

Logika

Michał Lipnicki

Zakład Logiki Stosowanej UAM

15 stycznia 2011

Materiały na dzisiejsze zajęcia zostały opracowane na podstawie pomocy naukowych przygotowanych przez prof. Jerzego Pogonowskiego, które są udostępnione na stronie Zakładu Logiki Stosowanej.

Systemy dedukcyjne

System dedukcyjny to zbiór złożony ze zdań przyjętych bez dowodu zwanych **aksjomatami** oraz zdań przyjętych na podstawie **dowodów**, których przesłankami są bądź aksjomaty, bądź ich **konsekwencje**.

W rzeczywistości konstruując rachunek zdań jako system dedukcyjny nie trzeba odwoływać się do pojęcia aksjomatów, można oprzeć się tylko na regułach dowodzenia mówimy wówczas o **systemach założeniowych** odróżnianych od **systemów aksjomatycznych**.

W systemach założeniowych dysponujemy ustalonym zbiorem reguł wnioskowania, zgodnie z którymi przeprowadza się **dowody założeniowe** wykazując wynikanie jednych zdań z innych.

Dedukcja naturalna KRZ

W systemach dedukcji naturalnej operuje się dwoma rodzajami reguł:

- regułami wnioskowania
- regułami konstrukcji dowodu

Proces wnioskowanie można traktować jako pewien dowód, w trakcie którego, stosując **reguły wnioskowania**, od założeń, a później od kolejno otrzymywanych zdań (formuł) dochodzi się do następnych zdań (formuł).

(Pojęcie reguły wnioskowania poznaliśmy na ostatnich zajęciach.)

Reguły konstrukcji dowodu

Metoda dedukcji naturalnej dostarcza **syntaktycznych** środków weryfikacji twierdzeń logicznych oraz badania wynikania i sprzeczności.



Konsekwencja założeniowa

Tezami KRZ nazywa się te formuły, które na gruncie systemu KRZ posiadają dowód. Jeżeli formuła β jest tezą KRZ, to symbolicznie zapisujemy: $\vdash \beta$

Niech $X = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ będzie skończonym zbiorem formuł, a β formuła języka KRZ. Zachodzi $X \vdash \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy tezą systemu założeniowego jest formuła:

$$(\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow \dots (\alpha_n \rightarrow \beta) \dots))$$

Zgodnie z powyższym $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \vdash \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dowód założeniowy β w oparciu o założenia $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ oraz przyjęte reguły wnioskowania.

Dowody założeniowe wprost

Dany jest pewien zbiór formuł KRZ $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ zwanych założeniami oraz formuła β zwana wnioskiem. **Dowodem założeniowym wprost** wniosku β z założeń $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ jest ciąg formuł logicznych spełniający następujące warunki:

- Pierwszymi formułami dowodu są jego założenia.
- Każda następna formuła jest albo wcześniej udowodnionym twierdzeniem, albo formułą otrzymaną z poprzedzających ją formuł przy użyciu dopuszczalnych reguł wnioskowania.
- Ostatnią formułą dowodu jest wniosek.

Twierdzenie o dedukcji

Twierdzenie o dedukcji wprost (wersja syntaktyczna):

Dla dowolnego zbioru formuł oraz X oraz formuł α, β zachodzą implikacje:

- Jeśli $X \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, to $X \vdash \alpha \rightarrow \beta$.
- Jeśli $X \vdash \alpha \rightarrow \beta$, to $X \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

Dowody założeniowe wprost

Schemat dowodu założeniowego wprost dla $n > 1$:

1) α_1 {zał.}

2) α_2 {zał.}

⋮

n-1) α_{n-1} {zał.}

⋮

{właściwe wiersze dowodu: twierdzenia uprzednio dowiedzione
oraz formuły otrzymywane z wcześniejszych przez stosowanie
reguł dowodzenia}

m) β {koniec dowodu}

Reguły pierwotne

Systemy założeniowe tworzy się przy pomocy dwóch typów reguł: **reguł pierwotnych** oraz **reguł wtórnych**. Reguły pierwotne przyjmuje się bez dowodu, natomiast reguły wtórne wymagają uzasadnienia.

