Imię i nazwisko: .... WAKACJE W GRECJI

A. Zdanie $\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ (Q(y) \wedge R(x, y)))$ jest:

1. prawdziwe w interpretacji:
   Uniwersum: zbiór wszystkich liczb naturalnych
   $P(x)$: x jest liczbą parzystą
   $Q(x)$: x jest liczbą nieparzystą
   $R(x, y)$: x jest mniejsza od y.
2. fałszywe w interpretacji:
   Uniwersum: zbiór wszystkich liczb rzeczywistych
   $P(x)$: x jest liczbą dodatnią
   $Q(x)$: x jest liczbą wymierną
   $R(x, y)$: x jest kwadratem y.

B. Udowodnij, że zdanie $(\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)) \rightarrow \exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$ nie jest tautologią klasycznego rachunku predykatów.

Wystarczy wskazać interpretację, w której poprzednik tej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Dla przykładu:

1. Uniwersum: zbiór wszystkich liczb całkowitych
2. $P(x)$: x jest liczbą parzystą
3. $Q(x)$: x jest liczbą nieparzystą.

W rozważanym uniwersum istnieją liczby parzyste oraz istnieją liczby nieparzyste, ale żadna liczba nie jest jednocześnie parzysta i nieparzysta.

C. Używając predykatów „być liczbą parzystą", „być liczbą nieparzystą", „być podzielną przez", predykatu identyczności oraz funkcji mnożenia zapisać zdanie: *Pewna liczba parzysta jest podzielna przez iloczyn dwóch różnych liczb nieparzystych.*

Wprowadzamy oznaczenia:

1. $P(x)$: x jest liczbą parzystą
2. $N(x)$: x jest liczbą nieparzystą
3. $D(x, y)$: x dzieli bez reszty y (a zatem $D(x, y)$ stwierdza, że y jest podzielna przez x)
4. $I(x, y)$: x jest identyczna z y
5. $\otimes$: dwuargumentowy symbol funkcyjny mnożenia.

Wtedy rozważane zdanie ma następującą postać:

$$\exists x\ (P(x) \wedge \exists y \exists z\ (\neg I(y, z) \wedge N(y) \wedge N(z) \wedge D(\otimes(y, z), x))).$$

Imię i nazwisko: .... WAKACJE W FINLANDII

A. Zdanie $\exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ (Q(y) \rightarrow R(x,y)))$ jest:

1. prawdziwe w interpretacji:

   Uniwersum: zbiór wszystkich liczb naturalnych

   $P(x)$: x jest liczbą parzystą

   $Q(x)$: x jest liczbą podzielną przez 4

   $R(x,y)$: x dzieli bez reszty y.

2. fałszywe w interpretacji:

   Uniwersum: zbiór wszystkich liczb naturalnych

   $P(x)$: x jest liczbą parzystą

   $Q(x)$: x jest liczbą nieparzystą

   $R(x,y)$: x dzieli bez reszty y.

B. Udowodnij, że zdanie $\forall x\ (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x))$ nie jest tautologią klasycznego rachunku predykatów.

Wystarczy wskazać interpretację, w której poprzednik tej implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Dla przykładu:

1. Uniwersum: zbiór wszystkich liczb całkowitych
2. $P(x)$: x jest liczbą parzystą
3. $Q(x)$: x jest liczbą nieparzystą.

W rozważanym uniwersum każda liczba jest parzysta lub nieparzysta, ale nie jest prawdą, że wszystkie liczby są parzyste lub wszystkie liczby są nieparzyste.

C. Używając predykatów „być liczbą parzystą", „być liczbą nieparzystą", „być podzielną przez", predykatu identyczności oraz funkcji dodawania zapisać zdanie: *Każda liczba nieparzysta jest podzielna przez sumę dwóch różnych liczb parzystych.*

1. $P(x)$: x jest liczbą parzystą
2. $N(x)$: x jest liczbą nieparzystą
3. $D(x,y)$: x dzieli bez reszty y (a zatem $D(x,y)$ stwierdza, że y jest podzielna przez x)
4. $I(x,y)$: x jest identyczna z y
5. $\oplus$: dwuargumentowy symbol funkcyjny dodawania.

Wtedy rozważane zdanie ma następującą postać:

$$\forall x\ (N(x) \rightarrow \exists y \exists z\ (\neg I(y,z) \wedge P(y) \wedge P(z) \wedge D(\oplus(y,z),x))).$$