie nazwiemy ich *patologicznymi*: są to po prostu obiekty, które nie zmieściły się do przygotowanych szufladek klasyfikacji i trzeba je zebrać razem, właśnie jako wyjątki.

Wyjątkiem wśród liczb pierwszych jest liczba 2, jako jedyna parzysta liczba pierwsza. Wyjątkami są wymiary 3 oraz 7 jako jedyne, w których można określić nietrywialny iloczyn wektorowy. Wyjątkowe są wielościany foremne (i ogólniej, wielokomórki foremne), wyróżnione spośród wszystkich wielościanów własnościami odwołującymi się do symetrii.

Rozdzielenie znaczeń terminów: *wyjątkowy* oraz *patologiczny* stosowanych w odniesieniu do obiektów matematycznych bywa trudne. Można chyba pokusić się o przybliżoną charakterystykę: obiekty *wyjątkowe* (w danej klasie obiektów) mają pewne wyróżnione własności, nadające im szczególny status w rozważanej klasie, natomiast obiekty *patologiczne* to obiekty „niechciane" w rozważanej klasie, ze względu na jakieś głębokie niezgodności z naszymi *intuicyjnymi* wyobrażeniami o *normalnych* obiektach rozważanej klasy. Są to wszystko określenia natury pragmatycznej, z samej swojej istoty wielce nieprecyzyjne. Ponadto, myślenie życzeniowe nie dostarcza oczywiście prawomocnych wskazówek do uprawiania matematyki.

Możemy mieć dość dobrze ustalone wyobrażenia intuicyjne o obiektach jakiejś klasy, a jednak bywamy czasem zaskoczeni *niespodziankami* – tak jest np. w przypadku klasy skończonych matryc logicznych, które, *wydawałoby się*, można zgrabnie opisać. Jak się jednak okazuje, istnieją matryce skończone, które nie są aksjomatyzowalne – zob. np. (Pałasińska 1994), (Wojtylak 1979).

Jak już wspomnieliśmy, czasem odróżnienie *wyjątku* od *patologii* bywa trudne, dla przykładu:

1. *Sfera rogata Alexandera* ma m.in. następujące własności:

   (a) Jest homeomorficzna ze zwykłą sferą dwuwymiarową.

   (b) Dzieli całą przestrzeń trójwymiarową na dwa obszary, przy czym obszar wewnątrz sfery rogatej *jest* homeomorficzny z wnętrzem zwykłej sfery, ale obszar na zewnątrz sfery rogatej *nie jest* homeomorficzny z obszarem na zewnątrz zwykłej sfery.

   Tak więc, sfera rogata Alexandera dostarcza przykładu na to, iż twierdzenie Jordana-Schönfliessa nie daje się uogólnić z dwóch do trzech wymiarów. W tym sensie, jest ona obiektem *wyjątkowym*. Czy jest także *obiektem* *patologicznym?* Owszem, jej własności pozostają w rażącej niezgodności z niektórymi *potocznymi* wyobrażeniami geometrycznymi. Czy jednak całkowicie burzą owe potoczne intuicje czy też raczej wskazują na to, iż owe intuicje są dość pobieżne i nie wyczerpują naszej wiedzy o obiektach topologicznych? Spór terminologiczny nie jest zresztą kwestią najwyższej wagi.

2. Przez *sferę egzotyczną* rozumiemy w geometrii różniczkowej rozmaitość różniczkowalną, która jest homeomorficzna ze „zwykłą" sferą w przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej, lecz nie jest z nią dyfeomorficzna. Pierwszy przykład takiej sfery (siedmiowymiarowej) podał John Milnor w latach pięćdziesiątych XX wieku. Nie wiadomo obecnie (2011), czy istnieją egzotyczne sfery czterowymiarowe. Czy sfery egzotyczne nazwiemy obiektami *patologicznymi*? Gdyby tak czynić, to musielibyśmy chyba jednocześnie przyznawać, że mamy jakieś głębokie intuicje dotyczące struktur różniczkowych w przestrzeniach o dużej liczbie wymiarów. Czy jednak mamy takie intuicje np. w przypadku przestrzeni siedmiowymiarowej?

