

LOGIKA MATEMATYCZNA

ZADANIA EGZAMINACYJNE

JĘZYKOZNAWSTWO I INFORMACJA NAUKOWA I, UAM, 2002

JERZY POGONOWSKI

Zakład Logiki Stosowanej UAM

www.logic.amu.edu.pl

Dwa zestawy pytań egzaminacyjnych z LOGIKI MATEMATYCZNEJ:

- LEWA MYŚL MAO
- PRAWA MYŚL MAO

oraz dwa zestawy pytań egzaminu poprawkowego:

- MARZYCIELKI
- KUSICIELKI.

-
1. Udowodnij, że konwers sumy dwóch relacji jest równy sumie konwersów tych relacji.
 2. Na zbiorze {Bańcerowski, Pogonowski, Zgółka} określ relację, która jest: symetryczna i zarazem antysymetryczna.
 3. Czy koniunkcja formuł $NEAKC_{ppppp}$ oraz $NAEKC_{ppppp}$ jest tautologią, czy też kontrtautologią?
 4. Sprawdź, czy jest wnioskowaniem dedukcyjnym:

*Jeśli urwiemy Pogonowskiemu lewą nóżkę, ale nie urwiemy prawej rączki, to Pogonowski upadnie. Jeśli urwiemy mu prawą nóżkę, ale nie urwiemy lewej rączki, to Pogonowski też upadnie. Zatem, jeśli urwiemy mu obie rączki, ale nie urwiemy co najmniej jednej nóżki, to Pogonowski nie upadnie.*¹

5. Przypuśćmy, że prawdziwe są zdania:

Każdy Polak lub protestant jest antysemitą. Nie wszyscy antysemitami są Polakami. Żaden Polak nie jest protestantem.

Co można wtedy prawdziwie powiedzieć o związkach między *protestantami* oraz *antysemitami*?

6. Niech $Cn : 2^{Fr} \rightarrow 2^{Fr}$ będzie operatorem konsekwencji określonym na zbiorze Fr wszystkich formuł klasycznego rachunku zdań (omawiana na wykładzie definicja III.1.3. z podręcznika *Podstawy logiki* Tadeusza Batoga). Uzasadnij, które z podanych niżej zdań są prawdziwe, a które fałszywe:

1. Istnieje $A \in Fr$ taka, że $Cn(\{A\}) = Fr$.
2. Jeśli $X \subseteq Fr, Y \subseteq Fr$ oraz $X \cap Y = \emptyset$, to $Cn(X) \cap Cn(Y) = \emptyset$.
3. Dla dowolnych $X \subseteq Fr, Y \subseteq Fr$: $Cn(X - Y) \subseteq Cn(X \cup Y)$.

-
7. GRATIS OD FIRMY \mathcal{MEG} . Niech X będzie dowolnym zbiorem nieskończonym i niech

$$\mathfrak{B}_X = \langle 2^X, \cup, \cap, ', \emptyset, X \rangle$$

będzie algebrą Boole'a, której uniwersum tworzy rodzina wszystkich podzbiorów X , a której operacje są zwykłymi operacjami mnogościowymi: sumy, iloczynu i dopełnienia. Pokazać, że rodzina wszystkich podzbiorów X , których dopełnienia są skończone, tworzy filtr w algebrze \mathfrak{B}_X . Czy jakikolwiek atom tej algebry lub dopełnienie jakiegokolwiek atomu należy do tego filtru? Czy algebra \mathfrak{B}_X ma w ogóle jakiegokolwiek atomy?

¹Pogonowski, jaki jest — każdy widzi: ma (obecnie) tylko dwie rączki (lewą i prawą) i tylko dwie nóżki (prawą i lewą). Milcz więc o entymematach. Nie utrudniaj, proszę.

