Urok Zagadek Matematycznych

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Kraków, 24.X.2013

Plan na dziś:

- Zagadki będą dotyczyły nieskończoności.
- Rozwiązania niektórych zagadek stanowią wyzwanie dla intuicji utrwalanych poprzez doświadczenie potoczne.
- Treść odczytu wiąże się z prowadzoną przez prelegenta w UAM dydaktyką: www.logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
- Wykorzystujemy ilustracje dostępne w sieci.

- Czym zagadka matematyczna różni się od zwykłego zadania?
- Kazimierz jest wujem Stanisława, a Stanisław jest wujem Kazimierza. Czy to możliwe? Odpowiedź na końcu wykładu.

Przewrócona ósemka

- Co szkoła mówi o ∞?
- A jakie są twoje intuicje? Co wykorzystujesz, próbując zbliżyć się do rozumienia nieskończoności:
  - czas?
  - przestrzeń?
  - uporządkowanie?
  - jakieś operacje (np. arytmetyczne)?

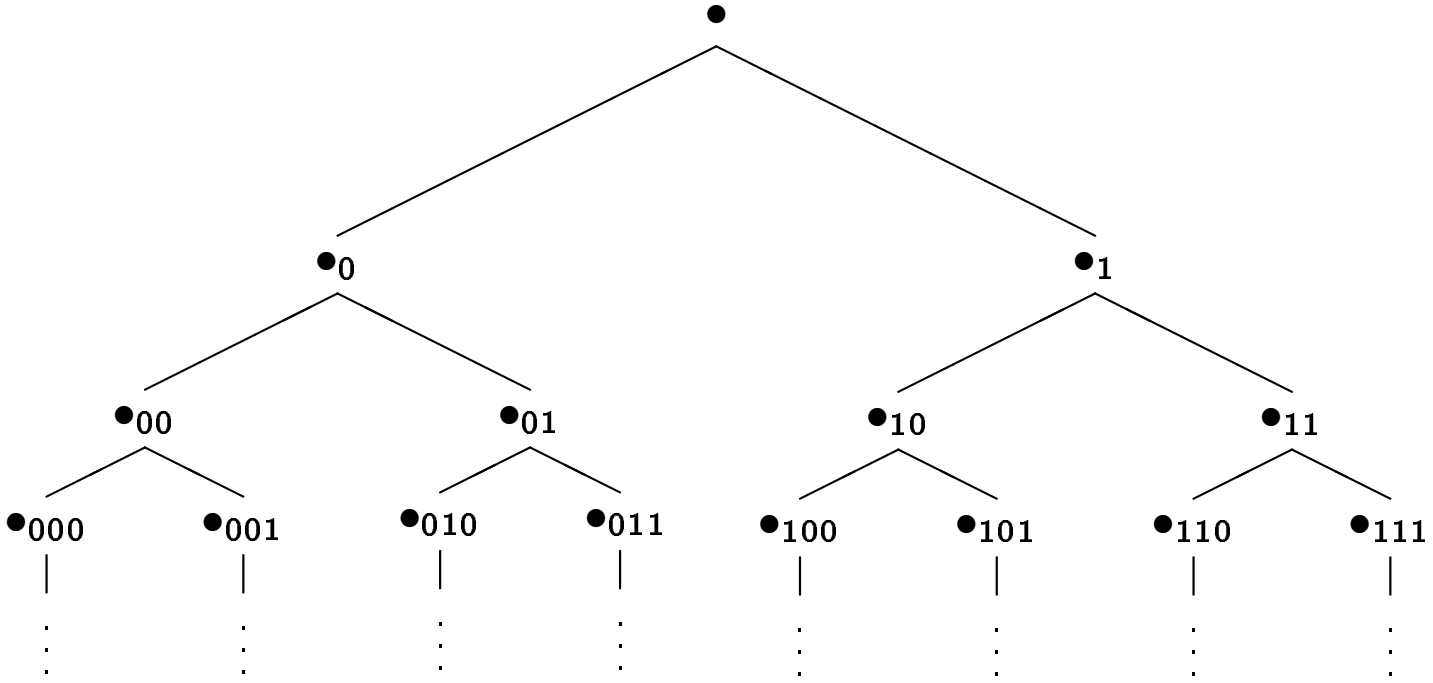
- Paradoksy równoliczności. Łapówki. Pościg za żółwiem. Dzielenie ciasta. Supermucha. Hotel Hilberta.
- Czy można zdefiniować nieskończoność?
  - Propozycja Dedekinda: zbiór jest *nieskończony* wtedy i tylko wtedy, gdy jest równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym.

