DRZEWA SEMANTYCZNE

W KLASYCZNYM RACHUNKU PREDYKATÓW

ZADANIA DO ROZDZIAŁU III

(PODROZDZIAŁY: III.2.–III.8.)

JERZY POGONOWSKI

ZAKŁAD LOGIKI STOSOWANEJ UAM

http://www.logic.amu.edu.pl

III. 9. Zadania do rozdziału III

Opracowano ponad ***dwieście*** zadań (z rozwiązaniami) do problematyki omówionej w rozdziale III. Poniżej zamieszczamy około dwóch tuzinów przykładowych zadań. W wersji skryptu przeznaczonej do ew. druku zadania do wszystkich rozdziałów (I–V) zostaną umieszczone w rozdziale VI.
Uwaga. Niektóre z zamieszczonych niżej drzew są dość skomplikowane i ledwo mieszczą się na kartce. Z tego względu formuły w nich występujące nie zawsze są „estetycznie" podpisane pod krawędziami drzew.

III.9.2. Tautologie KRP

9.2.1. Pokaż, że są tautologiami KRP:

- (a) $\forall x\ A \vee \forall x\ B \rightarrow \forall x\ (A \vee B)$
- (b) $\forall x\ (A \equiv B) \rightarrow \forall x\ (A \rightarrow B) \wedge \forall x\ (B \rightarrow A)$.

9.2.1. Czy są tautologiami, czy kontrtautologiami KRP?

- (a) $\forall x\ (\exists y\ P(x,y) \rightarrow \forall z\ P(x,z)) \rightarrow \forall y \forall z\ (P(y,z) \rightarrow P(z,y))$
- (b) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \forall x(\exists y(P(y) \wedge R(x,y)) \rightarrow \exists y(Q(y) \wedge R(x,y)))$
- (c) $\exists x(\exists y P(x,y) \rightarrow Q(x)) \equiv \exists x \exists y(P(x,y) \rightarrow Q(x))$.

III.9.3. Semantyczna niesprzeczność w KRP

9.3.1. Czy jest zbiorem semantycznie sprzecznym?

- (a) $\{P(a), \neg Q(a), \forall x(P(x) \rightarrow (R(x) \vee S(x))), \neg S(a), \forall x((R(x) \wedge T(x)) \rightarrow Q(x)), \neg \exists x(R(x) \wedge \neg T(x))\}$
- (b) $\{\exists x(\exists y P(y) \equiv \exists y Q(x,y)), \forall x(Q(a,x) \equiv P(x))\}$
- (c) $\{\exists x \exists y(R(x,y) \wedge \neg S(x,y)), \forall x(P(x) \rightarrow \forall y R(x,y)), \exists x P(x)\}$
- (d) $\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x \exists y(R(y) \wedge S(y,x)), \forall x((R(x) \wedge Q(x)) \rightarrow T(x)), \forall x \forall y((T(y) \wedge S(y,x)) \rightarrow T(x)),$ $\neg \forall x \forall y((\neg P(y) \rightarrow \neg S(x,y)) \rightarrow T(x))\}$.

III.9.4. Wynikanie logiczne w KRP

9.4.2. Czy jest niezawodną regułą wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\ ((P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (R(x) \wedge S(x))) \\ \forall x\ ((R(x) \vee S(x)) \rightarrow (P(x) \wedge Q(x)))\end{array}}{\forall x\ (P(x) \leftrightarrow R(x))}$$

Oprócz rozwiązania metodą drzew semantycznych, spróbuj rozważyć, co z powyższej reguły da się wywnioskować o stosunkach między zakresami nazw ogólnych (czyli predykatów jednoargumentowych).

9.4.2. Które z podanych reguł wnioskowania są niezawodne? W przypadkach reguł zawodnych podaj co najmniej jedną interpretację, w której przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy.

- (a)

$$\begin{array}{c}
\exists x \exists y(((P(x) \land P(y)) \land x \neq y) \land (Q(x) \land Q(y))) \\
\forall x(Q(x) \to \neg R(x)) \\
\exists x(P(x) \land R(x)) \\
\hline
\exists x((P(x) \land R(x)) \land \forall y(y \neq x \to (P(y) \to \neg R(y))))
\end{array}$$

- (b)

$$\begin{array}{c}
\exists x(P(x) \land \neg Q(x)) \\
\forall x(R(x) \to Q(x)) \\
\exists x(P(x) \land Q(x)) \\
\hline
\forall x(R(x) \to P(x))
\end{array}$$

- (c)

$$\begin{array}{c}
\forall x(S(x) \to (Q(x) \land R(x)) \\
\exists x(S(x) \land Q(x)) \\
\exists x(S(x) \land \neg R(x)) \\
\hline
\forall x(P(x) \to S(x))
\end{array}$$

- (d)

$$\begin{array}{c}
\forall x((P(x) \lor Q(x)) \to R(x)) \\
\forall x((R(x) \lor S(x)) \to T(x)) \\
\forall x(T(x) \to (K(x) \land L(x))) \\
\exists x(P(x) \land (\neg K(x) \land \neg N(x))) \\
\hline
\exists x(Q(x) \land (M(x) \land \neg K(x)))
\end{array}$$

- (e)

$$\begin{array}{c}
\forall x(P(x) \to \forall y(Q(x,y) \to R(y))) \\
\forall x(S(x) \to \forall y(T(y) \to Q(x,y))) \\
\hline
\exists x(S(x) \land P(x)) \to \forall y(T(y) \to R(y))
\end{array}$$

- (f)

$$\begin{array}{c}
\forall x((P(x) \land \neg Q(x)) \to \exists y(R(x,y) \land S(y))) \\
\exists x((T(x) \land P(x)) \land \forall y(R(x,y) \to T(y))) \\
\forall x(T(x) \to \neg Q(x)) \\
\hline
\exists x(T(x) \land S(x))
\end{array}$$

- (g)

$$\begin{array}{c}
\forall x \exists y(P(x,y) \to P(x,x)) \\
\forall x(Q(x) \to (\exists z(P(x,z) \to \exists y P(y,x)))) \\
\forall x \neg P(x,x) \\
\hline
\forall x(Q(x) \to \neg \exists z P(x,z))
\end{array}$$

- (h)

$$\begin{array}{c}
\forall x \exists y P(x,y) \\
\exists z \forall x(\exists y P(x,y) \to P(x,z)) \\
\hline
\exists z \forall x P(x,z)
\end{array}$$

III.9.5. KRP z identycznością

9.5.1. Czy są tautologiami KRP z identycznością?

- (a) $P(a) \equiv \forall x(x = a \rightarrow P(x))$.
- (b) $\exists x(((P(x) \wedge Q(x)) \wedge \forall y(P(y) \wedge Q(y)) \rightarrow x = y) \rightarrow \forall x P(x))$.

9.5.2. Ustal, czy podane reguły wnioskowania są niezawodne. W przypadkach reguł zawodnych podaj co najmniej jedną interpretację, w której przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy.

- (a)

$$\begin{array}{c} P(a) \\ \exists x \forall y(x = y) \\ \hline \exists x \forall y(P(y) \equiv x = y) \end{array}$$

- (b)

$$\begin{array}{c} \forall x(x = a \rightarrow P(x)) \\ a \neq b \\ \hline \neg P(b) \end{array}$$

III.9.6. KRP z symbolami funkcyjnymi

9.6.1. Udowodnij, że są twierdzeniami Arytmetyki Robinsona:

- (a) $\oplus(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\bigcirc)$
- (b) $\otimes(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\bigcirc)$.

III.9.7. Unifikacja

9.7.1. Czy zbiór $\{Q(f(a), g(x)), Q(y, y)\}$ jest uzgadnialny?

9.7.2. Znajdź mgu dla $S = \{P(a, x, f(g(x))), P(z, f(z), f(u))\}$.

III.9.8. Rezolucja

9.8.1. Pokaż, że klauzula reprezentująca formułę $\exists x\ (S(x) \wedge R(x))$ jest rezolucyjnie wyprowadzalna z klauzul reprezentujących formuły:

- $\forall x\ (P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x)))$
- $\exists x\ (P(x) \wedge S(x))$.

9.8.2. Używając metody rezolucji, pokaż, że formuła $\exists x\ (P(x) \wedge R(x))$ wynika logicznie z formuł:

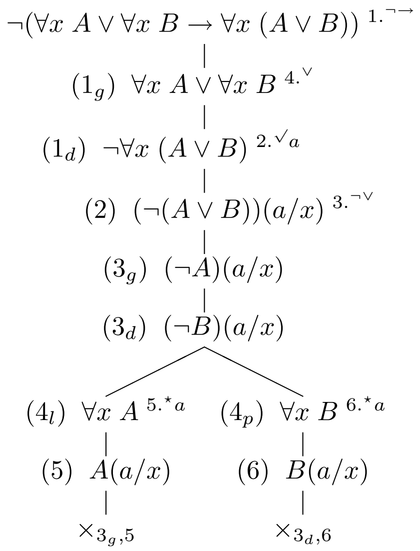
- $\forall x((Q(x) \wedge \neg T(x)) \rightarrow \exists y\ (S(x, y) \wedge R(y)))$
- $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x) \wedge \forall y\ (S(x, y) \rightarrow P(y)))$
- $\forall x\ (P(x) \rightarrow \neg T(x))$.

Odpowiedzi

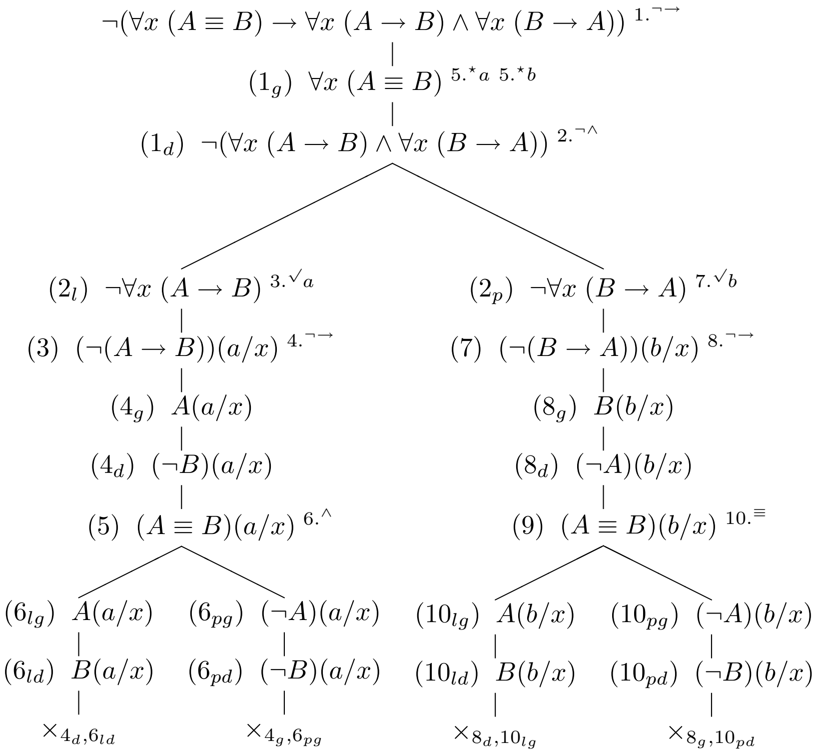
III.9.2. Tautologie KRP

9.2.1.

(a) $\forall x\ A \vee \forall x\ B \rightarrow \forall x\ (A \vee B)$.



(b) $\forall x\ (A \equiv B) \rightarrow \forall x\ (A \rightarrow B) \wedge \forall x\ (B \rightarrow A)$.