1. Udowodnij, że konwers różnicy dwóch relacji równy jest różnicy konwersów tych relacji.
2. Na zbiorze {Bańczerowski, Pogonowski, Zgółka} określ relację, która jest: asymetryczna i zarazem antysymetryczna.
3. Czy równoważność formuł $NEAKCp\text{pppp}$ oraz $NAEKCp\text{pppp}$ jest tautologią, czy też kontr-tautologią?
4. Sprawdź, czy jest wnioskowaniem dedukcyjnym:

Jeśli odrąbiemy Pogonowskiemu lewą nóżkę, ale nie odrąbiemy mu prawej rączki, to Pogonowski będzie mógł klaskać. Jeśli odrąbiemy mu prawą nóżkę, ale nie odrąbiemy mu lewej rączki, to Pogonowski także będzie mógł klaskać. Zatem: Pogonowski nie będzie mógł klaskać wtedy i tylko wtedy, gdy odrąbiemy mu obie nóżki, ale nie odrąbiemy co najmniej jednej rączki.²

5. Przypuśćmy, że prawdziwe są zdania:

Niektórzy katolicy, którzy są Polakami, nie są antysemitami. Nie wszyscy antysemitami, którzy są Polakami, są też katolikami. Każdy Polak jest katolikiem lub antysemitą.

Co można wtedy prawdziwie powiedzieć o związkach między *Polakami* a *katolikami*?

6. Niech $Cn : 2^{Fr} \rightarrow 2^{Fr}$ będzie operatorem konsekwencji określonym na zbiorze Fr wszystkich formuł klasycznego rachunku zdań (omawiana na wykładzie definicja III.1.3. z podręcznika *Podstawy logiki* Tadeusza Batoga). Uzasadnij, które z podanych niżej zdań są prawdziwe, a które fałszywe:

1. Nie istnieją różne formuły $A, B \in Fr$ takie, że $Cn(\{A\}) = Cn(\{B\})$.
2. Jeśli $X \subseteq Fr, Y \subseteq Fr$ oraz $X \cap Y \neq \emptyset$, to $Cn(X) \cap Cn(Y) \neq \emptyset$.
3. Dla dowolnych $X \subseteq Fr, Y \subseteq Fr$: $Cn(X \cap Y) \subseteq Cn(X \cup Y)$.

-
7. GRATIS OD FIRMY \mathcal{MEG} . Niech X będzie dowolnym zbiorem nieskończonym i niech

$$\mathfrak{B}_X = \langle 2^X, \cup, \cap, ', \emptyset, X \rangle$$

będzie algebrą Boole'a, której uniwersum tworzy rodzina wszystkich podzbiorów X , a której operacje są zwykłymi operacjami mnogościowymi: sumy, iloczynu i dopełnienia. Pokazać, że rodzina wszystkich skończonych podzbiorów X jest ideałem w algebrze \mathfrak{B}_X . Czy jakkolwiek atom tej algebry lub dopełnienie jakiegokolwiek atomu należy do tego ideału? Czy algebra \mathfrak{B}_X ma w ogóle jakiegokolwiek atomy?

²Pogonowski, jaki jest — każdy widzi: ma (obecnie) tylko dwie rączki (lewą i prawą) i tylko dwie nóżki (prawą i lewą). Milcz więc o entymematach. Nie utrudniaj, proszę.

Wybierz DOKŁADNIE JEDEN z dwóch zestawów: A, B. Sama zdecyduj, czy chcesz mierzyć siły na zamiary, czy zamiar podług sił. Poprawne rozwiązanie CO NAJMNIJ DWÓCH zadań z wybranego zestawu wystarcza do zdania egzaminu. Pamiętaj proszę: jesteś istotą o wolnej woli, żyjącą w wolnym kraju. Masz pełne prawo do ponoszenia konsekwencji za swoje świadome, bez przymusu podejmowane decyzje.

A. Logika w systemie audio-tele

1. Czy ze zdań: *Jeśli kot jest na dachu, to jest w lodówce.* oraz *Kota nie ma na dachu.* wynika logicznie zdanie *Kot jest w lodówce.*?
2. Czy relacja identyczności na zbiorze $\{1, 2, 3\}$ jest asymetryczna?
3. Podaj przykład trzech różnych zbiorów pustych.