Reguła odrywania (RO) — Jeśli do dowodu należy implikacja oraz jej poprzednik, to do dowodu wolno dołączyć następnik tej implikacji.

$$\frac{\begin{array}{c} \alpha \rightarrow \beta \\ \alpha \end{array}}{\beta}$$

Reguły pierwotne

Reguły dołączania alternatywy (DA) — Jeśli do dowodu należy jakaś formuła, to do dowodu wolno dołączyć alternatywę, której jednym z członów jest ta formuła.

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \quad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta}$$

Reguła dodawania poprzedników (DP) — Jeśli do dowodu należą dwie implikacje o takim samym następniku, to do dowodu wolno dołączyć implikacje o tymże następniku i o poprzedniku będącym alternatywą poprzedników tych implikacji.

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \varphi \rightarrow \beta}{(\alpha \vee \varphi) \rightarrow \beta}$$

Reguły pierwotne

Reguła dołączania koniunkcji (DK) — Do dowodu wolno dołączyć koniunkcję, o ile oba jej człony należą do dowodu.

$$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}$$

Reguła opuszczania koniunkcji (OK) — Jeśli do dowodu należy koniunkcja, to wolno dołączyć do dowodu każdy z jej członów.

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \quad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$$

Reguły pierwotne

Reguła dołączania równoważności (DR) — Do dowodu wolno dołączyć równoważność, o ile należy do dowodu implikacja, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem drugi jej człon, jak i implikacja odwrotna.

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \beta \rightarrow \alpha}{\alpha \equiv \beta}$$

Reguła opuszczania równoważności (OR) — Jeśli do dowodu należy równoważność, to wolno dołączyć do dowodu zarówno implikację, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem drugi jej człon, jak i implikację odwrotną.

$$\frac{\alpha \equiv \beta}{\alpha \rightarrow \beta} \quad \frac{\alpha \equiv \beta}{\beta \rightarrow \alpha}$$

Reguły pierwotne

Reguła kontrapozycji (RK) — Jeśli do dowodu należy implikacja, której poprzednikiem jest negacja jednej formuły, a następnikiem negacja drugiej formuły, to do dowodu można dołączyć implikację, której poprzednikiem jest druga formuła, a następnikiem pierwsza formuła.

$$\frac{\neg\alpha \rightarrow \neg\beta}{\beta \rightarrow \alpha}$$

Ćwiczenie

Proszę pokazać, że wszystkie powyższe reguły pierwotne są niezawodne.

Dowody założeniowe wprost — przykłady

Prześledźmy dowód wprost prawa **importacji**:

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$$

Musimy pokazać, że z założeń $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$ oraz $p \wedge q$ można otrzymać r używając reguł pierwotnych.

- | | | |
|-----|-----------------------------------|---------|
| (1) | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | zał. |
| (2) | $p \wedge q$ | zał. |
| (3) | p | OK 2 |
| (4) | q | OK 2 |
| (5) | $q \rightarrow r$ | RO 1, 3 |
| (6) | r | RO 4, 5 |

Dowody założeniowe wprost — przykłady

Dowód wprost prawa eksportacji:

$$(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$$

- | | | |
|-----|----------------------------|---------|
| (1) | $p \wedge q \rightarrow r$ | zał. |
| (2) | p | zał. |
| (3) | q | zał. |
| (4) | $p \wedge q$ | DK 2, 3 |
| (5) | r | RO 1, 4 |

Dowody założeniowe wprost — przykłady

Tezy już udowodnione można wykorzystywać w dowodach dalszych tez.

Dowód prawa **eksportacji i importacji**:

- (1) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$ t.u.d
- (2) $(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ t.u.d
- (3) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \equiv (p \wedge q \rightarrow r)$ DR 1, 2

A zatem: $\vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \equiv (p \wedge q \rightarrow r)$, czyli możemy dołączyć ją do systemu jako tezę.

