METODY DOWODZENIA TWIERDZEŃ I AUTOMATYZACJA ROZUMOWAŃ

WYKŁAD 5A: MODELE HERBRANDA

III rok kognitywistyki UAM, 2016–2017

Zakładamy, że słuchacze pamiętają wiadomości z kursu *Logika I* dotyczące semantyki KRP. W tym wykładzie pokażemy, jak budować modele pewnego szczególnego typu.

1 Semantyka logiki pierwszego rzędu

1.1 Modele

Przez *model* języka pierwszego rzędu L o sygnaturze złożonej ze zbioru predykatów $\mathbf{R}$, symboli funkcyjnych $\mathbf{F}$ oraz stałych indywidualnych $\mathbf{C}$ rozumiemy parę $\mathbf{M} = (\mathbf{D}, \mathbf{I})$, gdzie:

1. $\mathbf{D}$ jest niepustym zbiorem (*dziedziną* $\mathbf{M}$)
2. $\mathbf{I}$ jest odwzorowaniem (*interpretacją*), które przyporządkowuje:
   (a) każdemu n-argumentowemu predykatowi $P \in \mathbf{R}$ relację $P^{\mathbf{I}} \subseteq \mathbf{D^n}$
   (b) każdemu n-argumentowemu symbolowi funkcyjnemu $f \in \mathbf{F}$ funkcję $f^{\mathbf{I}} : \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}$
   (c) każdej stałej $c \in \mathbf{C}$ element $c^{\mathbf{I}} \in \mathbf{D}$.

Zakładamy, że słuchacze pamiętają definicje następujących pojęć:

1. Wartościowanie (w dziedzinie modelu)
2. Podstawienie (termu za zmienną w termie lub formule)
3. Wartość termu/formuły w modelu dla danego wartościowania
4. Spełnianie i prawdziwość formuł w modelu
5. Wynikanie logiczne

W notacji proponowanej przez Fittinga:

1. Podstawienie $\sigma : \mathbf{V} \to \mathbf{T}$ (funkcja ze zbioru zmiennych w zbiór termów).

   (a) Jeśli σ jest podstawieniem, to σ_x jest podstawieniem, które przyjmuje wartość x dla argumentu x, a pozostałe wartości ma takie same, jak podstawienie σ.

   (b) Operację podstawiania rozszerzamy w znany sposób na zbiór formuł.

   (c) Wartość podstawienia σ dla formuły Φ oznaczamy przez $\Phi\sigma$.

2. Wartościowanie $\mathbf{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{D}$ (funkcja ze zbioru zmiennych w dziedzinę modelu). Niech $x^{\mathbf{A}}$ oznacza wartość $\mathbf{A}$ dla argumentu x.

   (a) Wartościowania rozszerzamy w znany sposób na zbiory: termów oraz formuł.

   (b) Wartość termu t w modelu $\mathbf{M} = (\mathbf{D}, \mathbf{I})$ przy wartościowaniu $\mathbf{A}$ oznaczamy przez $t^{\mathbf{I},\mathbf{A}}$.

   (c) Wartość formuły Φ w modelu $\mathbf{M} = (\mathbf{D}, \mathbf{I})$ przy wartościowaniu $\mathbf{A}$ oznaczamy przez $\Phi^{\mathbf{I},\mathbf{A}}$.

Znany Fakt. Załóżmy, że t jest termem domkniętym, Φ formułą języka pierwszego rzędu L, a $\mathbf{M} = (\mathbf{D}, \mathbf{I})$ modelem dla L. Niech x będzie zmienną, zaś $\mathbf{A}$ wartościowaniem takim, że $x^{\mathbf{A}} = t^{\mathbf{I}}$. Wtedy: $(\Phi(x/t))^{\mathbf{I},\mathbf{A}} = \Phi^{\mathbf{I},\mathbf{A}}$.

1.2 Modele Herbranda

Model $\mathbf{M} = (\mathbf{D}, \mathbf{I})$ dla języka L nazywamy *modelem Herbranda*, gdy:

1. $\mathbf{D}$ jest zbiorem wszystkich termów domkniętych (bazowych) języka L.

2. $t^{\mathbf{I}} = t$ dla każdego termu domkniętego t.