B. Dla HUMANISTEK rozumiejących potoczną polszczyznę, czyli standardowy zestaw uniwersytecki

1. Zbadaj własności relacji zachodzącej między formułami A oraz B języka rachunku zdań wtedy i tylko wtedy, gdy formuła $A \rightarrow B$ jest kontrtautologią.
2. Niech p, q, r, s odpowiadają, kolejno, zdaniom prostym: *Włodzimierz Nabokov lubił małe dziewczynki.*, *Lewis Carroll lubił małe dziewczynki.*, *Roman Polański lubi małe dziewczynki.*, *Jerzy Pogonowski jest pedofobem.* Sprawdź, czy $\neg s$ wynika logicznie ze zbioru $\{p \rightarrow \neg(q \vee r), q \rightarrow (p \rightarrow r), r \leftrightarrow \neg q\}$. Zapisz po polsku zdania odpowiadające użytym tu formułom złożonym.
3. Niech: $A \cup B \subseteq C'$, $A - B \neq \emptyset$, $B - C \neq \emptyset$. Co można wtedy prawdziwie powiedzieć o zależnościach między A i C' ? Skoro wybrałaś zestaw dla Humanistek, to zapisanie piękną polszczyzną wszystkich użytych w tym zadaniu formuł powinno sprawić Ci rozkoszną przyjemność. Odważnie, bez zahamowań, z fantazją i subtelnością dobierz jakieś konkretne nazwy i podstaw je konsekwentnie w miejsce zmiennych nazwowych. Mrę z ciekawości, co zaproponujesz.

.....

Wybierz DOKŁADNIE JEDEN z dwóch zestawów: A, B. Sama zdecyduj, czy chcesz mierzyć siły na zamiary, czy zamiar podług sił. Poprawne rozwiązanie CO NAJMNIEJ DWÓCH zadań z wybranego zestawu wystarcza do zdania egzaminu. Pamiętaj proszę: jesteś istotą o wolnej woli, żyjącą w wolnym kraju. Masz pełne prawo do ponoszenia konsekwencji za swoje świadome, bez przymusu podejmowane decyzje.

A. Logika w systemie audio-tele

1. Czy ze zdania: *Jeśli rozumiem, co mówię, to rozumiem, co mówię.* wynika logicznie zdanie *Rozumiem, co mówię.*?
2. Czy relacja identyczności na zbiorze $\{1, 2, 3\}$ jest spójna?
3. Udowodnij, że liczb parzystych jest tyle samo, co liczb nieparzystych.

B. Dla HUMANISTEK rozumiejących potoczną polszczyznę, czyli standardowy zestaw uniwersytecki

1. Zbadaj własności relacji zachodzącej między formułami A oraz B języka rachunku zdań wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{A, \neg B\}$ jest semantycznie sprzeczny.
2. Niech p, q, r, s odpowiadają, kolejno, zdaniom prostym: *W koszyczku jest pół litra.*, *W koszyczku jest bułka z salcesonem.*, *W koszyczku jest karma dla kotów.*, *Czerwony Kapturek jest sodomitką.* Sprawdź, czy $\neg s$ wynika logicznie ze zbioru $\{(r \vee q) \leftrightarrow \neg p, \neg q \rightarrow r, (r \wedge p) \rightarrow q\}$. Zapisz po polsku zdania odpowiadające użytym tu formułom złożonym.
3. Niech: $C - (A \cup B) \subseteq B, A \cap B \neq \emptyset, B \cap C \neq \emptyset$. Co można wtedy prawdziwie powiedzieć o zależnościach między A i C ? Skoro wybrałaś zestaw dla Humanistek, to zapisanie piękną polszczyzną wszystkich użytych w tym zadaniu formuł powinno sprawić Ci rozkoszną przyjemność. Odważnie, bez zahamowań, z fantazją i subtelnością dobierz jakieś konkretne nazwy i podstaw je konsekwentnie w miejsce zmiennych nazwowych. Mrę z ciekawości, co zaproponujesz.