Przędź się, przędź, wrzeciono...

1. Spirala „odfruwa” w nieskończoność, np.:
   - Spirala Archimedesa $r = a\varphi$.
   - Spirala logarytmiczna $r = ae^{b\varphi}$ (dla $\varphi \to -\infty$ mamy $r \to 0$).
   - Spirala (ślimak) Teodorosa $\tan(\varphi_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
2. Spirala zwija się (zob. osobny rysunek na tablicy):
   $\frac{2\pi r}{2} + \frac{2\pi \frac{r}{2}}{2} + \frac{2\pi \frac{r}{4}}{2} + \ldots = \pi r(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots) = \pi r \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\pi r.$

- Niech $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$, gdzie $a_n \in \mathbb{R}_+$ dla $n \in \mathbb{N}$. Budujemy spiralę z odcinków o długościach: a_1, $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots$ (powiedzmy, prawoskrętną, kąt skrętu $-\frac{\pi}{2}$). Długość tej spirali to: $2\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Spirala mieści się na ograniczonym obszarze.
- Dla ciągu $a_n = q^{n-1}$ oraz $q = \frac{95}{100}$ spirala ma długość 40.
- A jaka jest jej długość dla ciągu $a_n = \frac{1}{n}$? Cierpliwości...

Ile jest nieskończoności?



Każdy z kolejnych wierzchołków ma dwóch bezpośrednich potomków. Wierzchołki (oprócz korzenia) kodujemy ciągami zer i jedynek. Jeśli jakiś wierzchołek ma kod s, to jego bezpośrednimi potomkami są wierzchołki o kodach: $s0$ oraz $s1$. *Gałęzią* nazwiemy każdy *nieskończony* ciąg złożony z zer i jedynek. Czy możliwe jest ponumerowanie (liczbami naturalnymi: 0, 1, 2, 3, 4, 5,...) wszystkich gałęzi?

Metoda przekątniowa

- Przypuśćmy, że można ponumerować wszystkie gałęzie liczbami naturalnymi (każda a_i^j jest zerem lub jedynką):
  $g_1 = a_1^1 a_1^2 a_1^3 \ldots$
  $g_2 = a_2^1 a_2^2 a_2^3 \ldots$
  $g_3 = a_3^1 a_3^2 a_3^3 \ldots$
  $\ldots$
- Rozważmy ciąg $G = b_1 b_2 b_3 \ldots$, gdzie:
  - jeśli $a_n^n = 0$, to $b_n = 1$
  - jeśli $a_n^n = 1$, to $b_n = 0$.

Wtedy ciąg G różni się od *każdego* z ciągów g_n (co najmniej na n-tym miejscu). Tak więc, jakkolwiek chcielibyśmy ponumerować wszystkie gałęzie pełnego drzewa dwójkowego liczbami naturalnymi, to zawsze pozostaną gałęzie, dla których numerów nie starczy.

Głosujemy: dojdzie czy nie?

Po doskonale elastycznej linie o początkowej długości 1 km drepcze mrówka z prędkością 1 cm/sek (względem liny). Lina rozciąga się z prędkością 1 km/sek. Mrówka startuje z lewego, nieruchomego końca liny. Czy dojdzie w skończonym czasie do prawego jej końca?

Demony bywają pomocne

Rozwiązanie *ciągłe* wymaga całkowania równania różniczkowego, czyli rzeczy w polskiej szkole zabronionej. Załóżmy więc, że wraz z wybiciem każdej sekundy linę rozciąga Demon (o Demonach wolno mówić – zapytaj Panią Katechetkę): po pierwszej sekundzie z 1 do 2 km, po 2 sekundzie z 2 do 3 km, itd. A mrówka cały czas drepcze...

Jaką część długości całej liny przebywa mrówka w każdej kolejnej sekundzie?

W ciągu sekundy	mrówka pokonuje	część całej długości
pierwszej	1cm z 1km	$\frac{1}{100000}$
drugiej	1cm z 2km	$\frac{1}{200000}$
trzeciej	1cm z 3km	$\frac{1}{300000}$
n-tej	1cm z $n$km	$\frac{1}{n\cdot 100000}$

Brawo, mrówa! Dać jej piwa!

