

Semiotyka logiczna

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Dodatek 4

Plan na dziś

Plan na dziś:

- Minijęzyk Smullyana;
- Twierdzenie Gödla dla minijęzyka;
- Systemy regularne.

Dla oswojenia się z rozumowaniami przekątniowymi, które odgrywają istotną rolę np. w dowodzie Twierdzenia Gödla o niezupełności Arytmetyki Peana pobawimy się dzisiaj pewnym małym systemem logicznym, skonstruowanym przez Raymonda Smullyana (zob. rozdział 15 w *Szatan, Cantor i nieskończoność oraz inne łamigłówki*).

Książki z zagadkami logicznymi Raymonda Smullyana

- *Jaki jest tytuł tej książki? Tajemnica Drakuli, zabawy i łamigłówki logiczne.* Warszawa 1993. Przełożył: Bohdan Chwedeńczuk. Trzy wydania polskie.
- *Dama czy tygrys oraz inne zagadki logiczne.* Warszawa 1995, 2004. Przełożył: Bohdan Chwedeńczuk.
- *Szatan, Cantor i nieskończoność oraz inne łamigłówki.* Warszawa 1998. Przełożyli z angielskiego: Anna i Krzysztof Wójtowicz.
- *Przedrzeźniać Przedrzeźniacza. Oraz Inne Zagadki Logiczne Łącznie z Zadziwiającą Przygodą w Krainie Logiki Kombinatorycznej.* Warszawa 2007. Przekład z języka angielskiego: Jerzy Pogonowski.
- *Forever Undecided. A Puzzle Guide to Gödel.* Oxford University Press, 1988. Z angielskiego przełożył Jerzy Pogonowski. Ukazało się w 2007 jako: *Na zawsze nierozstrzygnięte. Zagadkowy Przewodnik po Twierdzeniach Gödla.*

Proste pytania

Jakie korzyści może mieć Humanistka z:

- teorii obliczeń (funkcji rekurencyjnych, maszyn Turinga, ...);
- logiki modalnej (w szczególności, logiki epistemicznej);
- metalogiki?

Są to, jak sądzę, ważne pytania dydaktyczne.

Upamiętniam proszę zwrócić uwagę, że wiedza dotycząca obliczalności oraz matematycznych podstaw logik modalnych należy do standardu nauczania we współczesnych szkołach wyższych na kierunkach: językoznawczych, informatycznych, filozoficznych.

Warto to chyba wziąć pod uwagę układając program studiów Językoznawstwa i Nauk o Informacji.

Minijęzyk Smullyana

Rozważmy język o czterech symbolach: ♣, ♠, ♦, ♥.

Wyrażeniem tego języka jest dowolny skończony ciąg tych symboli.

Zbudujemy miniaturowy **system** S , w którym można **dowodzić** pewnych wyrażen tego języka.

Nie będzie przy tym istotne, na czym polega owa **dowodliwość**.

Interesować nas będzie jedynie jej związek z określoną dla tego języka **prawdziwością** jego wyrażen.

Wyrażenia, które nie są prawdziwe w S nazwiemy **fałszywymi** w S .

Nie będzie istotne, **czym** jest prawdziwość. Ważne będą jedynie wzajemne związki dowodliwości i prawdziwości.

Minijęzyk Smullyana

Przypiszemy wyrażeniom tego języka następującą interpretację:

- $\spadesuit X$ — stwierdza, że wyrażenie X jest dowodliwe w S ;
- $\clubsuit X$ — stwierdza, że wyrażenie XX jest dowodliwe w S ;
- $\heartsuit X$ — stwierdza, że wyrażenie X nie jest dowodliwe w S ;
- $\diamondsuit X$ — stwierdza, że wyrażenie XX nie jest dowodliwe w S .

Powiemy, że:

- $\spadesuit X$ jest prawdziwe w S , gdy X jest dowodliwe w S ;
- $\clubsuit X$ jest prawdziwe w S , gdy XX jest dowodliwe w S ;
- $\heartsuit X$ jest prawdziwe w S , gdy X nie jest dowodliwe w S ;
- $\diamondsuit X$ jest prawdziwe w S , gdy XX nie jest dowodliwe w S .

Poprawność systemu S

Widać, że ważną cechą systemu S jest jego **samozwrotność** — można w nim udowodnić różne zdania, stwierdzające, co w tym systemie jest, a co nie jest dowodliwe.

Jedyne założenie, które czynimy o systemie S to założenie jego **poprawności**: wszystkie zdania dowodliwe w S są prawdziwe w S .