Zauważmy, że w modelu Herbranda wartościowania pokrywają się z podstawieniami. W konsekwencji (co łatwo dowieść przez indukcję strukturalną; zob. Fitting 1990, 108):

1. Jeśli $\mathbf{M} = (\mathbf{D}, \mathbf{I})$ jest modelem Herbranda dla L, to $t^{\mathbf{I},\mathbf{A}} = (t\mathbf{A})^{\mathbf{I}}$ dla każdego termu języka L.

2. Jeśli $\mathbf{M} = (\mathbf{D}, \mathbf{I})$ jest modelem Herbranda dla L, to $\Phi^{\mathbf{I},\mathbf{A}} = (\Phi\mathbf{A})^{\mathbf{I}}$.

Warunki prawdziwości dla kwantyfikatorów w modelu Herbranda:

1. $\mathbf{M} \models \forall x \Phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{M} \models \Phi[x/d]$ dla wszystkich $d \in \mathbf{D}$.
2. $\mathbf{M} \models \exists x \Phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{M} \models \Phi[x/d]$ dla pewnego $d \in \mathbf{D}$.

1.3 Jednolita notacja dla języka logiki pierwszego rzędu

Notacja Smullyana dla języków pierwszego rzędu oprócz podanych wcześniej konwencji dla funktorów prawdziwościowych uwzględnia jeszcze notację dla formuł skwantyfikowanych oraz ich negacji. Rozróżnia się dwa typy: γ-*formuły*, które „działają” uniwersalnie (czyli formuły z kwantyfikatorem generalnym lub z zaprzeczeniem kwantyfikatora egzystencjalnego) oraz δ-*formuły*, które „działają” egzystencjalnie (czyli formuły z kwantyfikatorem egzystencjalnym lub z zaprzeczeniem kwantyfikatora generalnego). Dla każdego z tych typów formuł oraz dowolnego termu t określa się ich *instancje* w sposób następujący:

γ	$\gamma(t)$	δ	$\delta(t)$
$\forall x\varphi$	$\varphi(x/t)$	$\exists x\varphi$	$\varphi(x/t)$
$\neg\exists x\varphi$	$\neg\varphi(x/t)$	$\neg\forall x\varphi$	$\neg\varphi(x/t)$

Ta konwencja zostaje nieco zmodyfikowana w przypadku języków pierwszego rzędu z symbolami funkcyjnymi (gdzie uwzględniamy dodatkowo unifikację termu występującego w instancjach), jak zobaczymy później.
Użyteczny Lemat. Niech S będzie zbiorem zdań, a γ, δ zdaniami. Wtedy:

1. Jeśli $S \cup \{\gamma\}$ jest spełnialny, to spełnialny jest $S \cup \{\gamma, \gamma(t)\}$ dla dowolnego termu domkniętego t.
2. Jeśli $S \cup \{\delta\}$ jest spełnialny, to spełnialny jest $S \cup \{\delta, \delta(a)\}$ dla dowolnej stałej a, która nie występuje ani w S ani w δ.

Dowód Użytecznego Lematu. Zauważmy, że w lemacie jest mowa wyłącznie o zdaniach.
Dowód punktu 1. Załóżmy, że $S \cup \{\gamma\}$ jest spełnialny w modelu $\mathbf{M} = (\mathbf{D}, \mathbf{I})$. Pokażemy, że w tym samym modelu spełnialny jest $S \cup \{\gamma, \gamma(t)\}$ dla dowolnego termu domkniętego t.

1. Ponieważ w modelu $\mathbf{M}$ prawdziwe jest γ, więc w modelu tym prawdziwe jest także $\forall x\gamma(x)$, gdzie x jest zmienną nie występującą w γ.
2. Tak więc, dla każdego wartościowania $\mathbf{A}$, w $\mathbf{M}$ prawdziwe jest $(\gamma(x))^{\mathbf{I},\mathbf{A}}$.