3. Przez *egzotyczną* $\mathbb{R}^4$ rozumiemy rozmaitość różniczkowalną, która jest homeomorficzna z przestrzenią euklidesową $\mathbb{R}^4$, lecz nie jest z nią dyfeomorficzna. Istnieje kontinuum niedyfeomorficznych struktur różniczkowych na $\mathbb{R}^4$. Wymiar 4 jest tu wyróżniony: dla żadnej $n \neq 4$ nie istnieją struktury egzotyczne na $\mathbb{R}^n$.

Wyjątek to zatem pojęcie relatywne, związane z jakimś uporządkowaniem rozważanych obiektów matematycznych, próbą ich klasyfikowania, twierdzeniami o nich dowodzonymi, itp. Nie możemy mówić o wyjątkach w jakimś absolutnym sensie.

4.3 Patologia

Klasyczne przykłady obiektów, które bez wahania nazywano patologicznymi, to m.in.: *krzywa Peana*, *krzywa Hilberta*, *funkcja Weierstrassa* (wszędzie ciągłe, lecz nieróżniczkowalne w żadnym punkcie). Wszystkie te obiekty powstają w wyniku procesu granicznego (jako granice jednostajnie zbieżnych ciągów funkcji) i stanowią przykłady obiektów o własnościach głęboko sprzecznych z potocznymi intuicjami geometrycznymi:

> Krzywe Peana oraz Hilberta są ciągłe, nigdzie nie są różniczkowalne, wykres każdej z nich całkowicie wypełnia kwadrat jednostkowy.

Tak więc, krzywe te uważane były za *dziwolągi* o własnościach wyraźnie naruszających potoczne intuicje matematyczne dotyczące krzywych, jako obiektów o wykresie *jednowymiarowym* z topologicznego punktu widzenia. Należy tu podkreślić, że te (oraz liczne podobne) konstrukcje powstały wtedy, gdy dotychczasowe – intuicyjne – pojęcie funkcji zastąpiono – precyzyjnym – pojęciem całkiem dowolnej funkcji. Ich patologiczność jest zatem częścią ceny płaconej za precyzję i ogólność definicji pojęcia funkcji. Niektórymi z momentów, w których pojawiają się patologie są zatem te, gdy ma miejsce uogólnianie, wypracowywanie precyzyjnych definicji, wychodzących poza intuicje potoczne. Dla przykładu, uogólnienie klasycznego pojęcia spełniania i rozważanie *klas spełniania* pokazuje, że owe klasy miewają nieoczekiwane, a nawet patologiczne własności (z punktu widzenia naszych oczekiwań, dotyczących pojęć związanych z prawdziwością).

Pojęcie *patologii* w matematyce jest relatywne, nie tylko historycznie. Zdarzało się wielokroć, że obiekty, które wydawały się kiedyś patologiczne, zostawały później „oswajane", a czasem wręcz stawały się podstawowymi obiektami badania – tak rzecz się miała zarówno z liczbami niewymiernymi, jak i z liczbami zespolonymi. Konstrukcje niektórych obiektów patologicznych wykorzystują *nieefektywne* środki dowodowe. Zbiór Cantora jest nieprzeliczalny, lecz ma miarę zero. Ma cały szereg dalszych interesujących własności, jest jednym z ważniejszych obiektów badanych w topologii i teorii mnogości. Jest już obiektem „oswojonym" – wydaje się, że żaden zawodowy matematyk nie nazwie zbioru Cantora obiektem patologicznym, takim epitetem obdarza się go jedynie w niektórych tekstach popularyzujących matematykę, gdy chce się zadziwić niewinnego czytelnika.