Dowody założeniowe wprost — przykłady

Prawo komutacji:

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \varphi))$$

- | | | |
|-----|--|---------|
| (1) | $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \varphi)$ | zał. |
| (2) | β | zał. |
| (3) | α | zał. |
| (4) | $\beta \rightarrow \varphi$ | RO 1, 3 |
| (5) | φ | RO 2, 4 |

Reguły wtórne

Jeżeli w systemie założeniowym udowodnimy twierdzenie postaci $\alpha \rightarrow \beta$, to możemy wprowadzić do systemu **regułę wtórną** postaci $\frac{\alpha}{\beta}$. Reguła taka pozwala dołączyć do konstruowanego dowodu wyrażenie o strukturze następnika implikacji o ile w dowodzie znajduje się wyrażenie o strukturze jej poprzednika.

Na przykład aby pokazać, że **reguła sylogizmu hipotetycznego** (RSyl) postaci:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \beta \rightarrow \varphi}{\alpha \rightarrow \varphi}$$

jest regułą wtórną wystarczy pokazać, że z założeń $\alpha \rightarrow \beta$ oraz $\beta \rightarrow \varphi$ oraz α otrzymujemy φ .

Jako ćwiczenie proszę przeprowadzić dowód reguły sylogizmu hipotetycznego.

Reguły wtórne

Sprawdzamy regułę **sylogizmu Fregego** (RSF) postaci:

$$\frac{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \varphi) \quad \alpha \rightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \varphi}$$

- | | | |
|-----|--|---------|
| (1) | $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \varphi)$ | zał. |
| (2) | $\alpha \rightarrow \beta$ | zał. |
| (3) | α | zał. |
| (4) | $\beta \rightarrow \varphi$ | RO 1, 3 |
| (5) | β | RO 2, 3 |
| (6) | φ | RO 4, 5 |

Reguły wtórne

Sprawdzamy regułę **wewnętrznego poprzedzania** (RWP) postaci:

$$\frac{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \varphi) \quad \beta}{\alpha \rightarrow \varphi}$$

- | | | |
|-----|---|-----------------|
| (1) | $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \varphi)$ | zał. |
| (2) | β | zał. |
| (3) | $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \varphi))$ | prawo komutacji |
| (4) | $\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \varphi)$ | RO 3, 1 |
| (5) | $\alpha \rightarrow \varphi$ | RO 4, 2 |

Pokaż, że jest tezą systemu założeniowego:

$$((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \wedge \varphi)).$$

Dowody założeniowe nie wprost

Dany jest pewien zbiór formuł KRZ $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ zwanych założeniami oraz formuła β zwana wnioskiem. **Dowodem założeniowym nie wprost** wniosku β z założeń $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ jest ciąg formuł logicznych spełniający następujące warunki:

- Pierwszymi formułami dowodu są jego założenia oraz **założenie dowodu nie wprost** w postaci negacji wniosku.
- Każda następna formuła jest albo wcześniej udowodnionym twierdzeniem, albo formułą otrzymaną z poprzedzających ją formuł przy użyciu dopuszczalnych reguł wnioskowania.
- Ostatnią formułą dowodu jest jakaś formuła sprzeczna z jedną z formuł ją poprzedzających.

Twierdzenie o dedukcji nie wprost

Budowanie dowodów nie wprost opiera się na twierdzeniu o **dedukcji nie wprost (wersji syntaktycznej)**:

Dla dowolnego zbioru X formuł oraz formuły α zachodzą równoważności:

- $X \vdash \neg\alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła β taka, że $X \cup \{\alpha\} \vdash \{\beta, \neg\beta\}$.
- $X \vdash \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła β taka, że $X \cup \{\neg\alpha\} \vdash \{\beta, \neg\beta\}$.