9.2.2.

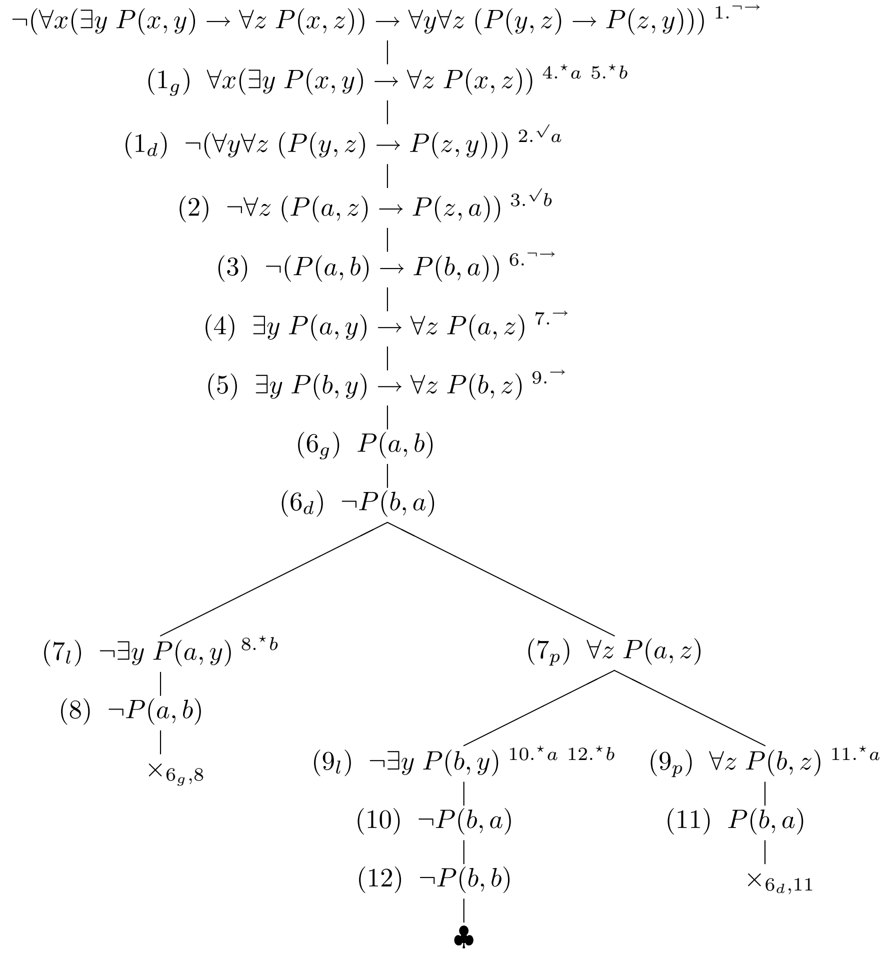
(a) $\forall x(\exists yP(x,y) \rightarrow \forall zP(x,z)) \rightarrow \forall y\forall z(P(y,z) \rightarrow P(z,y))$
Wprowadźmy oznaczenia:

- A dla formuły $\forall x\ (\exists y\ P(x,y) \rightarrow \forall z\ P(x,z))$
- B dla formuły $\forall y\forall z\ (P(y,z) \rightarrow P(z,y))$.

Badana równoważność jest semantycznie równoważna koniunkcji $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$. Ponieważ drzewo semantyczne zanegowanej powyższej równoważności jest dość złożone (jak na możliwości tej kartki), więc zbadamy nieco prostsze drzewa. Formuła $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy drzewo semantyczne jej negacji ma wszystkie gałęzie zamknięte. To z kolei zachodzi, gdy zarówno drzewo semantyczne formuły $\neg(A \rightarrow B)$, jak i drzewo semantyczne formuły $\neg(B \rightarrow A)$ jest zamknięte. Jeśli choć jedno z tych drzew ma co najmniej jedną gałąź otwartą, to badana równoważność nie jest tautologią. Jeszcze inaczej, odwołując się bezpośrednio do reguły $R(\neg \equiv)$: badana równoważność $A \equiv B$ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy drzewa semantyczne formuł $A \wedge \neg B$ oraz $B \wedge \neg A$ są oba zamknięte.

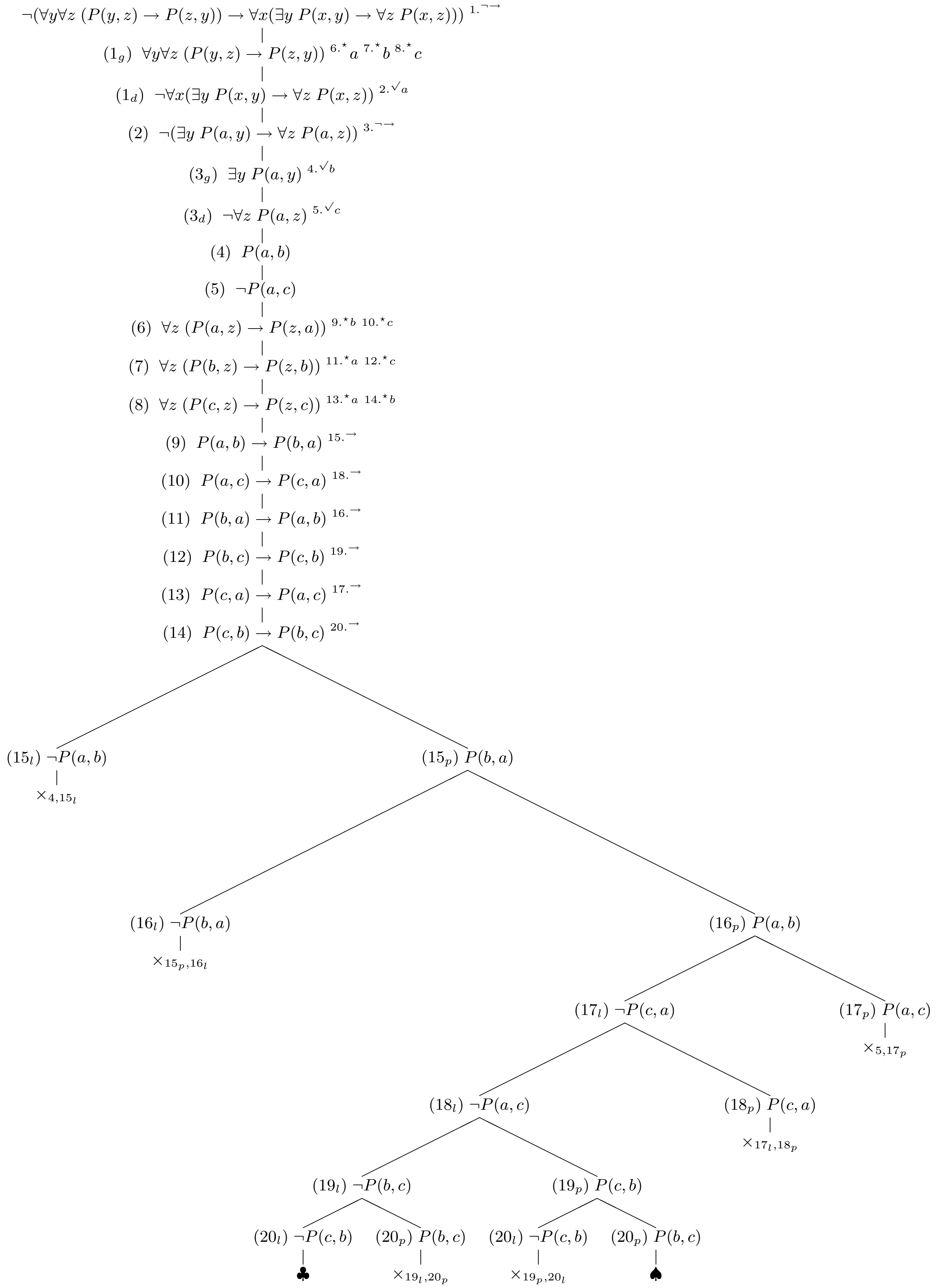
4.1.1.Badamy, czy formuła $A \equiv B$ jest tautologią.

Drzewo semantyczne formuły $\neg(A \rightarrow B)$:



To drzewo semantyczne ma gałąź otwartą. Implikacja $A \rightarrow B$ nie jest więc tautologią. Równoznacznie: formuła $A \wedge \neg B$ nie jest tautologią.

Drzewo semantyczne formuły $\neg(B \rightarrow A)$:



Uwaga. Nie wykonano wszystkich możliwych kroków. Zauważmy, że implikacje: $P(a,a)\to P(a,a)$, $P(b,b)\to P(b,b)$ oraz

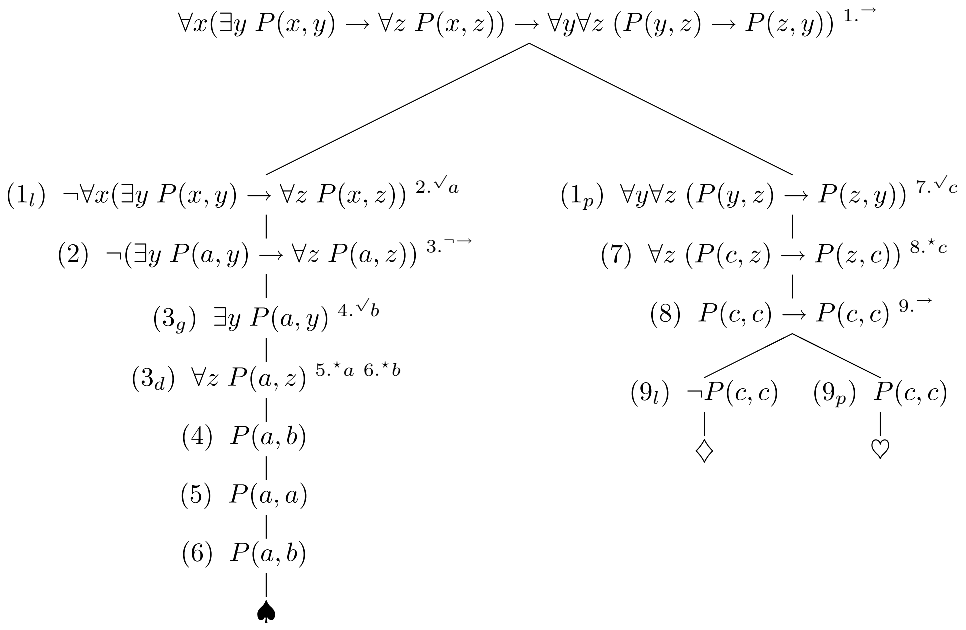
$P(c,c) \to P(c,c)$ nie mogą posłużyć do zamknięcia drzewa.

To drzewo semantyczne ma gałąź otwartą. Formuła $B \to A$ nie jest więc tautologią. Równoznacznie: formuła $B \wedge \neg A$ nie jest tautologią.

W konsekwencji, równoważność $A \equiv B$ nie jest tautologią.