Czy istnieje liczba n taka, że suma: $\frac{1}{100000} + \frac{1}{200000} + \frac{1}{300000} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 100000}$ będzie równa 1, czyli całej długości liny?
Szukamy n takiej, dla której: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = 100000$.

- *Liczby harmoniczne*: $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
- Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest *rozbieżny*. Porównajmy bowiem:
  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots >$
  $1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}) + \ldots =$
  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = \infty$

Istnieje zatem n taka, że $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \geqslant 100000$. Mrówka dojdzie do prawego końca liny w skończonym czasie!

Czy lenistwo ma granice?

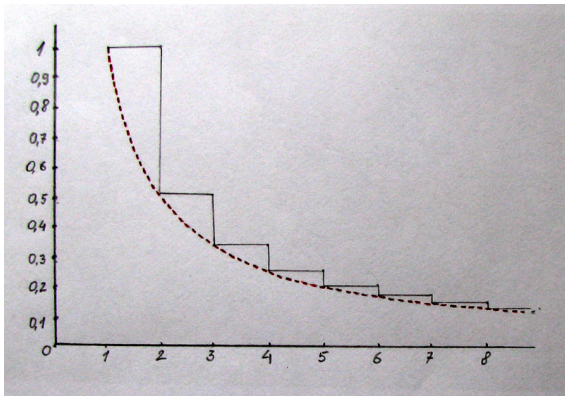
- *Stała Eulera-Mascheroniego* γ:
  $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = 0,5772156649501\ldots$
  Obecnie (2013) nie wiadomo, czy γ jest liczbą algebraiczną czy przestępną, ani czy jest liczbą wymierną czy też niewymierną.
- Mrówka dotrze do prawego końca liny w czasie $e^{100000-\gamma}$ sekund, co w zapisie dziesiętnym daje liczbę o ponad czterdziestu tysiącach cyfr. Jest to czas tysiące razy dłuższy od czasu istnienia Wszechświata (licząc od Wielkiego Wybuchu).
- Skoro *przestrzeń* Wszechświata rozszerza się, a prędkość światła jest stała, to czy kiedyś nocne niebo będzie całkiem ciemne?

Szereg harmoniczny jest bardzo leniwy w swojej rozbieżności. Czy istnieje *szereg najwolniej rozbieżny*? Przemyśl to w domu.

Róg Gabriela

Wierni jednej z parafii na dalekiej północy kraju podarowali swojemu arcybiskupowi kształtną flaszkę wypełnioną winem. Składa się ona z walca o promieniu i wysokości równej jednostce (np. jednemu metrowi) oraz szyjki, która jest powierzchnią powstałą poprzez obrót wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ w przedziale od 1 do nieskończoności. Czy arcybiskup będzie pił z niej wiecznie, zakładając, że codziennie pragnie, powiedzmy, ćwiarteczki?

Rozważmy *dyskretne* (górne, zewnętrzne) przybliżenie szyjki flaszki:



Problem dotyczy szyi, ekscelencjo...

- Powierzchnia P szyjki flaszki jest nieskończona, ponieważ:
  $P > \pi \cdot 1^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{n}) = \pi + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$
- Objętość V szyjki flaszki jest jednak skończona, ponieważ:
  $V < \sum_{n=1}^{\infty}(\pi(\frac{1}{n})^2 \cdot 1) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi \frac{\pi^2}{6}$

Dowód (Eulera), że $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ jest dość złożony. Pokażemy jedynie, że S jest liczbą skończoną:

$S = 1 + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}) + (\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}) + \ldots <$
$1 + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}) + (\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2}) + \ldots =$
$1 + \frac{2}{2^2} + \frac{4}{4^2} + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

Typy porządków (nieostrych):

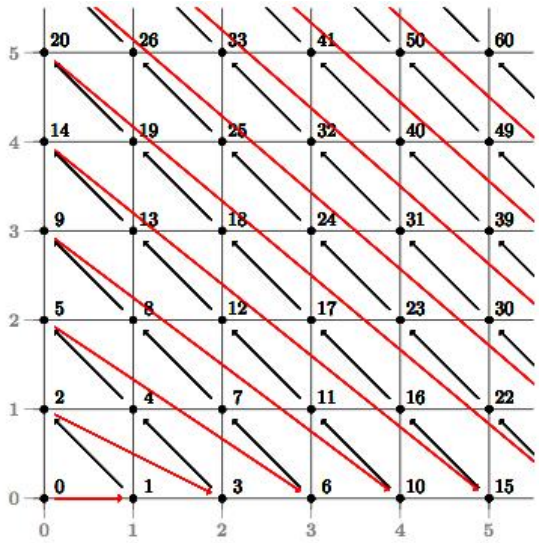
- Częściowe: (zwrotne), antysymetryczne, przechodnie.
- Liniowe: spójne częściowe.
- Dobre: częściowe, w których każdy niepusty podzbiór ma element najmniejszy.
- Drzewa: częściowe, w których poprzedniki każdego elementu tworzą zbiór dobrze uporządkowany.