Dowody założeniowe nie wprost

Dowód nie wprost prawa podwójnej negacji: $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$:

- | | | |
|-----|------------------|-------|
| (1) | $\neg\neg\alpha$ | zał. |
| (2) | $\neg\alpha$ | z.d.n |

W dalszych dowodach możemy stosować regułę **opuszczania negacji** (ON) postaci:

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$$

Dowody założeniowe nie wprost

Dowód nie wprost formuły: $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$:

- | | | |
|-----|----------------------|-------|
| (1) | α | zał. |
| (2) | $\neg\neg\neg\alpha$ | z.d.n |
| (3) | $\neg\alpha$ | ON 2 |

W dalszych dowodach możemy stosować regułę **dołączania negacji** (DN) postaci:

$$\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}$$

Dowody założeniowe nie wprost

Sprawdzamy regułę **modus tollendo tolens** (MT) postaci:

$$\begin{array}{c} \alpha \rightarrow \beta \\ \neg\beta \\ \hline \neg\alpha \end{array}$$

- (1) $\alpha \rightarrow \beta$ zał.
- (2) $\neg\beta$ zał.
- (3) $\neg\neg\alpha$ z.d.n.
- (4) α ON 3
- (5) β RO 1, 4

Parę formuł sprzecznych otrzymujemy w wierszach 2 oraz 5.

Dowody założeniowe nie wprost — ćwiczenie

Pokaż, że poniższe formuły są tezami systemu założeniowego KRZ:

- (a) $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
- (b) $\alpha \rightarrow \alpha$
- (c) $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
- (d) $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$
- (e) $(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\alpha)$

Dowody założeniowe nie wprost

Wyprowadzamy regułę **opuszczania alternatywy**:

$$\frac{\alpha \vee \beta \quad \neg \alpha}{\beta}$$

W dowodzie odwołujemy się do tez z poprzedniego slajdu.

Dowody założeniowe nie wprost

(1)	$\alpha \vee \beta$	zał.
(2)	$\neg\alpha$	zał.
(3)	$\neg\beta$	z.d.n.
(4)	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	DK 2, 3
(5)	$(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$	OK 4
(6)	$(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\beta$	OK 4
(7)	$\alpha \rightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	5 teza (e)
(8)	$\beta \rightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	6 teza (e)
(9)	$(7) \rightarrow ((8) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)))$	DP 7, 8
(10)	$(8) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta))$	RO 9, 7
(11)	$(\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	RO 10, 8
(12)	$\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	RO 11, 1

Dodatkowe założenia dowodu

Technika dowodowa opierająca się na **dodatkowych założeniach dowodu** przebiega następująco:

- Czynimy w dowodzie dodatkowe założenie α
- Jeżeli z założenia α (oraz wcześniejszych kroków dowodu) możemy wyprowadzić formułę β , to do dowodu można włączyć formułę $\alpha \rightarrow \beta$
- Z kroków wyprowadzenia β z α **nie wolno** korzystać poza tym wyprowadzeniem.

Dodatkowe założenia dowodu

Badamy formułę: $((\alpha \vee \beta) \rightarrow (\chi \wedge \varphi)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \chi) \wedge (\beta \rightarrow \varphi))$

(1)	$(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\chi \wedge \varphi)$	zał.
(1.1)	α	zał. dodatkowe
(1.2)	$\alpha \vee \beta$	DA 1.1
(1.3)	$\chi \wedge \varphi$	RO 1, 1.2
(1.4)	χ	OK 1.3
(2)	$\alpha \rightarrow \chi$	1.1 \Rightarrow 1.4
(2.1)	β	zał. dodatkowe
(2.2)	$\alpha \vee \beta$	DA 2.1
(2.3)	$\chi \wedge \varphi$	RO 1, 2.2
(2.4)	φ	OK 2.3
(3)	$\beta \rightarrow \varphi$	2.1 \Rightarrow 2.4
(4)	$(\alpha \rightarrow \chi) \wedge (\beta \rightarrow \varphi)$	DK 2, 3

Dodatkowe założenia dowodu

Badamy formułę: $\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$

(1)	$\neg(\alpha \vee \beta)$	zał.
(1.1)	α	zał. dodatkowe
(1.2)	$\alpha \vee \beta$	DA 1.1
(2)	$\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$	1.1 \Rightarrow 1.2
(3)	$\neg\alpha$	MT 2, 1
(3.1)	β	zał. dodatkowe
(3.2)	$\alpha \vee \beta$	DA 3.1
(4)	$\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$	3.1 \Rightarrow 2.2
(5)	$\neg\beta$	MT 4, 1
(6)	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	DK 3, 5

Ćwiczenia

Pokaż, że poniższe reguły są wyprowadzalne w systemie założeniowym KRZ.

$$\frac{\neg\alpha \rightarrow \neg\beta}{\beta} \quad \alpha$$

Reguła **Dunsa**
Scotusa:

$$\frac{\alpha}{\neg\alpha} \quad \beta$$

Udowodnij prawa:

- De Morgana dla alternatywy: $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$;
- De Morgana dla koniunkcji: $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$.