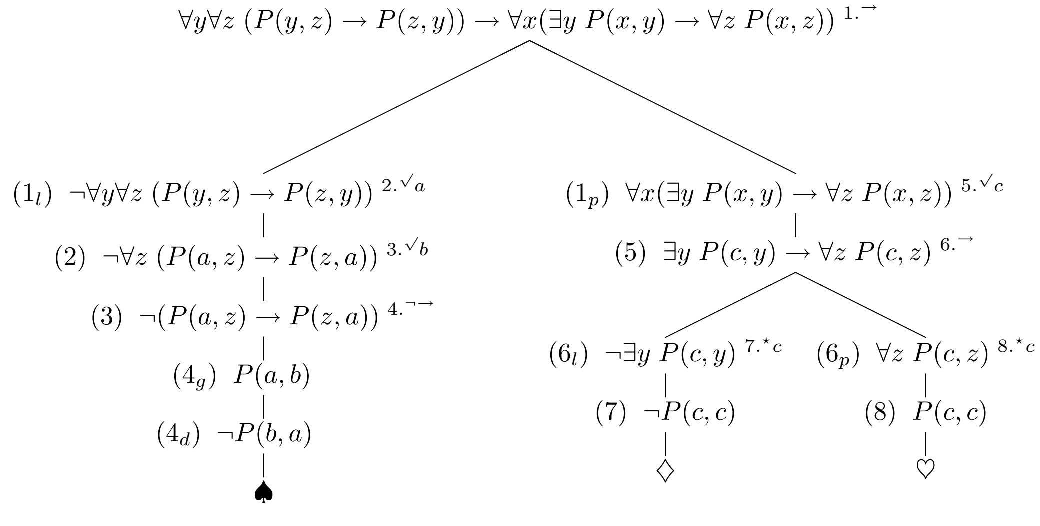
4.1.2. Badamy, czy formuła $A \equiv B$ jest kontrtautologią.

Drzewo semantyczne formuły $A \to B$:



[Tutaj c jest dowolną stałą z rozważanego języka KRP.]

Drzewo semantyczne formuły $B \to A$::



[Tutaj c jest dowolną stałą z rozważanego języka KRP.]

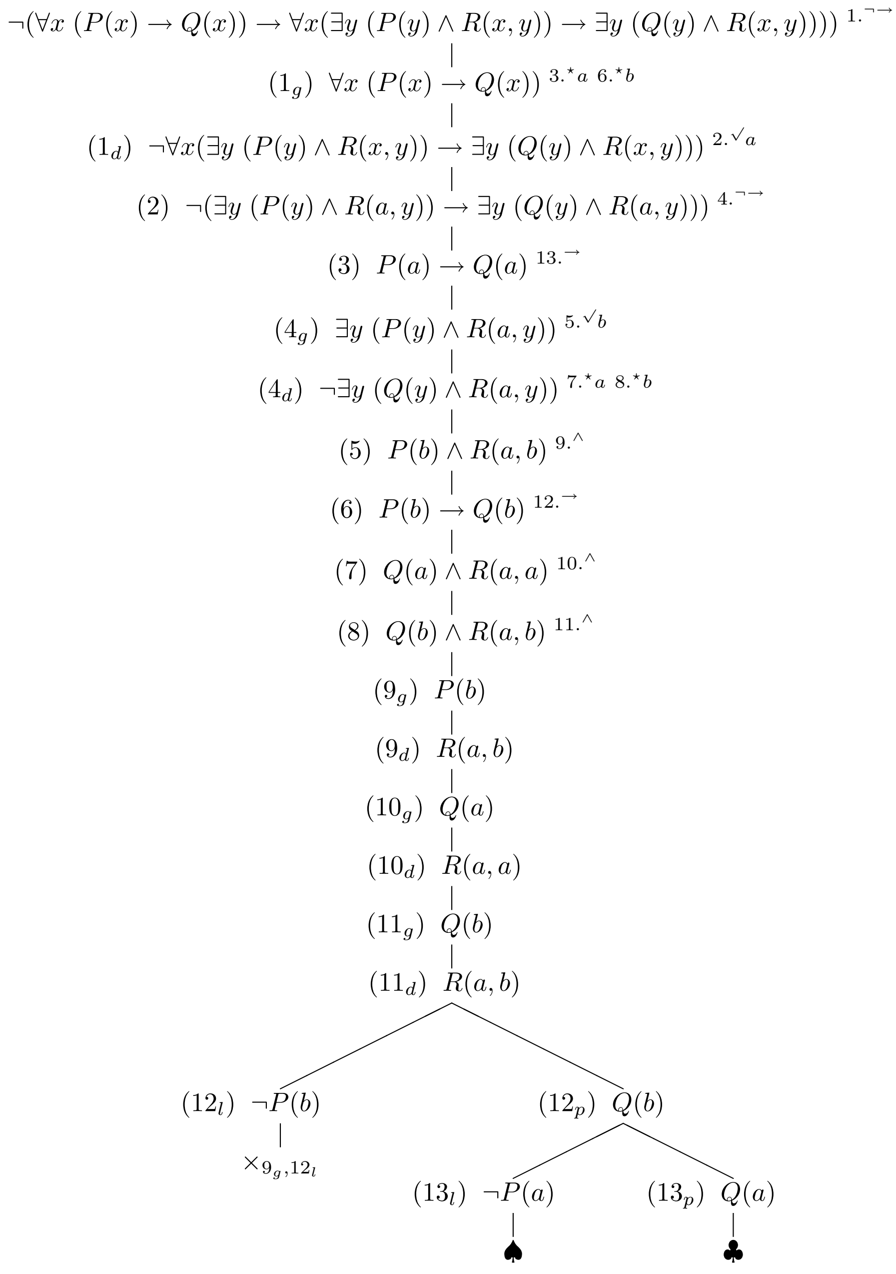
Ponieważ zarówno drzewo semantyczne $A \to B$, jak i drzewo semantyczne $B \to A$ mają (akurat wszystkie) gałęzie otwarte, więc każda z tych implikacji jest prawdziwa w co najmniej jednej interpretacji. W konsekwencji, żadna z tych implikacji nie jest kontrtautologią.

Odpowiedź. Badana formuła $A \equiv B$ nie jest ani tautologią, ani kontrtautologią. Jeśli chodzi o badane implikacje, to:

- Implikacja $A \to B$ nie jest tautologią.
- Implikacja $B \to A$ nie jest tautologią.
- Żadna z tych implikacji nie jest kontrtautologią.

(b) $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \forall x(\exists y\ (P(y) \wedge R(x,y)) \rightarrow \exists y\ (Q(y) \wedge R(x,y)))$.

Badamy, czy formuła jest tautologią:



Drzewo ma gałęzie otwarte. Badana formuła nie jest tautologią. Oto interpretacje, w których jest ona fałszywa:

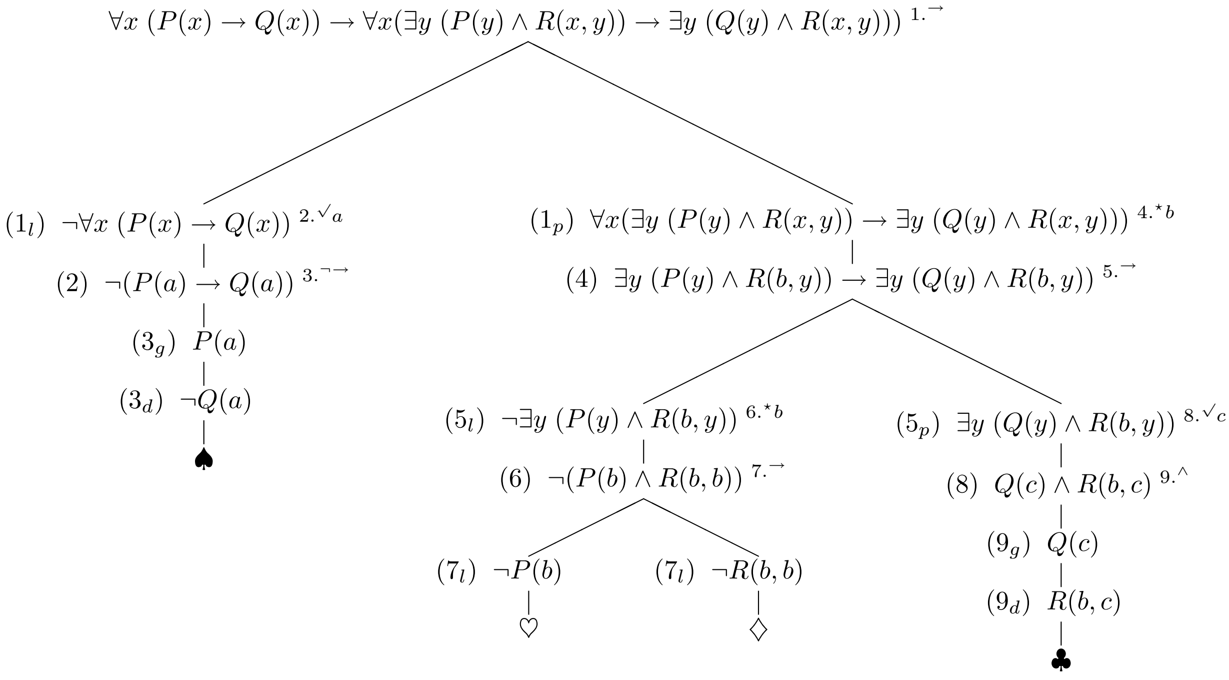
♠	P	Q
a	$-$	+
b	+	+

R♠	a	b
a	+	+
b	?	?

♣	P	Q
a	?	+
b	+	+

R♣	a	b
a	+	+
b	?	?

4.3.2. Badamy, czy formuła jest kontrtautologią:



Drzewo ma gałęzie otwarte. Stała b jest tu dowolną stałą rozważanego języka KRP. Badana formuła nie jest kontrtautologią. Oto interpretacje, w których jest ona fałszywa:

♠	P	Q
a	+	?

$R_{\spadesuit} = ?$

♡	P	Q
b	–	?