3. Niech $\mathbf{A}$ będzie wartościowaniem takim, że $x^{\mathbf{A}} = t^{\mathbf{I}}$. Na mocy przywołanego wcześniej Znanego Faktu, mamy:

$$(\gamma(t))^{\mathbf{I},\mathbf{A}} = (\gamma(x/t))^{\mathbf{I},\mathbf{A}} = (\gamma(x))^{\mathbf{I},\mathbf{A}} = 1.$$

Dowód punktu 2. Załóżmy, że $S \cup \{\delta\}$ jest spełnialny w modelu $\mathbf{M} = (\mathbf{D}, \mathbf{I})$ oraz że a jest stałą nie występującą ani w S ani w δ. Pokażemy, że $S \cup \{\delta, \delta(a)\}$ jest spełnialny w *pewnym* modelu dla L.

1. Ponieważ w modelu $\mathbf{M}$ prawdziwe jest δ, więc w modelu tym prawdziwe jest także $\exists x \delta(x)$, gdzie x jest zmienną nie występującą w δ.

2. Tak więc, $(\delta(x))^{\mathbf{I},\mathbf{A}} = 1$ dla pewnego wartościowania $\mathbf{A}$. Nie można jednak dogmatycznie założyć, że $x^{\mathbf{A}} = a^{\mathbf{I}}$. Mimo to, *damy radę*, wPiSując się w deklarację powszechnego optymizmu.

3. Budujemy nowy model $\mathbf{M}^* = (\mathbf{D}, \mathbf{J})$ o tej samej dziedzinie $\mathbf{D}$ co model $\mathbf{M}$ oraz interpretacji $\mathbf{J}$, która nie różni się od $\mathbf{I}$ dla wszystkich symboli różnych od a, natomiast $a^{\mathbf{J}} = x^{\mathbf{A}}$.

4. Zdania nie zawierające stałej a mają te same wartości w modelach $\mathbf{M}$ oraz $\mathbf{M}^*$.

5. A zatem $S \cup \{\delta\}$ jest spełnialny w modelu $\mathbf{M}^*$ oraz $(\delta(x/a))^{\mathbf{J},\mathbf{A}} = 1$.

6. Ponieważ $a^{\mathbf{J}} = x^{\mathbf{A}}$, więc mamy:

$$(\delta(a))^{\mathbf{J},\mathbf{A}} = (\delta(x/a))^{\mathbf{J},\mathbf{A}} = (\delta(x))^{\mathbf{J},\mathbf{A}} = 1.$$

7. A zatem $S \cup \{\delta, \delta(a)\}$ jest spełnialny w modelu $\mathbf{M}^*$.

Szczególny przypadek powyższego lematu to:
Fakt. Jeśli $\mathbf{M} = (\mathbf{D}, \mathbf{I})$ jest modelem Herbranda dla L, to:

1. $\mathbf{M} \models \gamma$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{M} \models \gamma(d)$ dla wszystkich $d \in \mathbf{D}$.

2. $\mathbf{M} \models \delta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{M} \models \delta(d)$ dla pewnego $d \in \mathbf{D}$.

W językach pierwszego rzędu zachodzą twierdzenia: o indukcji strukturalnej oraz rekursji strukturalnej (zob. Fitting 1990, 111-112).

1.4 Lemat Hintikki

Zbiór zdań $\mathbf{H}$ języka pierwszego rzędu L jest *zbiorem Hintikki pierwszego rzędu* (dla L), gdy $\mathbf{H}$ jest zdaniowym zbiorem Hintikki (zob.: wykład drugi) oraz:

1. Jeśli $\gamma \in \mathbf{H}$, to $\gamma(t) \in \mathbf{H}$, dla każdego termu domkniętego języka L.
2. Jeśli $\delta \in \mathbf{H}$, to $\delta(t) \in \mathbf{H}$, dla pewnego termu domkniętego języka L.

Lemat Hintikki. Załóżmy, że zbiór termów domkniętych języka pierwszego rzędu L jest niepusty. Jeśli $\mathbf{H}$ zbiorem Hintikki pierwszego rzędu dla L, to $\mathbf{H}$ jest spełnialny w modelu Herbranda dla L.

Dowód Lematu Hintikki. Niech $\mathbf{H}$ będzie zbiorem Hintikki pierwszego rzędu dla L. Skonstruujemy model Herbranda $\mathbf{M} = (\mathbf{D}, \mathbf{I})$ dla L, a potem pokażemy, że $\mathbf{H}$ jest spełnialny w $\mathbf{M}$.