- Dyskretne: każdy element ma bezpośredni poprzednik i następnik (oprócz ew. elementów końcowych).
- Gęste: między każdymi elementami jest element pośredni.
- Ciągłe: każdy niepusty ograniczony z góry podzbiór ma kres górny.

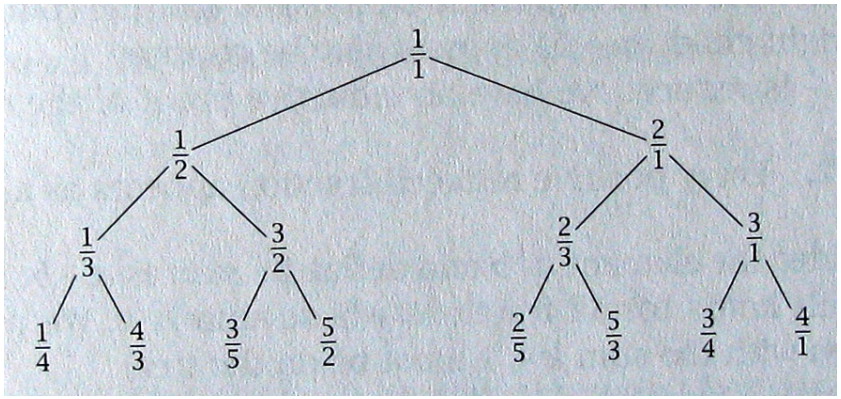
- Co to znaczy, że porządek jest *naturalny*?

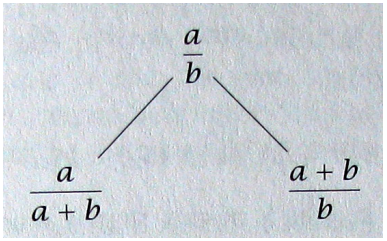
Jak grzecznie uporządkować wszystkie ułamki $\geqslant 0$?

- Bijekcja $c : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- $c(x, y) = y + \sum_{i=0}^{x+y} i = y + \frac{1}{2}(x + y)(x + y + 1)$



Drzewo Calkina-Wilfa

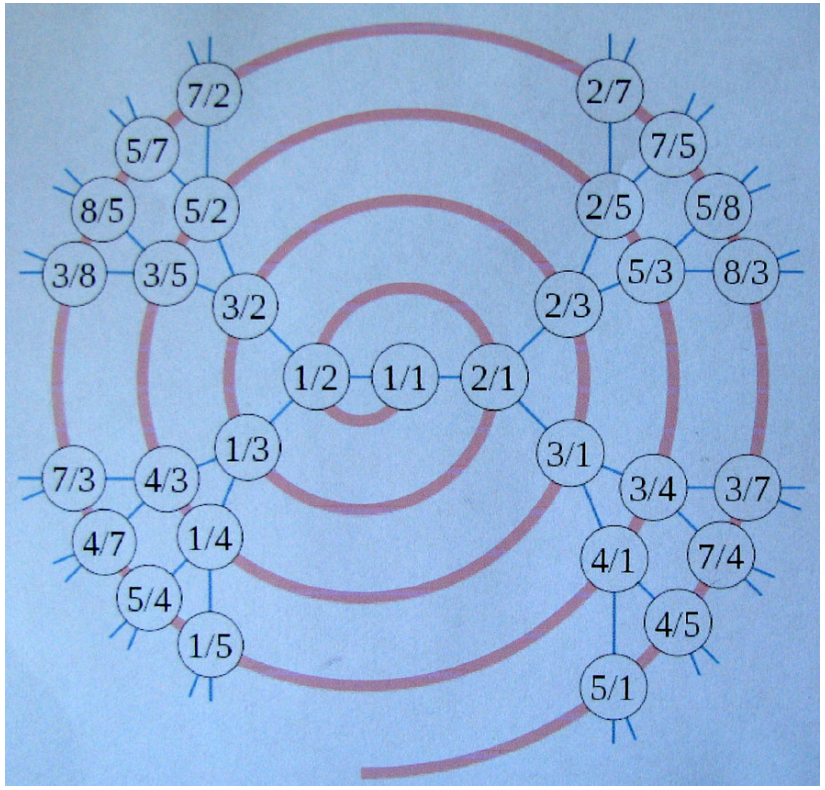




Wszystkie te ułamki są w postaci nieskracalnej. Każda dodatnia liczba wymierna występuje w tym drzewie dokładnie raz.