$R_{\heartsuit} = ?$

$R_{\heartsuit}$	b
b	–

$P_{\diamondsuit} = ?, Q_{\diamondsuit} = ?$

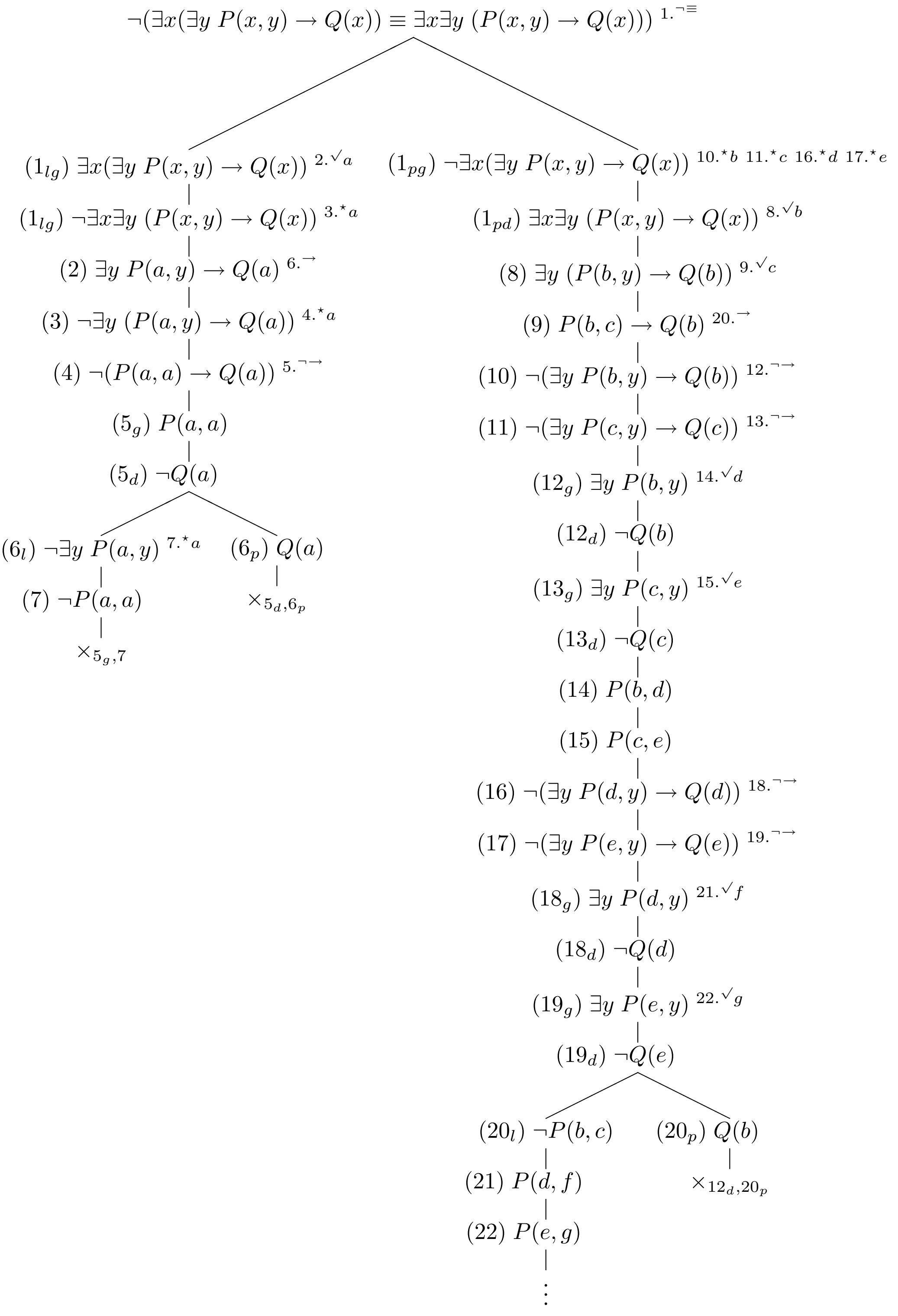
♣	P	Q
b	?	?
c	?	+

$R_{\clubsuit}$	b	c
b	?	+
c	?	?

Odpowiedź. Badana formuła nie jest ani tautologią, ani kontrtautologią KRP. Zwróćmy uwagę, że znaleziono *skończone* interpretacje, w których jest ona prawdziwa oraz *skończone* interpretacje, w których jest ona fałszywa.

(c) $\exists x(\exists y\ P(x,y) \to Q(x)) \equiv \exists x\exists y\ (P(x,y) \to Q(x))$.

Badamy, czy formuła jest tautologią:



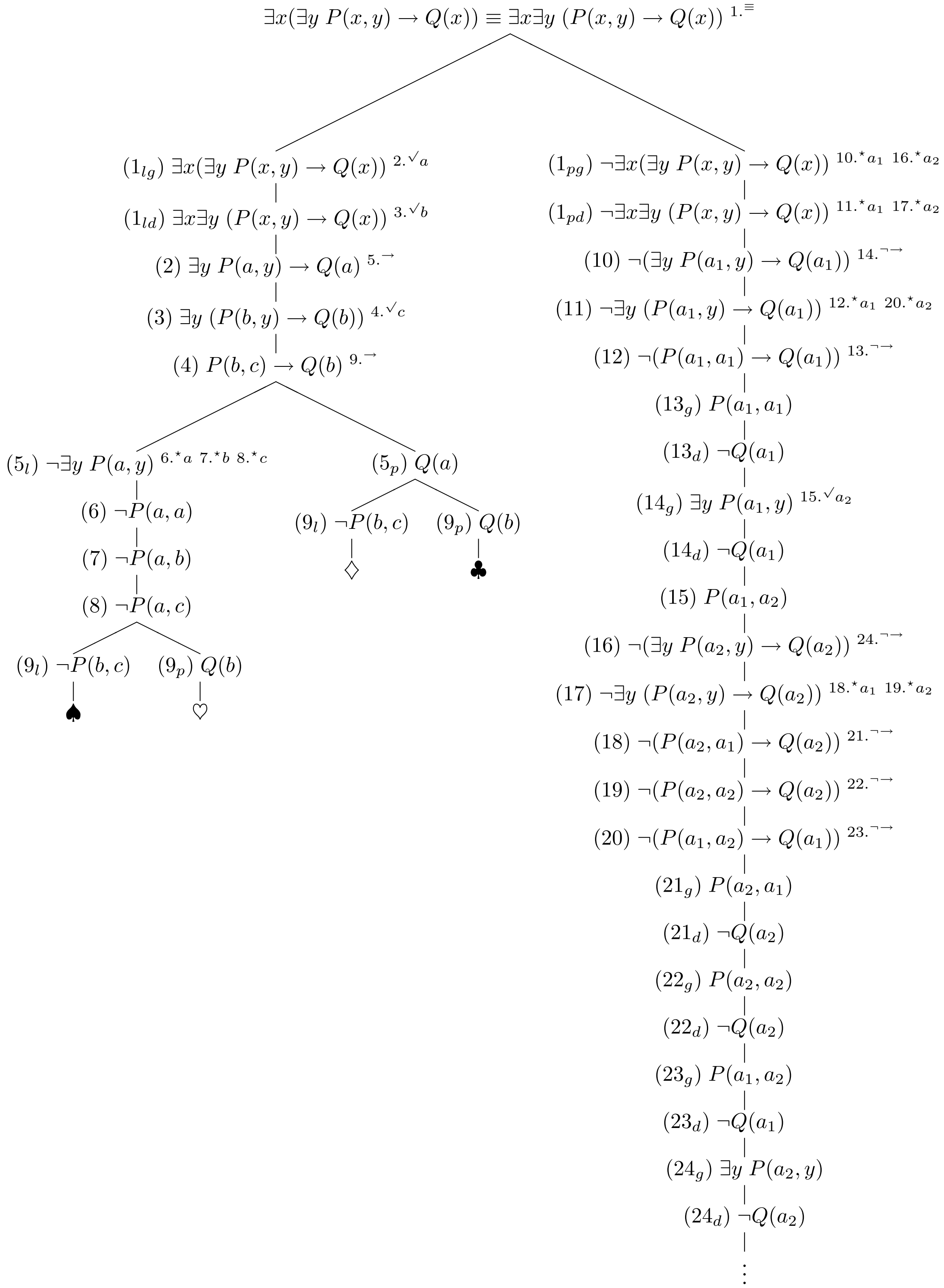
Drzewo ma nieskończoną gałąź otwartą. Badana formuła nie jest tautologią KRP. Zauważmy, że krok 20 można było wykonać wcześniej, już po kroku 12 (ze względów typograficznych postąpiliśmy inaczej). Interpretacja nieskończona, w której badana formuła jest fałszywa, ma postać następującą:

	b	c	d	e	f	g	$\cdots$
Q	–	–	–	–	–	–	$\cdots$

$$\begin{array}{ccccccc} b & \to & d & \to & f & \to & \cdots \\ & & & & & & \\ c & \to & e & \to & g & \to & \cdots \end{array}$$

Strzałka wskazuje między którymi elementami zachodzi denotacja predykatu P. Ponadto, nie zachodzi $P(b,c)$.

Badamy, czy formuła jest kontrtautologią:



Drzewo ma gałęzie otwarte: cztery skończone oraz jedną nieskończoną. Stała a_1 jest tu dowolną stałą z rozważanego języka KRP. Badana formuła nie jest kontrtautologią KRP.

Oto interpretacje, w których badana formuła jest prawdziwa:

♡	Q
a	?
b	+
c	?

♢	Q
a	+
b	+
c	?

♣	Q
a	+
b	+
c	?

Nadto, mamy $Q_{\spadesuit} =?$.

$P_{\spadesuit}$	a	b	c
a	–	–	–
b	?	?	–
c	?	?	?

$P_{\heartsuit}$	a	b	c
a	–	–	–
b	?	?	?
c	?	?	?

$P_{\diamondsuit}$	a	b	c
a	?	?	?
b	?	?	–
c	?	?	?

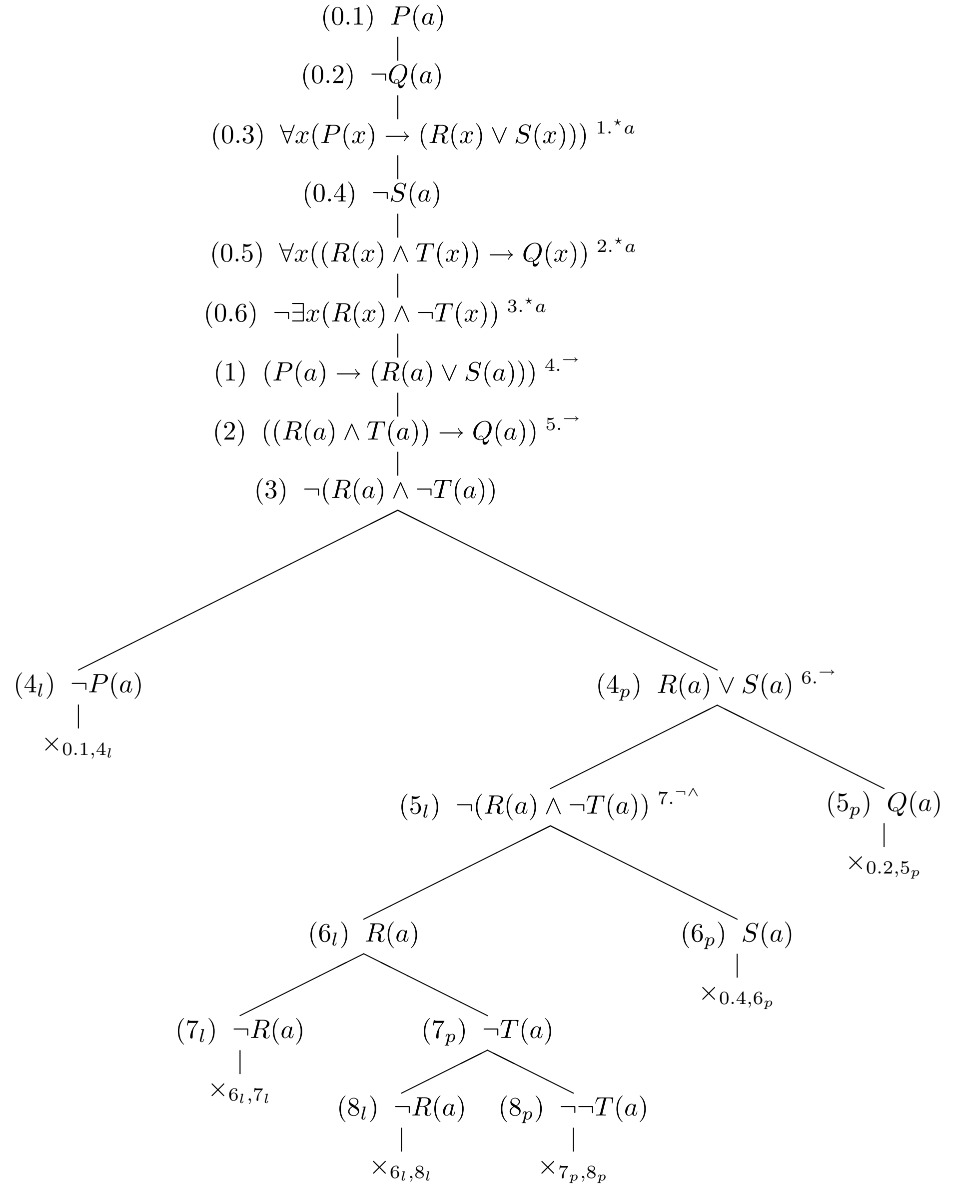
Nadto, mamy $P_{\clubsuit} =?$.