Konsekwencjami tego założenia są:

- W_1 Jeśli $\spadesuit X$ jest dowodliwe w S , to X jest dowodliwe w S .
- W_2 Jeśli $\heartsuit X$ jest dowodliwe w S , to X nie jest dowodliwe w S .
- W_3 Jeśli $\clubsuit X$ jest dowodliwe w S , to XX jest dowodliwe w S .
- W_4 Jeśli $\diamondsuit X$ jest dowodliwe w S , to XX nie jest dowodliwe w S .

Twierdzenie Gödla dla S

Istnieje wyrażenie prawdziwe w S , które nie jest dowodliwe w S .

Dowód. Takim wyrażeniem jest $\diamond\diamond$.

Stwierdza ono, że podwojenie wyrażenia \diamond nie jest dowodliwe.

Podwojeniem \diamond jest $\diamond\diamond$.

Zatem $\diamond\diamond$ jest prawdziwe w S wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest dowodliwe w S .

Oznacza to, że $\diamond\diamond$ jest:

- prawdziwe w S i niedowodliwe w S ; albo
- fałszywe w S i dowodliwe w S .

Drugi człon tej alternatywy jest wykluczony ze względu na poprawność S : tylko zdania prawdziwe są dowodliwe.

Zatem zachodzi pierwszy człon tej alternatywy.

Uwagi o interpretacji zamierzonej

Uwaga. Jest chyba dla wszystkich oczywiste, że nasza zamierzona interpretacja minijęzyka Smullyana jest jedną z wielu możliwych interpretacji.

To, co jest istotne, to:

- W_0 możliwość interpretowania ciągów symboli;
- warunki W_1 — W_4 .

Można więc myśleć o innych jeszcze interpretacjach, spełniających te warunki. Dla przykładu, symbol ♠ możemy interpretować jako:

- drukowalny (przez jakąś maszynę);
- poznawalny (przez jakiś podmiot);
- akceptowalny (np. przez Watykan).

Anything goes, jeśli tylko spełnione są warunki W_0 — W_4 .

Operacja sprzężenia

- Sprzężeniem $\spadesuit X$ jest $\heartsuit X$.
- Sprzężeniem $\heartsuit X$ jest $\spadesuit X$.
- Sprzężeniem $\clubsuit X$ jest $\diamondsuit X$.
- Sprzężeniem $\diamondsuit X$ jest $\clubsuit X$.

Sprzężenie X oznaczamy przez \bar{X} . Dla dowolnej pary wyrażeń sprzężonych, jedno z nich jest prawdziwe w S , a drugie jest fałszywe w S .

Wyrażenie nazywamy **obalalnym** w S , gdy jego sprzężenie jest dowodliwe w S . Zatem:

- $\heartsuit X$ obalane w S wtedy i tylko wtedy, gdy $\spadesuit X$ dowodliwe w S .
- $\spadesuit X$ obalane w S wtedy i tylko wtedy, gdy $\heartsuit X$ dowodliwe w S .
- $\clubsuit X$ obalane w S wtedy i tylko wtedy, gdy $\diamondsuit X$ dowodliwe w S .
- $\diamondsuit X$ obalane w S wtedy i tylko wtedy, gdy $\clubsuit X$ dowodliwe w S .

Nierozstrzygalność S

Wyrażenie, które nie jest ani dowodliwe w S , ani obalalne w S nazwiemy **nierozstrzygalnym** w S .

Pokazaliśmy, że $\diamond\diamond$ jest prawdziwe i niedowodliwe w S .

Z prawdziwości $\diamond\diamond$ wynika, że wyrażenie z nim sprzężone, czyli $\clubsuit\diamond$ jest fałszywe w S .

Stąd, na mocy poprawności S , wyrażenie $\clubsuit\diamond$ jest także niedowodliwe w S .

Stąd i z definicji \clubsuit , mamy, iż $\diamond\diamond$ jest niedowodliwe w S .

Oznacza to, iż wyrażenie $\diamond\diamond$ jest **nierozstrzygalne** w S .

Nierozstrzygalność S

Uwaga. Można przeprowadzić powyższą argumentację wcale nie odwołując się do pojęcia prawdy.

Istotnie, nierozstrzygalność wyrażenia $\diamond\diamond$ udowodnić można bezpośrednio z warunków W_1 — W_4 .

(1) Przypuśćmy, że $\diamond\diamond$ jest dowodliwe.

Podstawiając za X w W_4 wyrażenie \diamond otrzymujemy, że podwojenie \diamond jest niedowodliwe, co znaczy, że $\diamond\diamond$ jest niedowodliwe. **Sprzeczność.**

Zatem $\diamond\diamond$ nie jest dowodliwe.

(2) Gdyby dowodliwe było sprzężenie wyrażenia $\diamond\diamond$, czyli wyrażenie $\clubsuit\diamond$, to na mocy warunku W_3 (podstawiamy \diamond za X) wyrażenie $\diamond\diamond$ byłoby dowodliwe.