Wiele ciekawego materiału na temat wyjątków, patologii, konstrukcji stanowiących kontrprzykłady znaleźć można np. w: (Steen, Seebach 1995), (Gelbaum, Olmsted 1990, 2003), (Wise, Hall 1993).

5 Pułapki intuicji

Wiele konstrukcji matematycznych było inspirowanych zagadnieniami z nauk ścisłych, głównie z fizyki. Owe „wiodące przykłady" mogą jednak odnosić się tylko do pewnej klasy zjawisk, przenoszenie intuicji na inną może być zwodnicze – dość pomyśleć o kłopotach ze stosowaniem intuicji dotyczących doświadczenia potocznego do zachowania się obiektów mikroświata kwantowego.

Pułapki niepełnej lub zwodniczej intuicji matematycznej mogą zależeć od różnych okoliczności. Łatwo pokazywać je na poziomie edukacji szkolnej lub uniwersyteckiej – zob. np. (Lietzman 1958), trudniej w pracach specjalistycznych zawodowych matematyków, gdyż w tym ostatnim przypadku, intuicje mogą zwodzić *przed* opublikowaniem pracy, w samej zaś pracy oddanej do druku nie ma już po nich żadnego śladu. Mówi się czasem o intuicji genialnych matematyków (jak Euler czy Cauchy) wyprzedzających swoimi wynikami własną epokę, choć wyniki te – z punktu widzenia ich poprawności wedle standardów współczesnych – były formułowane nieściśle lub wręcz niepoprawnie. Rzadziej wskazuje się na jakieś głębsze błędy – por. np. (Lecat 1935). Błędne intuicje są porzucane, więc trudno je potem wykryć.

Gdy mówimy tutaj o *błędach intuicji*, to nie mamy na myśli *wyłącznie* sytuacji, w których ktoś przeprowadza niepoprawny dowód, np. przyjmując jakieś ukryte założenia jako intuicyjnie oczywiste, bądź stosuje nieuprawnione kroki dowodowe (mniemając np., że jego konstrukcja dotyczy obiektów *normalnych*, *typowych*, itp. i gubiąc ogólność rozważań). Chodzi nam raczej także o tworzenie i kultywowanie przekonań, które z czasem okazują się na tyle idiosynkratyczne, że późniejsza praktyka matematyczna je odrzuca. Być może dobrym przykładem takiej sytuacji byłby *Aksjomat Ograniczenia* Fraenkla, głoszący – w uproszczeniu – że istnieją tylko te zbiory, których istnienie daje się dowieść z aksjomatów teorii mnogości.

Podkreślmy zatem, że nie mówimy tu o błędach popełnianych przez nieuwagę, niekompetencję lub myślenie życzeniowe. Nie chodzi więc o przypadki, powiedzmy, dzielenia przez zero, nieuprawnione przejścia graniczne, zaniedbanie zbadania zbieżności szeregu, itp. Interesujące jest natomiast to, czy pewne intuicje matematyczne mogą prowadzić w „ślepą uliczkę", spowodować, że dalszy rozwój teorii staje się niemożliwy.

W szczególności, frapujące jest chyba pytanie, czy matematycy mogą sprzeczać się na temat swoich intuicji i gruntownie, pryncypialnie się co do nich nie zgadzać – czy też, przeciwnie, dążą oni ostatecznie do wykształcenia ogólnie obowiązujących, *jedynie słusznych* intuicji. Sztandarowym przykładem pierwszego członu tej alternatywy jest chyba spór matematyki klasycznej z intuicjonistyczną. Drugi natomiast jej człon to wszelkiego typu sytuacje, gdy o całkiem różnych ujęciach matematycznych rozważanego problemu można udowodnić, że są one równoważne. Tu dobrym przykładem jest pokazanie, że wiele różnych matematycznych ujęć pojęcia *obliczalności* daje w efekcie dokładnie tę samą klasę funkcji.