Niech $\mathbf{D}$ będzie zbiorem termów domkniętych języka L. Z założenia: $\mathbf{D} \neq \emptyset$. Określamy interpretację $\mathbf{I}$:

1. Jeśli c jest stałą języka L, to $c^{\mathbf{I}} = c$.
2. Jeśli f jest n-argumentowym symbolem funkcyjnym w L oraz $t_1, t_2, \ldots, t_n$ są elementami $\mathbf{D}$, to $f^{\mathbf{I}}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ jest termem domkniętym $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.
3. Jeśli R jest n-argumentowym predykatem w L oraz $t_1, t_2, \ldots, t_n$ są elementami $\mathbf{D}$, to $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in R^{\mathbf{I}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zdanie $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ należy do $\mathbf{H}$.

Przez indukcję strukturalną pokażemy teraz, że dla każdego zdania Φ języka L: jeśli $\Phi \in \mathbf{H}$, to $\mathbf{M} \models \Phi$.

1. Załóżmy, że zdanie atomowe $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ należy do $\mathbf{H}$. Trzeba pokazać, że $(R(t_1, t_2, \ldots, t_n))^{\mathbf{I},\mathbf{A}} = 1$ dla każdego wartościowania $\mathbf{A}$. Ponieważ $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ jest zdaniem, każdy t_i jest termem domkniętym, a więc $t_i^{\mathbf{I},\mathbf{A}} = t_i^{\mathbf{I}} = t_i$. Z założenia, że $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ należy do $\mathbf{H}$ i z definicji zbioru Hintikki mamy: $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in R^{\mathbf{I}}$. Ostatecznie:
$$(t_1^{\mathbf{I},\mathbf{A}}, t_2^{\mathbf{I},\mathbf{A}}, \ldots, t_n^{\mathbf{I},\mathbf{A}}) \in R^{\mathbf{I}},$$
czyli $(R(t_1, t_2, \ldots, t_n))^{\mathbf{I},\mathbf{A}} = 1$ dla wszystkich wartościowań $\mathbf{A}$, a więc pokazaliśmy, że $\mathbf{M} \models R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.
2. Kroki dotyczące $\bot$, $\top$ są oczywiste (definicja relacji $\models$).

3. Kroki indukcyjne dla funktorów prawdziwościowych są także oczywiste (definicja relacji $\models$).

4. Załóżmy, że γ jest zdaniem w L oraz $\gamma \in \mathbf{H}$. Pokażemy, że $\mathbf{M} \models \gamma$. Ponieważ $\gamma \in \mathbf{H}$, więc $\gamma(t) \in \mathbf{H}$ dla *każdego* termu domkniętego t (na mocy definicji zbioru Hintikki). Na mocy założenia indukcyjnego oraz faktu, że $\mathbf{D}$ jest zbiorem wszystkich termów domkniętych mamy: $\mathbf{M} \models \gamma(t)$ dla *każdego* termu domkniętego t. Na mocy Użytecznego Lematu, $\mathbf{M} \models \gamma$.

5. Załóżmy, że δ jest zdaniem w L oraz $\delta \in \mathbf{H}$. Pokażemy, że $\mathbf{M} \models \delta$. Ponieważ $\delta \in \mathbf{H}$, więc $\delta(t) \in \mathbf{H}$ dla *pewnego* termu domkniętego t (na mocy definicji zbioru Hintikki). Na mocy założenia indukcyjnego oraz faktu, że $\mathbf{D}$ jest zbiorem wszystkich termów domkniętych mamy: $\mathbf{M} \models \delta(t)$ dla *pewnego* termu domkniętego t. Na mocy Użytecznego Lematu, $\mathbf{M} \models \delta$.