Badanie sprzeczności

Zbiór formuł X jest (syntaktycznie) **sprzeczny** jeśli istnieje formuła α taka, że $X \vdash \alpha$ oraz $X \vdash \neg\alpha$. Jeśli X nie jest sprzeczny, to mówimy, że X jest (syntaktycznie) **niesprzeczny**.

Twierdzenie o zwartości:

Zbiór X formuł języka KRZ jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy pewien jego skończony podzbiór jest sprzeczny.

Wykazanie sprzeczności zbioru formuł X polega na zbudowaniu dowodu założeniowego, którego przesłankami są elementy jakiegoś **skończonego** podzbioru zbioru X i w którego wierszach znajduje się para formuł wzajemnie sprzecznych.

Badanie sprzeczności

Pokażemy, że $\{\neg\gamma \wedge \beta, \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\gamma \vee \neg\varphi)), \alpha, \chi \wedge (\beta \rightarrow \gamma)\}$ jest sprzecznym zbiorem formuł.

(1)	$\neg\gamma \wedge \beta$	zał.
(2)	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\gamma \vee \neg\varphi))$	zał.
(3)	α	zał.
(4)	$\chi \wedge (\beta \rightarrow \gamma)$	zał.
(5)	$\neg\gamma$	OK 1
(6)	β	OK 1
(7)	$\beta \rightarrow (\gamma \vee \neg\varphi)$	RO 2, 3
(8)	$\gamma \vee \neg\varphi$	RO 7, 6
(9)	$\neg\varphi$	OA 8, 5
(10)	$\beta \rightarrow \gamma$	OK 4
(11)	γ	RO 10, 6

Parę formuł wzajem sprzecznych odnajdujemy w wierszach 5 i 11.

Badanie sprzeczności — ćwiczenie

Pokaż, sprzeczność poniższych zbiorów zdań:

Jest kapitalizm lub nie ma bezrobocia. Jeśli jest recesja, to jest też bezrobocie. Nie ma jednocześnie: biedy oraz braku recesji. Jest bieda a nie ma kapitalizmu [za: Pogonowski 2007].

Jeśli Jan pije koniak do obiadu, to Marzena nie szykuje śledzia na zakąskę. Jeśli Marzena szykuje śledzia na zakąskę, znaczy w domu nie ma wędzonej makreli. Gdy u Jana jest Stefan, wówczas Marzena szykuje śledzia na zakąskę. Otóż akurat u Jana jest Stefan. Jan pije koniak lub w domu jest wędzona makrela.

Gdyby mordercą był Jan, to by znaczyło, że pomagał mu goryl Koko. Jeśli mordercą jest Stefan, to świadek mówi prawdę. Mordercy nie pomagał goryl Koko lub jest nim Stefan. Mordercą jest Jan a świadek kłamie.

Ćwiczenia

Proszę sprawdzić używając metody założeniowej, czy poniższe wnioski są dedukcyjne.

- *Jan miał zamiar swoim wystąpieniem obrazić Piotra lub też nie zdawał sobie sprawy z konsekwencji swoich słów — a może jedno i drugie. Jednak zarówno wtedy, gdyby chodziło o zwykłą lekkomyślność, jak i wtedy, gdyby szło o celowe działanie, Jan powinien przeprosić Piotra. Zatem Jan powinien przeprosić Piotra.*
- *Jeżeli wiesz, że umarłeś, to umarłeś. Jeżeli wiesz, że umarłeś, to nie umarłeś. Zatem nie wiesz, że umarłeś.*
- *Jeśli jest tak, że jeżeli Jan jest jednocześnie empirystą i racjonalistą, to posiada sprzeczny system wartości, wówczas gdyby Jan był empirystą o niesprzecznym systemie wartości, nie mógłby być racjonalistą.*