$q(1) = 1$ oraz $q(n+1) = \frac{1}{\lfloor q(n) \rfloor - (q(n) - \lfloor q(n) \rfloor) + 1}$ dla $n \geqslant 1$,
gdzie $\lfloor x \rfloor$ to największa liczba naturalna $\leqslant x$.

Spirala ułamków

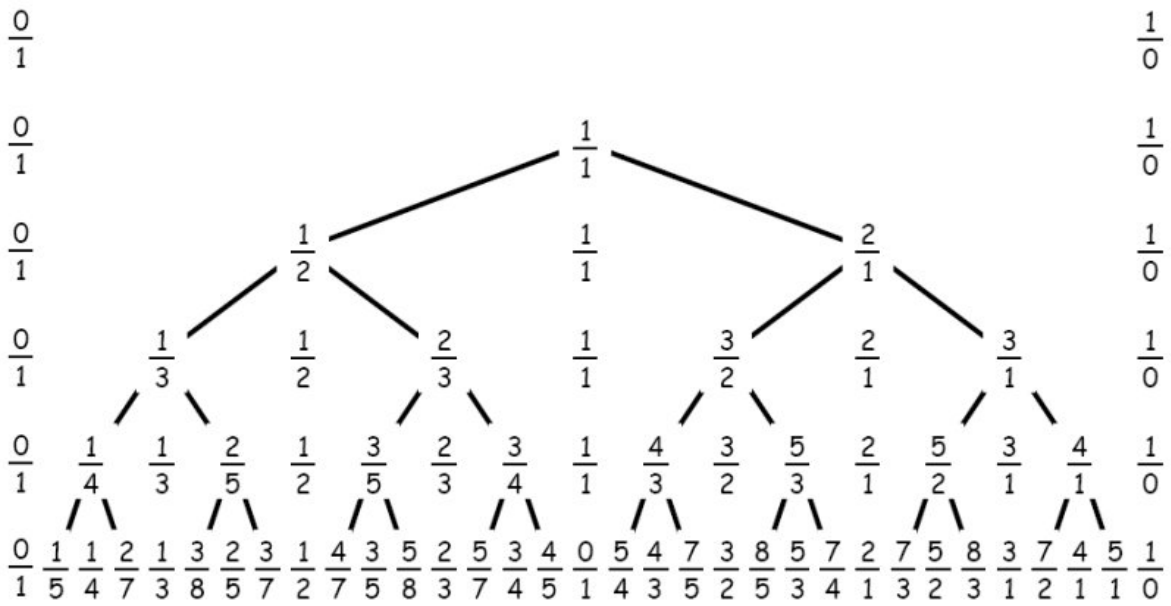


Każda dodatnia liczba wymierna jest postaci $\frac{b(n)}{b(n+1)}$ $(n \geqslant 0)$, gdzie $b(0) = b(1) = 1$ oraz:

$$b(2n+1) = b(n), \quad b(2n+2) = b(n) + b(n+1).$$

Zmowa matematyka z zegarmistrzem

Czy dodawanie $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ jest głupie?



Wszystkie te ułamki są w postaci nieskracalnej. Każda dodatnia liczba wymierna występuje w tym drzewie dokładnie raz.

Jak trafić do wybranego ułamka?

- $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$
- Do każdego ułamka prowadzi (dokładnie jeden!) ciąg skrętów (od korzenia $\frac{1}{1}$) w lewo L oraz w prawo P. Dla przykładu: $\frac{4}{7}$ to $LPLL$.
- Przy interpretacji $L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ każdy ułamek $\frac{a+c}{b+d}$ reprezentowany jest macierzą $\begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix}$. Np.:

$$LPPL = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \mapsto \frac{5}{7}$$

Mnożenie macierzy:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Zrób łańcuszek z ułamka

- Ciąg przybliżeń liczby e w drzewie Sterna-Brocota to nieskończona gałąź:
  $e \mapsto PL^0PLP^2LPL^4PLP^6LPL^8PLP^{10}LPL^{12}\ldots$
- Drzewo Sterna-Brocota ma związek np. z:
  - przedstawieniem liczb wymiernych w postaci ułamków łańcuchowych
  - algorytmem Euklidesa
  - liczbami Fibonacciego $F_0 = 0,\ \ F_1 = 1,\ \ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
  - ciągami Fareya oraz okręgami Forda.