W interpretacji wyznaczonej przez gałąź nieskończoną denotacja predykatu Q jest zbiorem pustym, a denotacja predykatu P jest równa zbiorowi $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \times \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Czy potrafisz to uzasadnić?

Odpowiedź. Badana formuła nie jest ani tautologią, ani kontrtautologią KRP.

III.9.3. Semantyczna niesprzeczność w KRP

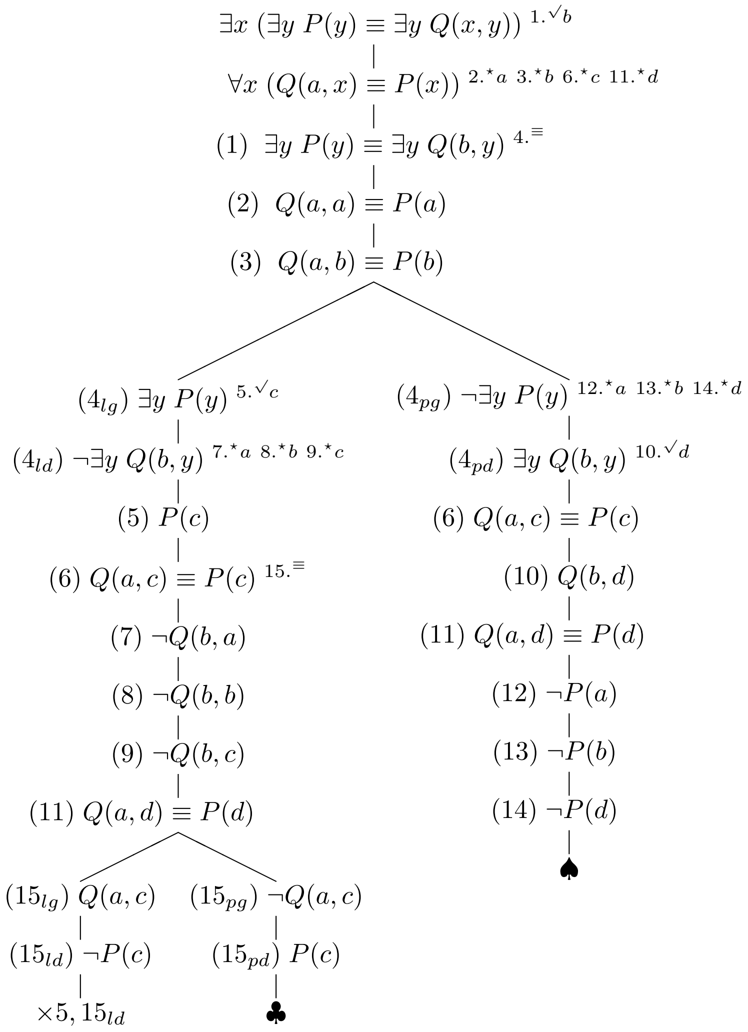
(a) $\{P(a), \neg Q(a), \forall x(P(x) \rightarrow (R(x) \vee S(x))), \neg S(a), \forall x((R(x) \wedge T(x)) \rightarrow Q(x)), \neg\exists x(R(x) \wedge \neg T(x))\}$.



Drzewo zamknięte. Semantycznie sprzeczny zbiór formuł.

(b) $\{\exists x(\exists y P(y) \equiv \exists y Q(x,y)), \forall x(Q(a,x) \equiv P(x))\}$.

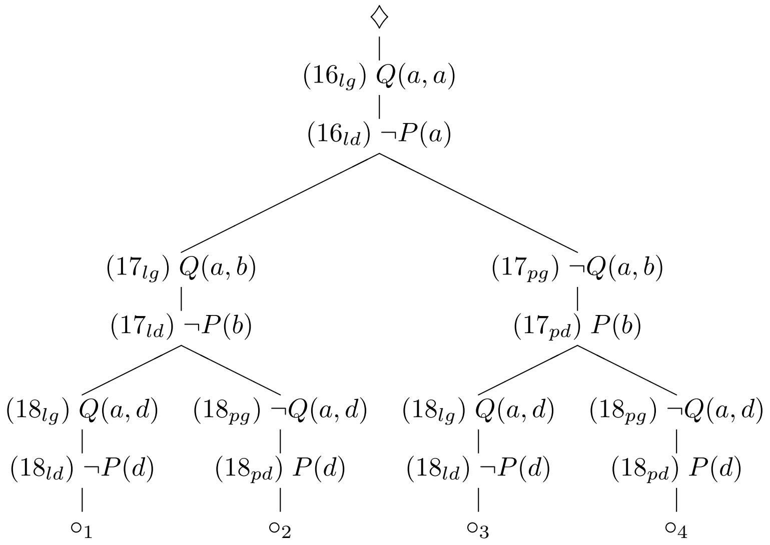
Drzewo otrzymane w tym przypadku jest dość skomplikowane (jak na możliwości druku na tej kartce). Zostanie przedstawione w kilku częściach. Nadto, wskażemy na pewne kłopoty, dotyczące używanej przez nas notacji.



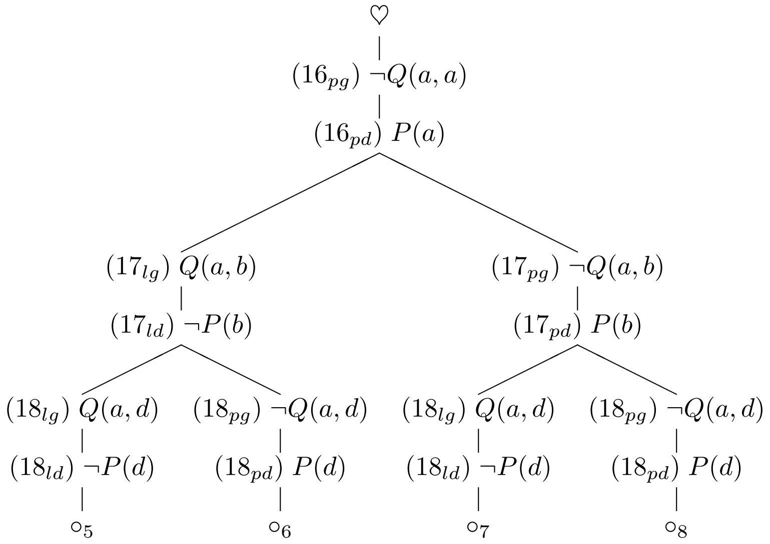
W miejsce liścia ♣ należy teraz wkleić drzewo powstające przez trzykrotne zastosowanie reguły $R(\equiv)$ do formuł:

- $(2)\ Q(a,a) \equiv P(a)\ ^{16.\equiv}$
- $(3)\ Q(a,b) \equiv P(b)\ ^{17.\equiv}$
- $(11)\ Q(a,d) \equiv P(d)\ ^{18.\equiv}$

Już uważne spojrzenie na powyższe formuły pozwala stwierdzić, że ***wszystkie*** gałęzie tego drzewa będą otwarte. Dla niedowiarków (niedowidzów?) narysujemy stosowne drzewo. Będzie ono sklejeniem drzewa:



oraz drzewa:

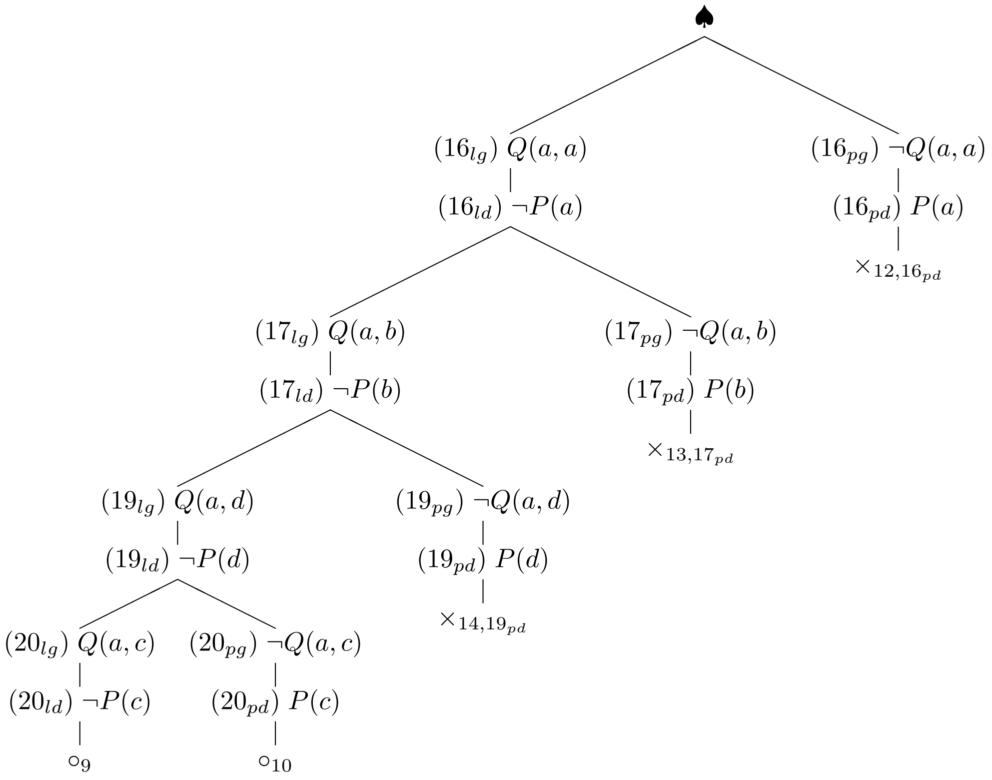


(***sklejenie*** oznacza tu, że masz przykleić liść ♢ do liścia ♣ oraz liść ♡ także do liścia ♣; dostaniesz drzewo o korzeniu ♣ oraz ośmiu liściach).

Natomiast w miejsce liścia ♠ należy wkleić drzewo powstające przez czterokrotne zastosowanie reguły $R(\equiv)$ do formuł:

- (2) $Q(a,a) \equiv P(a)$ $^{16.\equiv}$
- (3) $Q(a,b) \equiv P(b)$ $^{17.\equiv}$
- (11) $Q(a,d) \equiv P(d)$ $^{19.\equiv}$
- (6) $Q(a,c) \equiv P(c)$ $^{20.\equiv}$

W tym przypadku niektóre z gałęzi zostaną zamknięte, ale pozostaną dwie gałęzie otwarte:



Całe drzewo ma gałęzie otwarte, a więc rozważany zbiór formuł jest semantycznie niesprzeczny. Oto interpretacje, w których obie formuły z tego zbioru są prawdziwe:

$\circ_1$	P
a	−
b	−
c	+
d	−

Q	a	b	c	d
a	+	+	−	+
b	−	−	−	?
c	?	?	?	?
d	?	?	?	?

$\circ_2$	P
a	−
b	−
c	+
d	+

Q	a	b	c	d
a	+	+	−	−
b	−	−	−	?
c	?	?	?	?
d	?	?	?	?

$\circ_3$	P
a	−
b	+
c	+
d	−

Q	a	b	c	d
a	+	−	−	+
b	−	−	−	?
c	?	?	?	?
d	?	?	?	?

$\circ_4$	P
a	−
b	+
c	+
d	+

Q	a	b	c	d
a	+	−	−	−
b	−	−	−	?
c	?	?	?	?
d	?	?	?	?