Uwaga. W dalszej części wykorzystywać będziemy często nowe symbole (stałe) dodawane do rozważanego języka pierwszego rzędu L. Jeśli $L(\mathbf{R}, \mathbf{F}, \mathbf{C})$ jest językiem ze zbiorem predykatów $\mathbf{R}$, zbiorem symboli funkcyjnych $\mathbf{F}$ oraz zbiorem stałych $\mathbf{C}$, zaś $\mathbf{par}$ jest przeliczalnym zbiorem stałych takim, że $\mathbf{C} \cap \mathbf{par} = \emptyset$, to przez $L^{\mathbf{par}}$ rozumiemy język $L(\mathbf{R}, \mathbf{F}, \mathbf{C} \cup \mathbf{par})$. Elementy zbioru $\mathbf{par}$ nazywamy *nowymi stałymi* albo *parametrami*.

1.5 Własności niesprzeczności

Jeśli $\mathcal{C}$ jest rodziną zbiorów zdań języka $L^{\mathbf{par}}$, to $\mathcal{C}$ nazywamy *własnością niesprzeczności pierwszego rzędu* (dla języka L), gdy $\mathcal{C}$ jest zdaniową własnością niesprzeczności (zob. wykład drugi) oraz dla każdego $S \in \mathcal{C}$:

1. Jeśli $\gamma \in S$, to $S \cup \{\gamma(t)\} \in \mathcal{C}$ dla każdego termu domkniętego języka $L^{\mathbf{par}}$.

2. Jeśli $\delta \in S$, to $S \cup \{\delta(a)\} \in \mathcal{C}$ dla pewnego parametru a języka $L^{\mathbf{par}}$.

Przez *alternatywną własność niesprzeczności pierwszego rzędu* rozumiemy rodzinę $\mathcal{C}$ spełniającą warunki nakładane na własności niesprzeczności pierwszego rzędu ale przy zastąpieniu warunku dla δ-formuł przez warunek:

- Jeśli $\delta \in S$, to $S \cup \{\delta(a)\} \in \mathcal{C}$ dla *każdego* parametru a, który nie występuje w S.

Przez *podstawienie parametru* rozumiemy dowolne odwzorowanie zbioru $\mathbf{par}$ w siebie. Jeśli π jest takim odwzorowaniem, Φ jest formułą, a S zbiorem formuł, to:

1. $\Phi\pi$ jest formułą powstającą z Φ przez dokonanie podstawienia π.

2. $S\pi$ jest zbiorem formuł $\{\Phi\pi \ : \ \Phi \in S\}$.

Fakt. Niech $\mathcal{C}$ będzie własnością niesprzeczności pierwszego rzędu domkniętą na podzbiory. Definiujemy $\mathcal{C}^+$: $S \in \mathcal{C}^+$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S\pi \in \mathcal{C}$ dla pewnego podstawienia parametrów π. Wtedy:

1. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^+$

2. $\mathcal{C}^+$ jest domknięta na podzbiory.

3. $\mathcal{C}^+$ jest alternatywną własnością niesprzeczności pierwszego rzędu.

Każda alternatywna własność niesprzeczności pierwszego rzędu, która jest domknięta na podzbiory może zostać rozszerzona do własności niesprzeczności charakteru skończonego.

1.6 Twierdzenie o Istnieniu Modelu

Twierdzenie o Istnieniu Modelu. Jeśli $\mathcal{C}$ jest własnością niesprzeczności pierwszego rzędu dla L, a S jest zbiorem zdań z L oraz $S \in \mathcal{C}$, to S jest spełnialny (w modelu Herbranda dla języka $L^{\mathbf{par}}$).

Dowód. Załóżmy, $\mathcal{C}$ jest własnością niesprzeczności pierwszego rzędu dla L, a S jest zbiorem zdań z L oraz $S \in \mathcal{C}$. Zbudujemy model, w którym prawdziwe będą wszystkie zdania z S.

Rozszerzamy $\mathcal{C}$ do alternatywnej własności niesprzeczności pierwszego rzędu charakteru skończonego $\mathcal{C}^*$. Wtedy oczywiście $S \in \mathcal{C}^*$.

Ponieważ język $L^{\mathbf{par}}$ ma przeliczalną liczbę symboli, więc ma też przeliczalnie wiele zdań. Niech $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots$ będzie wyliczeniem tych wszystkich zdań w ustalonym porządku. Zdefiniujemy teraz ciąg $S_1, S_2, S_3, \ldots$ zbiorów należących do $\mathcal{C}^*$ w ten sposób, że dla każdego takiego zbioru S_n liczba dotąd nieużywanych w tych zbiorach parametrów będzie nieskończona (jest tak oczywiście dla S, ponieważ w S nie ma żadnych parametrów). Niech mianowicie:

1. $S_1 = S$.