Przypomnijmy: $\frac{153}{53} = 2 + \frac{47}{53} = 2 + \frac{1}{\frac{53}{47}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{6}{47}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{47}{6}}} =$
$2 + \frac{1}{1+\frac{1}{7+\frac{5}{6}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{7+\frac{1}{\frac{1}{\frac{6}{5}}}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{7+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}} = [2; 1, 7, 1, 5]$

Regularności w rozwinięciu π?

Liczba	rozwinięcie łańcuchowe
wymierna	skończone
niewymierny pierwiastek kwadratowy	okresowe
niewymierna	nieskończone

Dla przykładu: $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$, $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots] = [1; \overline{1, 2}]$.

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\ddots}}}}} = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{4^2}{9+\ddots}}}}} = 3 + \cfrac{1^2}{6+\cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\ddots}}}}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, 1, 1, \ldots], \qquad e = 2 + \cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\ddots}}}}$$

Kogo lubią dziewczyny?

Przypuśćmy, że dziewczęta X, Y, Z chcą ustalić, który z facetów A, B, C jest najbardziej przystojny. Niech preferencje poszczególnych dziewcząt wyglądają następująco (piszemy $P > Q$ w znaczeniu: wybór P jest preferowany względem wyboru Q; preferencje każdego dziewczęcia są *przechodnie*):

- X: $A > B > C$
- Y: $B > C > A$
- Z: $C > A > B$.

Czy możliwe jest liniowe uporządkowanie kandydatów zgodne z preferencjami większości dziewcząt? NIE, ponieważ:

1. $\frac{2}{3}$ dziewcząt uważa, że A jest bardziej przystojny od B.
2. $\frac{2}{3}$ dziewcząt uważa, że B jest bardziej przystojny od C.
3. $\frac{2}{3}$ dziewcząt uważa, że C jest bardziej przystojny od A.

Ten wykład (szczęśliwie!) nie jest nieskończony

- Uważamy, że szkoła może (ostrożnie!) przygotowywać uczniów do oswajania się z nieskończonością.
- Zagadka o dwóch wujach: wystarczy, że Kazimierz poślubi siostrę matki Stanisława, a Stanisław poślubi siostrę matki Kazimierza. Co ciekawe, ludzie podają zwykle sztucznie skomplikowane rozwiązania tej zagadki.

- Uprzejmie dziękuję organizatorom za umożliwienie mi wygłoszenia tego wykładu.
- Jeśli coś było niejasne, to proszę o głosy krytyczne.
- W Dodatku 1 pokazujemy wykorzystanie Lematu Königa w rozwiązaniu pewnej (pozornie banalnej!) zagadki. W Dodatku 2 opisujemy (zaskakujący!) wynik dotyczący pewnej gry planszowej.

Opróżnianie pudełka

Przypuśćmy, że masz nieskończenie wiele kul, ponumerowanych dodatnimi liczbami całkowitymi, przy czym każda taka liczba jest umieszczona na nieskończenie wielu kulach (masz więc nieskończenie wiele kul z jedynką, nieskończenie wiele z dwójką, nieskończenie wiele z trójką, itd.). Masz też pudełko, które zawiera skończenie wiele ponumerowanych kul. Celem zabawy jest opróżnienie pudełka, wedle następującej reguły. W każdym kroku wyjmujesz pewną kulę, a na jej miejsce wkładasz całkiem dowolną liczbę kul o mniejszych numerach. Ponieważ nie ma mniejszych od jedynki dodatnich liczb całkowitych, więc kuli z jedynką niczym nie zastępujesz. Rozwiązanie wygląda prosto: wystarczy, że zastąpisz każdą kulę w pudełku kulą z jedynką, a potem wyjmiesz te wszystkie kule z jedynką po kolei. Ciekawe w tej zabawie jest jednak to, że nie można z góry ograniczyć liczby kroków potrzebnych to opróżnienia pudełka – pamiętajmy, że można „utrudniać" poprzez dokładanie dowolnej skończonej liczby kul, byle o numerze mniejszym niż numer kuli zastępowanej.