$\circ_5$	P
a	+
b	−
c	+
d	−

Q	a	b	c	d
a	−	+	−	+
b	−	−	−	?
c	?	?	?	?
d	?	?	?	?

$\circ_6$	P
a	+
b	−
c	+
d	+

Q	a	b	c	d
a	−	+	−	−
b	−	−	−	?
c	?	?	?	?
d	?	?	?	?

$\circ_7$	P
a	+
b	+
c	+
d	−

Q	a	b	c	d
a	−	−	−	+
b	−	−	−	?
c	?	?	?	?
d	?	?	?	?

$\circ_8$	P
a	+
b	+
c	+
d	+

Q	a	b	c	d
a	−	−	−	−
b	−	−	−	?
c	?	?	?	?
d	?	?	?	?

$\circ_9$	P
a	−
b	−
c	−
d	−

Q	a	b	c	d
a	+	+	+	+
b	?	?	?	+
c	?	?	?	?
d	?	?	?	?

$\circ_{10}$	P
a	−
b	−
c	+
d	−

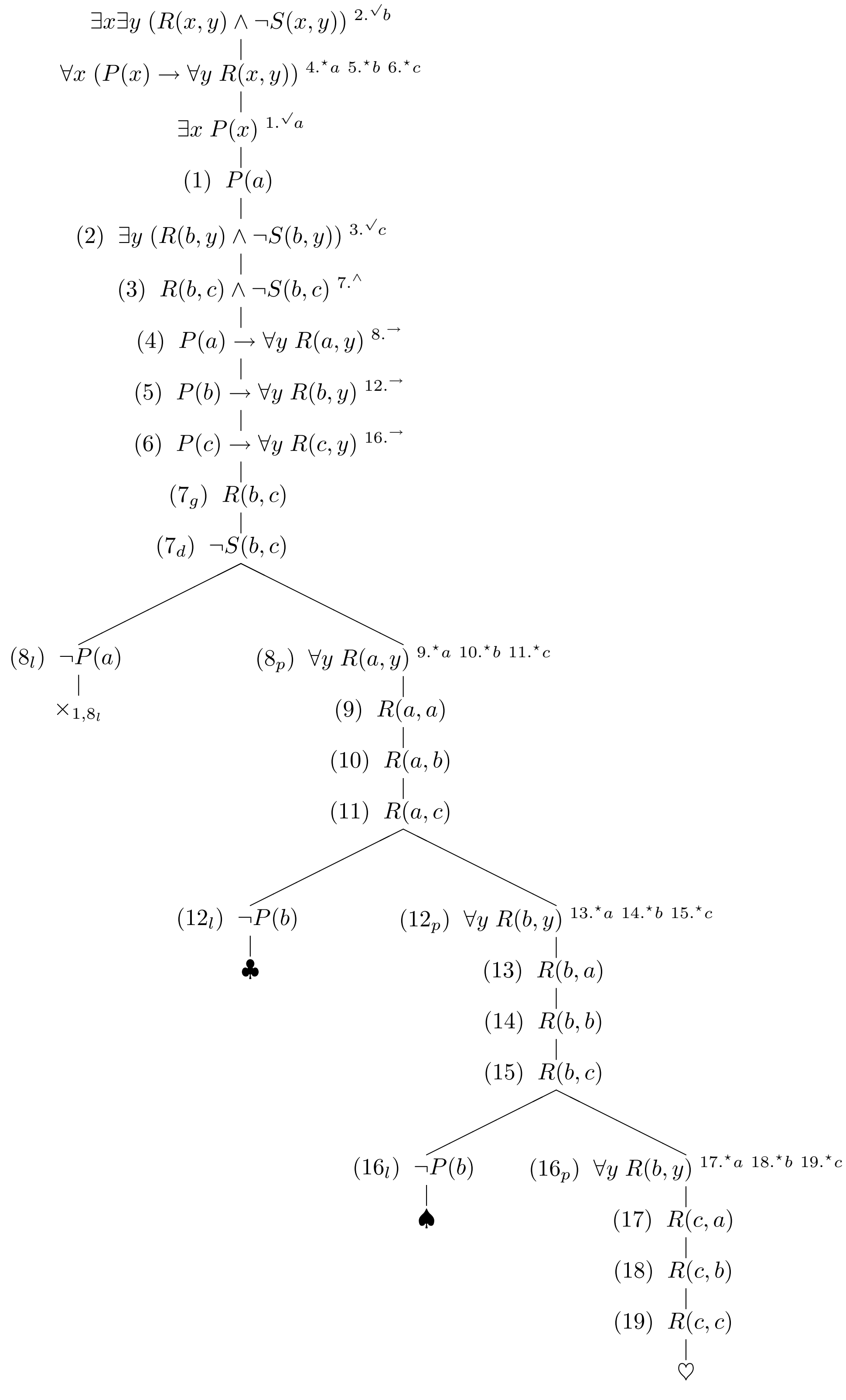
Q	a	b	c	d
a	+	+	−	+
b	?	?	?	+
c	?	?	?	?
d	?	?	?	?

Powyższy przykład wymaga jeszcze komentarza dotyczącego numeracji formuł w budowanym drzewie. Zauważmy, że:

- Zgodnie z przyjętymi zasadami, każdy krok wykonany na jakiejś formule daje w wyniku pewną formułę ***każdej otwartej w danym momencie*** gałęzi drzewa. Tak więc, rezultaty kroków: $2.^{\star}a$, $3.^{\star}b$, $6.^{\star}c$ oraz $11.^{\star}d$ pojawiły się w każdej otwartej gałęzi pierwszego z powyższych drzew. Zwróćmy uwagę, że zarówno krok $6.^{\star}c$, jak i krok $11.^{\star}d$ dały w wyniku formuły na ***różnych gałęziach***.
- Podobnie było z krokami: $16.^{\equiv}$ oraz $17.^{\equiv}$. Ich rezultaty widoczne są na trzech pozostałych drzewach.
- Krok $18.^{\equiv}$ otrzymuje inny numer niż krok $19.^{\equiv}$, ponieważ każdy z nich jest wykonywany na ***innej*** gałęzi drzewa. Nie jest przy tym istotne, że kroki te wykonywane są na „takiej samej” formule.

Tak więc, używana przez nas notacja nie prowadzi (jak dotąd) do błędów logicznych. Stwarza jednak czasami pewne utrudnienia.

(c) $\{\exists x \exists y (R(x,y) \wedge \neg S(x,y)), \forall x (P(x) \rightarrow \forall y R(x,y)), \exists x P(x)\}$.



Drzewo ma gałęzie otwarte, a więc rozpatrywany zbiór formuł jest semantycznie niesprzeczny. Oto interpretacje, w których wszystkie te formuły są prawdziwe:

♣	P
a	+
b	–
c	?

$R_♣$	a	b	c
a	+	+	+
b	?	?	+
c	?	?	?

$S_♣$	a	b	c
a	?	?	?
b	?	?	–
c	?	?	?

♠	P
a	+
b	?
c	–

$R_♠$	a	b	c
a	+	+	+
b	?	?	+
c	?	?	?

$S_♠$	a	b	c
a	?	?	?
b	?	?	–
c	?	?	?

♡	P
a	+
b	?
c	?

$R_♡$	a	b	c
a	+	+	+
b	+	+	+
c	+	+	+

$S_♡$	a	b	c
a	?	?	?
b	?	?	–
c	?	?	?

(d) Budujemy drzewo, w którego pniu umieszczamy wszystkie formuły:

$$\forall x\ (P(x) \to Q(x))\ ^{4.\star a\ \ 5.\star b}$$

$$\forall x \exists y\ (R(y) \wedge S(y,x))\ ^{6.\star a\ \ 7.\star b}$$

$$\forall x\ ((R(x) \wedge Q(x)) \to T(x))\ ^{8.\star a\ \ 9.\star b}$$

$$\forall x \forall y\ ((T(y) \wedge S(y,x)) \to T(x))\ ^{10.\star a\ \ 11.\star b}$$

$$\neg(\forall x \forall y\ ((\neg P(y) \to \neg S(x,y)) \to T(x)))\ ^{1.\surd a}$$

$$(1)\ \ \neg\forall y\ ((\neg P(y) \to \neg S(a,y)) \to T(a))\ ^{2.\surd b}$$

$$(2)\ \ \neg((\neg P(b) \to \neg S(a,b)) \to T(a))\ ^{3.\neg\to}$$

$$(3_g)\ \ \neg P(b) \to \neg S(a,b)$$

$$(3_d)\ \ \neg T(a)$$

$$(4)\ \ P(a) \to Q(a)$$

$$(5)\ \ P(b) \to Q(b)$$

$$(6)\ \ \exists y\ (R(y) \wedge S(y,a))$$

$$(7)\ \ \exists y\ (R(y) \wedge S(y,b))$$

$$(8)\ \ (R(a) \wedge Q(a)) \to T(a)$$

$$(9)\ \ (R(b) \wedge Q(b)) \to T(b)$$

$$(10)\ \ \forall y\ ((T(a) \wedge S(y,a)) \to T(a))\ ^{12.\star a\ \ 13.\star b}$$

$$(11)\ \ \forall y\ ((T(y) \wedge S(y,b)) \to T(b))\ ^{14.\star a\ \ 15.\star b}$$

$$(12)\ \ (T(a) \wedge S(a,a)) \to T(a)$$

$$(13)\ \ (T(a) \wedge S(b,a)) \to T(a)$$

$$(14)\ \ (T(y) \wedge S(a,b)) \to T(b)$$

$$(15)\ \ (T(y) \wedge S(b,b)) \to T(b)$$

$$\vdots$$

Wykonaliśmy wszystkie kroki dotyczące formuł skwantyfikowanych oraz stałych a i b. Jest widoczne, że druga formuła zmusza do wprowadzania coraz to nowych stałych indywiduowych (tak, jak ma to miejsce w formułach (6) oraz (7) powyżej). W konsekwencji, drzewo jest nieskończone. Zbiór jest semantycznie niesprzeczny. Informacje dotyczące interpretacji, w której wszystkie rozważane formuły są prawdziwe, znajdują się na nieskończonej gałęzi drzewa.