2. Jeśli $S_n \cup \{\Phi_n\} \notin \mathcal{C}^*$, to niech $S_{n+1} = S_n$.

3. Jeśli $S_n \cup \{\Phi_n\} \in \mathcal{C}^*$ oraz Φ_n nie jest δ-zdaniem, to niech $S_{n+1} = S_n \cup \{\Phi_n\}$.

4. Jeśli $S_n \cup \{\Phi_n\} \in \mathcal{C}^*$ oraz Φ_n jest zdaniem δ, to nieskończona liczba parametrów będzie nowa dla $S_n \cup \{\Phi_n\}$; wybieramy jeden z nich, powiedzmy a i definiujemy: $S_{n+1} = S_n \cup \{\Phi_n\} \cup \{\delta(a)\}$.

Na mocy powyższej konstrukcji, dla każdego n: $S_n \in \mathcal{C}^*$ oraz $S_n \subseteq S_{n+1}$. Niech $\mathbf{H} = \bigcup_n S_n$. Wtedy $S \subseteq \mathbf{H}$. Tak, jak w przypadku zdaniowych zbiorów Hintikki (zob.: wykład drugi) dowodzimy, że:

1. $\mathbf{H} \in \mathcal{C}^*$
2. $\mathbf{H}$ jest elementem maksymalnym w $\mathcal{C}^*$
3. $\mathbf{H}$ jest zbiorem Hintikki pierwszego rzędu dla języka $L^{\mathbf{par}}$.

Na mocy Lematu Hintikki $\mathbf{H}$ jest spełnialny, a ponieważ $S \subseteq \mathbf{H}$, więc także S jest spełnialny w modelu Herbranda dla $L^{\mathbf{par}}$.

Fitting 1990 (117–119) podaje kilka bezpośrednich zastosowań Twierdzenia o Istnieniu Modelu:

1. **Twierdzenie o Zwartości**. Niech S będzie zbiorem zdań języka pierwszego rzędu L. Jeśli każdy skończony podzbiór zbioru S jest spełnialny, to S jest spełnialny.
2. **Wniosek**. Jeśli S jest zbiorem zdań języka pierwszego rzędu i S jest spełnialny w dowolnie dużych modelach skończonych, to S jest spełnialny w modelu nieskończonym.
3. **Twierdzenie Löwenheima-Skolema**. Niech S będzie zbiorem zdań języka pierwszego rzędu L. Jeśli S jest spełnialny, to S jest spełnialny w modelu przeliczalnym.

Dowód Twierdzenia o Zwartości otrzymujemy zauważając, że własnością niesprzeczności pierwszego rzędu jest rodzina takich zbiorów W zdań języka $L^{\mathbf{par}}$, dla których:

1. każdy skończony podzbiór zbioru W jest spełnialny
2. nieskończenie wiele parametrów jest nowych dla W.

Dowód Twierdzenia Löwenheima-Skolema otrzymujemy zauważając, że własnością niesprzeczności pierwszego rzędu jest rodzina takich zbiorów W zdań języka $L^{\mathbf{par}}$, dla których:

1. W jest spełnialny
2. nieskończenie wiele parametrów jest nowych dla W.

Dodajmy na marginesie, że na mocy powyższych wyników widoczne jest m.in., że:

1. Pojęcie skończoności nie jest wyrażalne w logice pierwszego rzędu.
2. Jeśli teoria mnogości pierwszego rzędu jest niesprzeczna, to ma model przeliczalny. Nie stoi to w sprzeczności z faktem, iż w teorii mnogości dowodzimy istnienia zbiorów nieprzeliczalnych. Ujmując rzecz w wielkim skrócie, przeliczalny model dla teorii mnogości nie zawiera wystarczającej liczby bijekcji.

Nieco później powiemy jeszcze parę słów o *Twierdzeniu Herbranda*.

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
http://logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
pogon@amu.edu.pl