Lemat Königa w działaniu

Zabawę tę przedstawić można w postaci drzewa o ponumerowanych wierzchołkach. Początkową zawartość pudełka reprezentują wierzchołki wychodzące bezpośrednio z korzenia drzewa. Zastępowanie jakiejś kuli (liścia drzewa) zbiorem innych polega na dołączeniu, w miejsce usuwanego liścia, całego zbioru nowych liści, reprezentujących kule, zastępujące usuwaną kulę. Drzewo „rośnie w górę" w miarę jak zastępujemy usuwane kule nowymi. Zauważmy, że na każdej gałęzi drzewa występują kule o coraz mniejszych numerach. Ponadto, każdy wierzchołek drzewa ma tylko skończenie wielu bezpośrednich potomków. Gdyby drzewo miało nieskończoną liczbę wierzchołków, to (na mocy *Lematu Königa*) musiałoby mieć gałąź nieskończoną. To jednak jest niemożliwe, ze względu na wspomniany już fakt, że numery na każdej gałęzi maleją, w miarę oddalania się od korzenia drzewa. Tak więc, zabawa w opróżnianie pudełka musi zakończyć się w skończonej liczbie kroków.

Drzewa

- *Drzewem (o korzeniu x_0)* nazwiemy każdy układ $\langle X, R, x_0 \rangle$ taki, że:
  - $\langle X, R \rangle$ jest grafem o zbiorze *wierzchołków* X i zbiorze *krawędzi* $R \subseteq X \times X$;
  - x_0 jest elementem R-najmniejszym w X;
  - R jest przechodnia i antysymetryczna w X;
  - dla każdego elementu zbioru $X - \{x_0\}$, zbiór jego wszystkich R-poprzedników jest dobrze uporządkowany przez relację R.

- *Liśćmi* drzewa D nazywamy wszystkie te jego wierzchołki, które nie mają R-następników.
- Jeśli $(x, y) \in R$ jest krawędzią w D, to x nazywamy *przodkiem* y, a y nazywamy *potomkiem* x. Jeśli $(x, y) \in R - R^2$ jest krawędzią w D, to x nazywamy *bezpośrednim przodkiem* y, a y nazywamy *bezpośrednim potomkiem* x.

Łańcuchy, gałęzie, poziomy

- Każdy podzbiór zbioru wierzchołków drzewa D, który jest uporządkowany liniowo przez R nazywamy *łańcuchem* w D. Każdy łańcuch maksymalny (względem inkluzji) w D nazywamy *gałęzią* w D.
- Przez *długość* łańcucha P rozumiemy liczbę elementów zbioru P.
- *Rzędem* wierzchołka x nazywamy moc zbioru wszystkich potomków x. *Rzędem* drzewa D jest kres górny rzędów wszystkich wierzchołków drzewa D.
- Drzewo D jest *skończone*, jeśli zbiór jego wierzchołków jest skończony. Drzewo D jest *nieskończone*, jeśli zbiór jego wierzchołków jest nieskończony. Drzewo D jest *rzędu skończonego*, jeśli jego rząd jest liczbą skończoną.
- Przez indukcję definiujemy *poziomy* drzewa:
  - poziom *zerowy* to zbiór jednoelementowy, złożony z korzenia drzewa;
  - poziom $k+1$ to zbiór wszystkich bezpośrednich następników wierzchołków poziomu k.

Dowód Lematu Königa (wykorzystuje aksjomat wyboru)

Lemat Königa. Jeśli drzewo $D = \langle X, R, x_0 \rangle$ rzędu skończonego jest nieskończone, to ma gałąź nieskończoną.

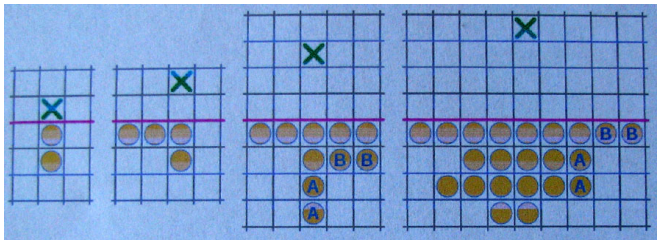
Dowód. Przypuśćmy, że D jest nieskończone. Zdefiniujemy gałąź nieskończoną $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ w D przez indukcję.