Pokazaliśmy już jednak, że $\diamond\diamond$ nie jest dowodliwe.

Wynika stąd, że $\clubsuit\diamond$ również nie jest dowodliwe.

Ostatecznie, wyrażenie $\diamond\diamond$ nie jest rozstrzygalne w S.

Niektóre inne ciekawe wyrażenia S

- $\heartsuit\diamondsuit$ stwierdza o sobie, że jest obalalne.
 - $\diamondsuit\clubsuit$ stwierdza o sobie, że nie jest obalalne.
 - $\clubsuit\clubsuit$ stwierdza o sobie, że jest dowodliwe.
-
- Dla dowolnego wyrażenia E istnieje wyrażenie X , które stwierdza, że EX jest dowodliwe (tj. X jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy EX jest dowodliwe). **Dowód.** $X = \heartsuit E \heartsuit$.
 - Dla dowolnego wyrażenia E istnieje wyrażenie X , które stwierdza, że EX nie jest dowodliwe. **Dowód.** $X = \diamondsuit E \diamondsuit$.
 - Dla dowolnego wyrażenia E istnieje wyrażenie X , które stwierdza, że $E\bar{X}$ jest dowodliwe. **Ćwiczenie.**
Dla dowolnego wyrażenia E istnieje wyrażenie X , które stwierdza, że $E\bar{X}$ nie jest dowodliwe. **Ćwiczenie.**

Niektóre inne ciekawe wyrażenia S

- Istnieją wyrażenia X i Y takie, że:
 - X stwierdza, że Y jest dowodliwe.
 - Y stwierdza, że X nie jest dowodliwe.

Co najmniej jedno z wyrażeń X , Y musi być prawdziwe, ale nie ma metody ustalenia, które.

- Istnieją wyrażenia X i Y takie, że:
 - X stwierdza, że Y jest obalalne.
 - Y stwierdza, że X nie jest obalalne.

Co najmniej jedno z wyrażeń X , Y musi być fałszywe, ale nieobalalne.

- Istnieją wyrażenia X i Y takie, że:
 - X stwierdza, że Y jest dowodliwe.
 - Y stwierdza, że X jest obalalne. Jedno z nich jest prawdziwe, ale niedowodliwe, a drugie fałszywe, ale nieobalalne.

Niektóre inne ciekawe wyrażenia S

- Istnieją wyrażenia X i Y takie, że:
 - X stwierdza, że Y nie jest dowodliwe.
 - Y stwierdza, że X nie jest obalalne.

- Istnieją wyrażenia X , Y i Z takie, że:
 - X stwierdza, że Y jest obalalne.
 - Y stwierdza, że Z jest nieobalalne.
 - Z stwierdza, że X jest dowodliwe.

Nadto, zachodzi jedna z trzech możliwości:

- X jest prawdziwe, ale nie jest dowodliwe.
- Y jest fałszywe, ale nie jest obalalne.
- Z jest fałszywe, ale nie jest obalalne.

Systemy regularne

Powiemy, że system S , spełniający warunki W_1 — W_4 jest **regularny**, jeśli spełnione są także warunki:

- Jeśli X jest dowodliwe w S , to $\spadesuit X$ jest dowodliwe w S .
- Jeśli XX jest dowodliwe w S , to $\clubsuit X$ jest dowodliwe w S .

Z tej definicji oraz z warunków W_1 i W_3 wynika, że jeśli S jest systemem regularnym, to:

- $\spadesuit X$ jest dowodliwe wtedy i tylko wtedy, gdy X jest dowodliwe.
- $\clubsuit X$ jest dowodliwe wtedy i tylko wtedy, gdy XX jest dowodliwe.

Wyrażenia **pozytywne** to wyrażenia postaci $\spadesuit X$ lub $\clubsuit X$.

Wyrażenia **negatywne** to wyrażenia postaci $\heartsuit X$ lub $\diamond X$.

Systemy regularne

- System S jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie prawdziwe wyrażenia pozytywne S są dowodliwe w S .
- Jeśli system S jest regularny, to każde fałszywe wyrażenie negatywne jest obalalne w S .
- Jeśli S jest regularny, to dla dowolnego wyrażenia X oraz dowolnego ciągu E symboli ♠: wyrażenie EX jest dowodliwe wtedy i tylko wtedy, gdy X jest dowodliwe.
- W systemie regularnym ♣ X jest dowodliwe wtedy i tylko wtedy, gdy ♠ XX jest dowodliwe.
- Jeśli E jest dowolnym ciągiem symboli ♠, to wyrażenie $◇E◇$ jest prawdziwe i niedowodliwe we **wszystkich** systemach regularnych. Zatem istnieje **nieskończenie** wiele wyrażeń prawdziwych i niedowodliwych we wszystkich systemach regularnych.