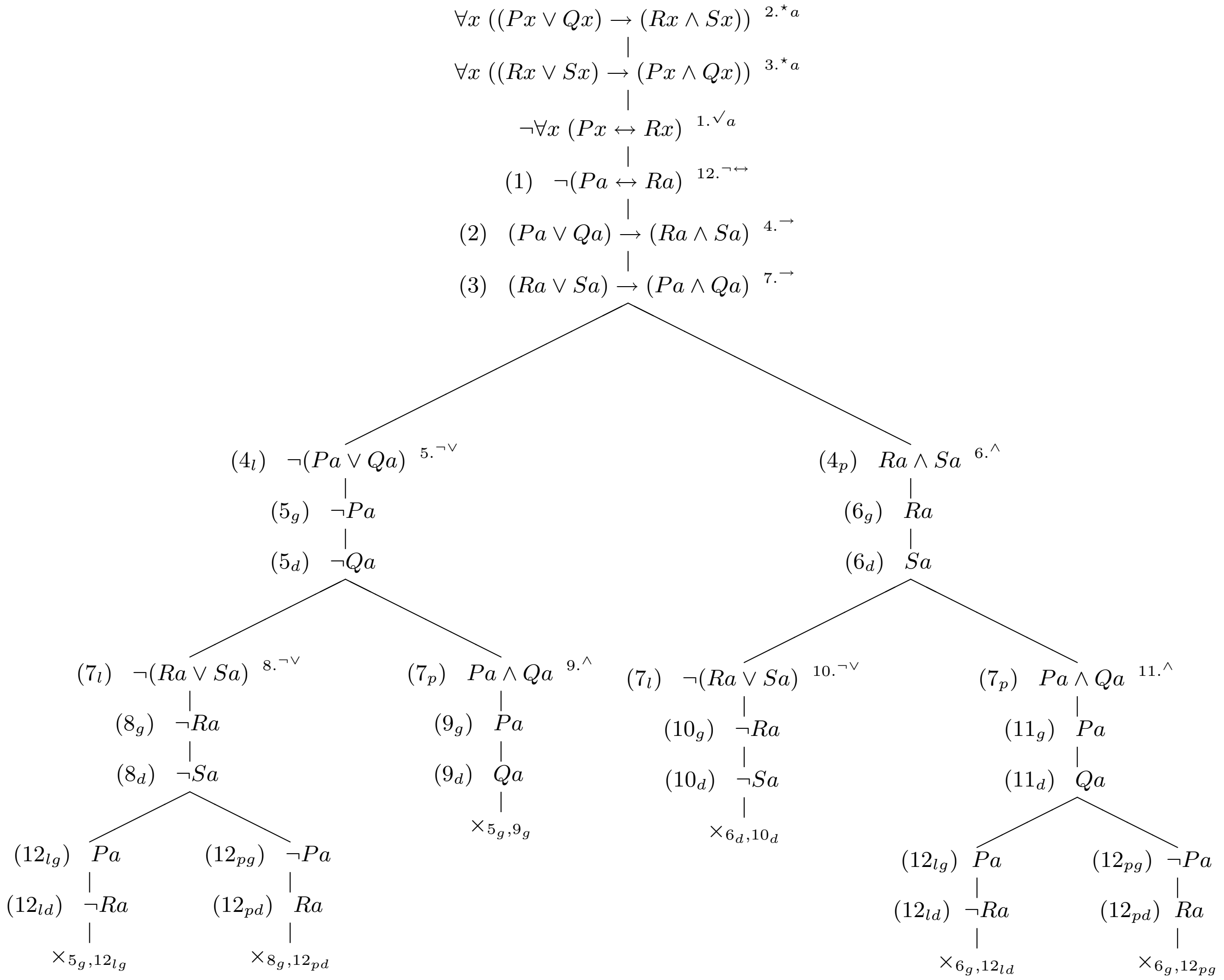
III.9.4. Wynikanie logiczne w KRP

9.4.1.

Jest to przykład sytuacji, gdy pewne formuły rozkładane są za pomocą przyjętych reguł **w kilku** gałęziach budowanego drzewa. Spójrzmy na rozważaną, samą w sobie interesującą (?), regułę wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\,((Px \vee Qx) \rightarrow (Rx \wedge Sx))\\ \forall x\,((Rx \vee Sx) \rightarrow (Px \wedge Qx))\end{array}}{\forall x\,(Px \leftrightarrow Rx)}$$

Pokażemy, że jest ona niezawodna, tj. że wniosek wynika logicznie z przesłanek, czyli że nie istnieje interpretacja, w której wszystkie przesłanki byłyby prawdziwe, a wniosek fałszywy. Musimy więc pokazać, że wykluczona jest sytuacja, gdy wszystkie przesłanki oraz zaprzeczenie wniosku są prawdziwe. Budujemy drzewo semantyczne, w którego pniu znajdują się właśnie wszystkie przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:



Uwaga: powyższe drzewo nie jest narysowane w sposób estetyczny. Poprawienie estetyki powoduje wystawanie rysunku poza kartkę.

Pokazaliśmy to, co zamierzaliśmy pokazać: że rozważana reguła jest niezawodna; wniosek wynika logicznie z przesłanek. Nadto, zwróćmy uwagę, że kroki 7 oraz 12 wykonywane były na formułach należących do pnia drzewa. W konsekwencji, należało stosować tę samą numerację dla formuł otrzymanych w wyniku poczynienia tych kroków, we wszystkich gałęziach drzewa, na których pojawiały się stosowne formuły. Inaczej rzecz się miała z krokami:

- $8.^{\neg\rightarrow}$ i $10.^{\neg\rightarrow}$

- $9.^{\wedge}$ i $11.^{\wedge}$.

Krok $8.^{\neg\rightarrow}$, chociaż stosowany do takiej samej formuły, jak krok $10.^{\neg\rightarrow}$ (a mianowicie do formuły $\neg(Ra \vee Sa)$), był jednak czyniony na ***innej*** gałęzi drzewa niż krok $10.^{\neg\rightarrow}$! W konsekwencji, kroki te otrzymywały inne numery. Podobnie rzecz się miała z krokami $9.^{\wedge}$ i $11.^{\wedge}$. Oba stosowane były do takiej samej formuły (a mianowicie do $Pa \wedge Qa$), lecz na ***różnych*** gałęziach drzewa.

Jeśli komuś potrzebne jest — jak, powiedzmy, Watykanowi ekumenizm — wypełnienie ludzką, Humanistyczną treścią powyższych schludnych, estetycznych formułek, to może zinterpretować predykaty P, Q, R, S np. jako, odpowiednio: *Polak, katolik, tolerancyjny, patriota* i zadumać się nad otrzymanym (dedukcyjnym!) wnioskowaniem.

Uwaga na marginesie, dla Czytelniczek, które obcowały już z rachunkiem zbiorów. W rozważanej regule wnioskowania wystąpiły wyłącznie predykaty jednoargumentowe. Tak więc reguła ta „mówi" coś o stosunkach między zakresami nazw — a zatem dotyczy także zależności między zbiorami. Czytelniczki oswojone z algebrą zbiorów łatwo zauważą, że reguła powyższa przyjmuje w notacji odnoszącej się do rachunku zbiorów postać następującą:

$$\begin{array}{c} P \cup Q \subseteq R \cap S \\ R \cup S \subseteq P \cap Q \\ \hline P = R \end{array}$$

(P, Q, R, S są tu zmiennymi nazwowymi (odnoszącymi się do zbiorów), $\subseteq$ denotuje relację inkluzji (zawierania), a $=$ jest predykatem identyczności). Kusi, aby narysować stosowne diagramy Venna pozwalające rozstrzygać, czy zachodzi w tym wypadku wynikanie logiczne, prawda? Ale cóż, są cztery zmienne, diagram byłby więc może nieco zagmatwany (16 obszarów!). Nadto, kusi niepotrzebnie, bo skoro już ustaliliśmy, iż wynikanie logiczne zachodzi, to odwołać tego nie można,[1] a potwierdzać — szkoda czasu. *Roma locuta, causa finita*, jak zwykło się mawiać na zakończenie każdej (wykrytej) afery w kręgach hierarchii katolickiej.[2] Skoro już jednak wdepnęliśmy na teren rachunku zbiorów, to spróbujmy odnieść stąd jakieś korzyści. Jeśli pamiętamy, że przekrój dowolnych dwóch zbiorów zawiera się w ich sumie (w szczególności: $R \cap S \subseteq R \cup S$) i połączymy tę informację z przesłankami rozważanej reguły, to otrzymamy następujące trzy formuły:

$$\begin{array}{c} P \cup Q \subseteq R \cap S \\ R \cap S \subseteq R \cup S \\ R \cup S \subseteq P \cap Q \end{array}$$

Jeśli nie umknęła z naszej pamięci wiedza, iż relacja inkluzji jest przechodnia, to przytomnie wyprowadzimy z powyższych formuł wniosek: $P \cup Q \subseteq P \cap Q$. Ponieważ, jak już wspomnieliśmy, przekrój dwóch zbiorów zawiera się w ich sumie (tj. w tym przypadku $P \cap Q \subseteq P \cup Q$), więc z zachodzenia tych dwóch inkluzji wynika, na mocy zasady ekstensjonalności, iż $P = Q$ (jeśli każdy element zbioru P jest elementem zbioru Q oraz każdy element zbioru Q jest elementem zbioru P, to zbiory te mają dokładnie te same elementy, a więc na mocy zasady ekstensjonalności, są identyczne).

Bystre Czytelniczki[3] zauważą z pewnością pewne symetrie składniowe w formułach rozważanej reguły.[4] Bez trudu dokonają więc odkrycia, że także reguła wnioskowania:

$$\begin{array}{c} \forall x\ ((Px \vee Qx) \rightarrow (Rx \wedge Sx)) \\ \forall x\ ((Rx \vee Sx) \rightarrow (Px \wedge Qx)) \\ \hline \forall x\ (Qx \leftrightarrow Sx) \end{array}$$

jest niezawodna. Czytelniczki nieufne mogą narysować stosowne drzewo semantyczne i sprawdzić, że wszystkie gałęzie tego drzewa (w którego pniu umieszczamy przesłanki reguły oraz zaprzeczony wniosek) są zamknięte. Trochę żmudna to pokuta, ale zawsze lepsza niż żadna. Czytelniczki wahające się[5] między zaufaniem do bystrości własnych skojarzeń a (pochwały godną!) nieufnością wobec własnych intuicji mogą dokonać jednoczesnej zamiany: P na S (i S na P) oraz Q na R (i R na Q) w regule od której rozpoczęliśmy ten przykład i skorzystać z praw przemienności koniunkcji i alternatywy oraz z faktu, że predykat identyczności denotuje relację symetryczną, a na koniec zmienić kolejność przesłanek; w efekcie otrzymają właśnie powyżej wypisaną regułę.[6] W symbolice rachunku zbiorów reguła ta przyjmie postać:

---

[1] Z wynikaniem logicznym rzecz się ma tak samo jak z prowadzeniem się: *raz ladacznica, zawsze ladacznica*.

[2] Przesadziliśmy. *Najlepiej koi sumienie pasterzy naszych milczenie.* W dodatku, ta głupia rymowanka jest zamierzona, podobnie jak pułapka wieloznaczności, nie wspominając o koszmarnych asocjacjach medialnych.

[3] Pustosłowny komplement. Zakładamy przyjaźnie, że wszystkie nasze Czytelniczki są bystre.

[4] Nie zgadzamy się z porzekadłem, iż *symetria to estetyka idioty*.

[5] *Panie doktorze, cierpię na chroniczny brak zdecydowania. Ale pewna tego nie jestem. . .*

[6] Czytelniczki *metabystre* z pewnością rozmyślają w tym momencie lektury nad prawomocnością tych operacji. Całkiem słusznie.

$$\frac{\begin{array}{c} P \cup Q \subseteq R \cap S \\ R \cup S \subseteq P \cap Q \end{array}}{Q = S}$$

Wierzymy, że Czytelniczki, idąc tym tropem (i pamiętając o przechodniości inkluzji oraz o fakcie, że iloczyn dwóch zbiorów zawiera się w ich sumie) dokonają też odkrycia, iż z przesłanek reguły wypisanej bezpośrednio powyżej wynika, że $R = S$. Do wniosku tego dojść można również innymi szlakami, np.: ustaliliśmy, że z przesłanek badanej na początku reguły wynika $P = Q$ oraz $Q = S$; stąd i z przechodniości identyczności mamy $P = S$, a to ostatnie łącznie z ustalonym już $P = R$, symetrycznością i przechodniością identyczności daje $R = S$. Jest już zatem widoczne, że z przesłanek badanej na początku reguły (i z własności identyczności) wynika identyczność zakresowa wszystkich czterech występujących w tej regule predykatów. *Koniec uwagi na marginesie.*

I tak oto udało się zgrabnie połączyć polski patriotyzm z katolicką tolerancją! Poprawia to samopoczucie, jeśli nie nam osobiście, to może chociaż Watykanowi.