Znamy wiele sporów w historii matematyki, dotyczących wyższości jednych metod nad drugimi – dla przykładu, sporu zwolenników Newtona ze zwolennikami Leibniza lub sporu o właściwe podejście do uprawiania rachunku wektorowego, pomiędzy zwolennikami Hamiltona i Grassmanna (zob. np. Kordos 2005: 196–198). W tych przypadkach jednak *rozwidlanie się* intuicji leżących u podstaw odnośnych konstrukcji nie prowadziło do rozszczepienia samej matematyki.

6 Zakończenie

Nie staraliśmy się wyjaśnić w powyższym tekście *czym jest* intuicja matematyczna, ograniczając się jedynie do uwag na temat tego, w jaki sposób przejawia się ona w działaniu. Bardziej zdecydowanie wypowiadają się liczni filozofowie i nieliczni matematycy. Niedawno opublikowane monografie związane z intuicją matematyczną to (Parsons 2008) oraz (Tieszen 1989). Komentarze na jej temat znajdujemy w opracowaniach z filozofii matematyki. Jednak najciekawsze, naszym zdaniem, uwagi znaleźć można w opracowaniach historycznych, gdzie ukazuje się zmiany w rozumieniu pojęć matematycznych, wskazuje na motywacje tworzenia i rozwijania poszczególnych teorii, itd. Nie należy nie doceniać również prac popularyzujących matematykę – inaczej niż podręcznikach, autorzy nie są tu zobligowani do wyczerpującego i konsekwentnego przedstawienia materiału, co owocuje często świeżym spojrzeniem i wydobyciem na wierzch naprawdę frapujących zagadnień, które trzeba nadto wyrazić językiem zrozumiałym także dla nieprofesjonalistów, a więc w szczególności językiem odwołującym się do *intuicji matematycznych*.

Bibliografia

Barrow, J.D. 1996. *π razy drzwi. Szkice o liczeniu, myśleniu i istnieniu.* Warszawa: Prószyński i S-ka.

Corry, L. 2004. *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser.

Davis, J.P., Hersh, R. 1994. *Świat Matematyki*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Gelbaum, B.R., Olmsted, J.M.H. 1990. *Theorems and Counterexamples in Mathematics*. New York: Springer-Verlag.

Gelbaum, B.R., Olmsted, J.M.H. 2003. *Counterexamples in Analysis*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc.

Good, I. J., Churchhouse, R. F. 1968. The Riemann hypothesis and pseudorandom features of the Möbius sequence, *Mathematics of Computation* **22**, 857–861.

Juszkiewicz, A.P. (red.) 1975–1977. *Historia matematyki. Od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia.* Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. Tom **1**: *Od czasów najdawniejszych do początku czasów nowożytnych* (1975). Tom **2**: *Matematyka XVII stulecia* (1976). Tom **3**: *Matematyka XVIII stulecia* (1977).

Kordos, M. 2005. *Wykłady z historii matematyki*. Warszawa: SCRIPT.

Lecat, M. 1935. *Erreurs de Mathematiciens des origines à nos jours.* Brüssel: Castaigne.

Lietzmann, W. 1958. *Gdzie tkwi błąd? Sofizmaty matematyczne i sygnały ostrzegawcze.* Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych.

Pałasińska, K. 1994. Three-element nonfinitely axiomatizable lattices. *Studia Logica* **53**, 361–372.

Parsons, C. 2008. *Mathematical Thought and Its Objects*. Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, São Paulo: Cambridge University Press.

Steen, L.A., Seebach, J.A., Jr. 1995. *Counterexamples in Topology*. New York: Dover Publications, Inc.

Tieszen, R.L. 1989. *Mathematical intuition: phenomenology and mathematical knowledge*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Wise, G.L., Hall, E.B. 1993. *Counterexamples in Probability and Real Analysis*. New York: Oxford University Press.

Wojtylak, P. 1979. An example of a finite though finitely non-axiomatizable matrix. *Reports on Mathematical Logic* **17**, 39–46.