Za element x_0 bierzemy korzeń drzewa D. Ponieważ D jest nieskończone, więc x_0 ma nieskończenie wiele R-następników.

Przypuśćmy, że $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ zostały zdefiniowane tak, że x_i należy do i-tego poziomu drzewa D oraz x_i ma nieskończenie wiele R-następników. Z założenia, x_{n-1} ma tylko skończenie wiele *bezpośrednich* R-następników. Ponieważ x_{n-1} ma nieskończenie wiele R-następników, więc co najmniej jeden z jego bezpośrednich R-następników także ma nieskończenie wiele R-następników. Wybieramy więc element x_n z n-tego poziomu drzewa D o tej właśnie własności. Wtedy x_n ma nieskończenie wiele R-następników. Ponieważ jest tak dla każdego n, pokazaliśmy istnienie nieskończonej gałęzi $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ w drzewie D.

Jak wysoko można zajść?

Ruchy: pionowo lub poziomo, usuwając przeskakiwany pionek.



				x^1	T	x^1				
			x^3	x^2	x^1	x^2	x^3			
	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	
			x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	x^6		
			x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	x^7		
x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}
x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}
x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}
x^{13}	x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	x^{13}

$P_1 : \ x^5 + x^6 \quad P_2 : \ x^5 + 2x^6 + x^7 \quad P_3 : \ x^5 + 3x^6 + 3x^7 + x^8$

Metryka Manhattan: $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

Reguły w bitwie o poziom piąty

1. $x^{n+2} + x^{n+1}$ zostaje zastąpione przez x^n
2. $x^n + x^{n-1}$ zostaje zastąpione przez x^n
3. $x^n + x^{n+1}$ zostaje zastąpione przez x^{n+2}.

Wartość $x > 0$ dobieramy tak, aby wartość otrzymanego wielomianu zmniejszała się w drugim i trzecim z powyższych przypadków, a pozostawała niezmieniona w pierwszym z nich. Skoro $x > 0$, to $x^n + x^{n-1} > x^n$. Jeśli ma być $x^n + x^{n+1} > x^{n+2}$, to $1 + x > x^2$, co daje nierówność $0 < x < \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Wreszcie, dla pierwszego warunku nasz wielomian ma nie zmieniać wartości, czyli ma zachodzić $x^{n+2} + x^{n+1} = x^n$. To oznacza, że $x + x^2 = 1$, a więc jeśli przyjmiemy $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, to wszystkie wymagane warunki są spełnione oraz zachodzi $x + x^2 = 1$. Celowi T nadajemy wartość 1.

Wartość nieskończonej armii

- Każda z konfiguracji pionków opisana jest skończonym wielomianem. Jego wartość będzie zatem mniejsza od sumy szeregu nieskończonego (który interpretować możemy jako wartość nieskończonej armii): $P = x^5 + 3x^6 + 5x^7 + 7x^8 + \ldots = x^5(1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots)$.
- $S = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots$
- $xS = x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \ldots$
- $S - xS = S(1 - x) = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \ldots$
- $S(1 - x) = 1 + 2(x + x^2 + x^3 + \ldots)$
- $S(1 - x) = 1 + \frac{2x}{1-x} = \frac{1+x}{1-x}$
- $S = \frac{1+x}{(1-x)^2}$
- Ponieważ $P = x^5 S$, więc $P = \frac{x^5(1+x)}{(1-x)^2}$.

Nieosiągalny poziom piąty

- Przypomnijmy, że nasz wybór wartości dla x spełnia warunek $x + x^2 = x(1 + x) = 1$, a więc $1 + x = \frac{1}{x}$ oraz $1 - x = x^2$.
- Tak więc: $P = \frac{x^5(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{x^5(\frac{1}{x})}{(x^2)^2} = \frac{x^4}{x^4} = 1$.

- Oznacza to, że wartość przypisana każdej początkowej (skończonej!) konfiguracji pionków poniżej bariery musi być mniejsza od 1, a ponieważ każdy ruch albo zmniejsza wartość konfiguracji, albo pozostawia ją bez zmian, więc wartość żadnego z pionków nie osiągnie nigdy 1.
- A to znaczy, że żaden pionek ze skończonej armii pod barierą, niezależnie od tego jak licznej i jak sprytnie rozstawionej, nigdy nie osiągnie poziomu piątego.

W sieci znaleźć można ciekawe uogólnienia tej gry.