9.4.2.

(a) Pracę nad tym przykładem podzielimy na kilka etapów.

(a).1. Budujemy drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:

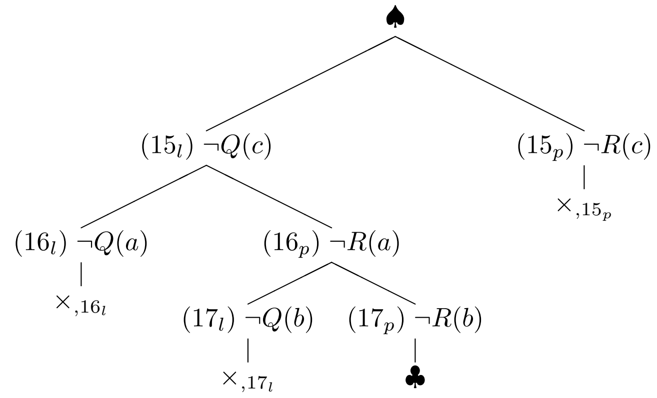
$$
\begin{array}{c}
(0.1)\ \exists x \exists y\ (((P(x) \wedge P(y)) \wedge x \neq y) \wedge (Q(x) \wedge Q(y)))\ ^{1.\checkmark a} \\
| \\
(0.2)\ \forall x\ (Q(x) \to \neg R(x))\ ^{4.\star a\ \ 5.\star b\ \ 6.\star c} \\
| \\
(0.3)\ \exists x\ (P(x) \wedge R(x))\ ^{3.\checkmark c} \\
| \\
(0.4)\ \neg(\exists x\ ((P(x) \wedge R(x)) \wedge \forall y\ (y \neq x \to (P(y) \to \neg R(y)))))\ ^{7.\star a\ \ 7.\star b\ \ 9.\star c} \\
| \\
(1)\ \exists y\ (((P(a) \wedge P(y)) \wedge a \neq y) \wedge (Q(a) \wedge Q(y)))\ ^{2.\checkmark b} \\
| \\
(2)\ ((P(a) \wedge P(b)) \wedge a \neq b) \wedge (Q(a) \wedge Q(b))\ ^{10.\wedge} \\
| \\
(3)\ P(c) \wedge R(c)\ ^{14.\wedge} \\
| \\
(4)\ Q(a) \to \neg R(a) \\
| \\
(5)\ Q(b) \to \neg R(b) \\
| \\
(6)\ Q(c) \to \neg R(c) \\
| \\
(7)\ \neg((P(a) \wedge R(a)) \wedge \forall y\ (y \neq a \to (P(y) \to \neg R(y)))) \\
| \\
(8)\ \neg((P(b) \wedge R(b)) \wedge \forall y\ (y \neq b \to (P(y) \to \neg R(y)))) \\
| \\
(9)\ \neg((P(c) \wedge R(c)) \wedge \forall y\ (y \neq c \to (P(y) \to \neg R(y)))) \\
| \\
(10_g)\ (P(a) \wedge P(b)) \wedge a \neq b\ ^{11.\wedge} \\
| \\
(10_d)\ Q(a) \wedge Q(b)\ ^{13.\wedge} \\
| \\
(11_g)\ P(a) \wedge P(b)\ ^{12.\wedge} \\
| \\
(11_d)\ a \neq b \\
| \\
(12_g)\ P(a) \\
| \\
(12_d)\ P(b) \\
| \\
(13_g)\ Q(a) \\
| \\
(13_d)\ Q(b) \\
| \\
(14_g)\ P(c) \\
| \\
(14_d)\ R(c) \\
| \\
\spadesuit
\end{array}
$$

Wykonaliśmy wszystkie kroki nie powodujące rozgałęzień dla stałych a, b oraz c. Informacje zawarte w powyższej gałęzi otwartej (zakończonej liściem ♠) zbieramy w poniższej tabeli:

♠	P	Q	R
a	+	+	?
b	+	+	?
c	+	?	+

Nadto, mamy: $a \neq b$.

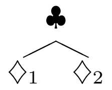
(a).2. Teraz zastosujemy regułę $R(\to)$ do formuł (6), (4) oraz (5) (w tej kolejności):

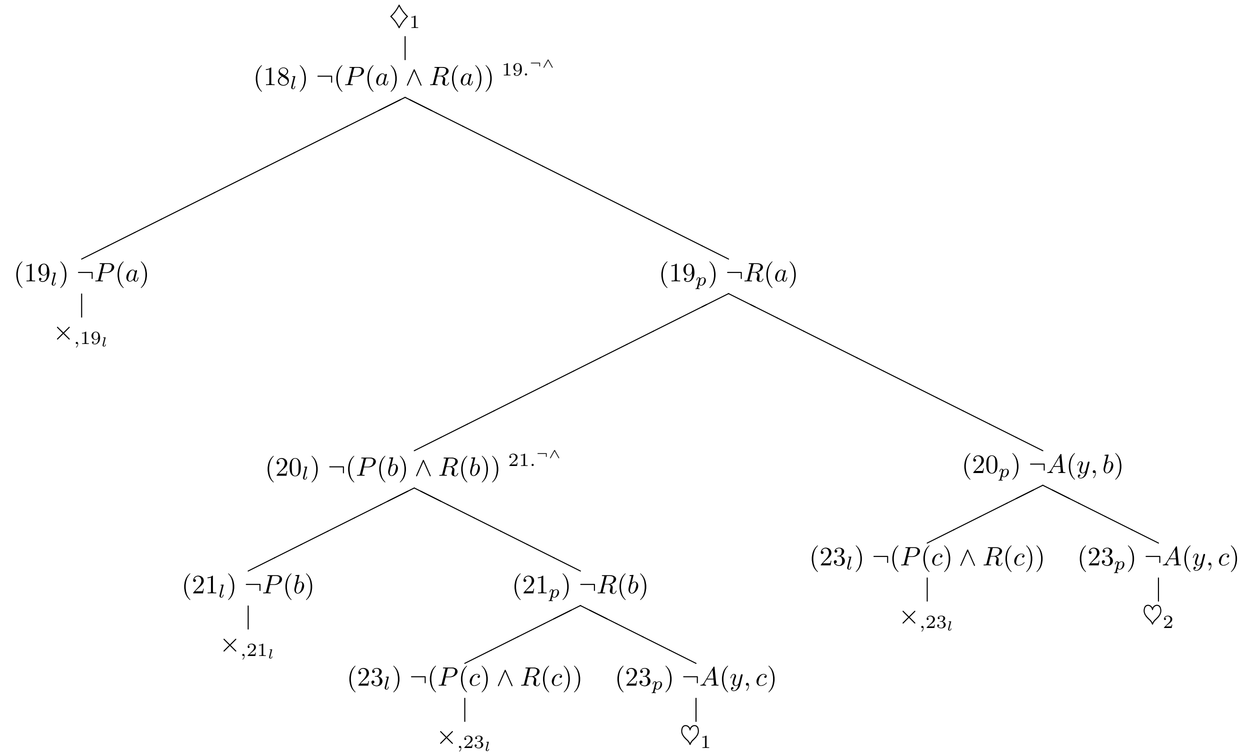


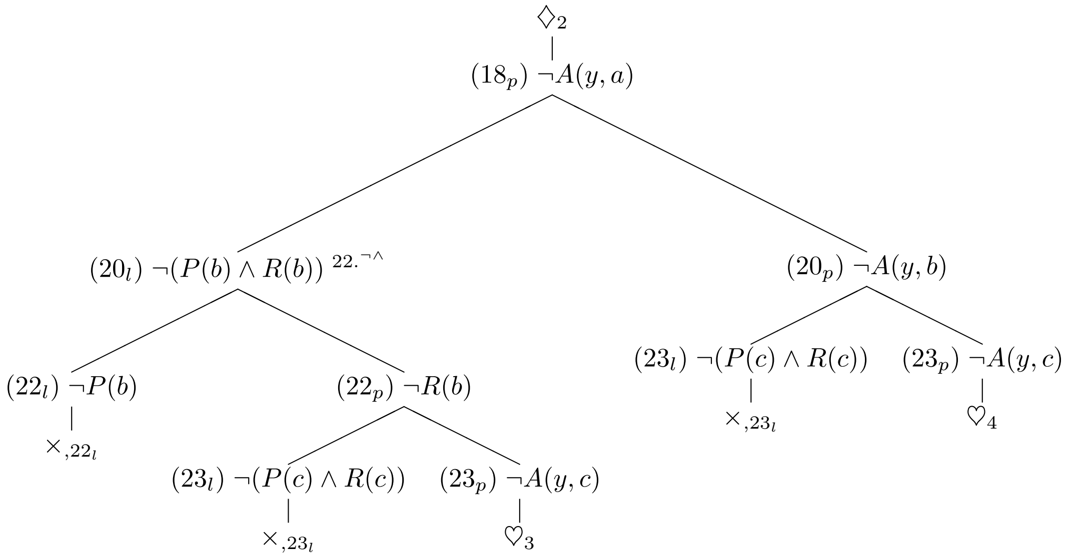
Informacje zawarte w powyższej gałęzi otwartej (zakończonej liściem $\clubsuit$) zbieramy w poniższej tabeli:

$\clubsuit$	P	Q	R
a	+	+	−
b	+	+	−
c	+	−	+

(a).3. Teraz zastosujemy regułę $R(\rightarrow)$ do formuł (7), (8) oraz (9) (w tej kolejności). Przyjmiemy też oznaczenie $A(y, \alpha)$ dla formuły: $\forall y\ (y \neq \alpha \rightarrow (P(y) \rightarrow \neg R(y)))$. Ze względów typograficznych podzielimy też drzewo o korzeniu $\clubsuit$ na dwa drzewa, o korzeniach $\diamondsuit_1$ oraz $\diamondsuit_2$.

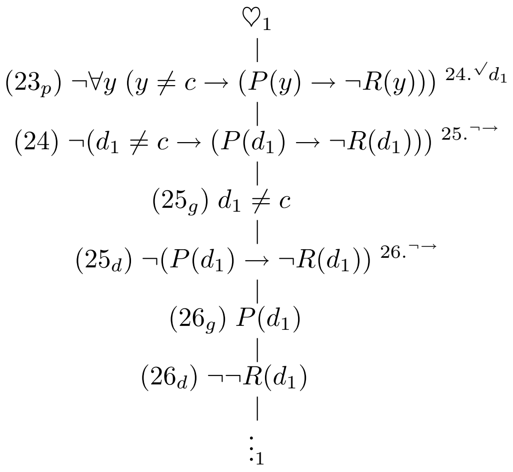






Gałęzie otwarte tego drzewa (bez uwzględnienia na razie formuł $A(y, \alpha)$) nie dostarczają żadnej nowej informacji dotyczącej a, b oraz c, która nie byłaby już zawarta w tabeli ♣. Pozostała do uwzględnienia jedynie formuła $A(y, \alpha)$ dla przypadków:

- $A(y, c)$
- $A(y, c) \wedge A(y, b)$
- $A(y, a) \wedge A(y, c)$
- $A(y, a) \wedge (A(y, b) \wedge A(y, c))$



Teraz trzeba rozwinąć wszystkie zdania generalne (tj. zdania (0.2) oraz (0.4)) względem stałej d_1. W konsekwencji, otrzymamy nowe zdania postaci $A(y, \alpha)$, które z kolei zmuszą do wprowadzenia dalszych nowych stałych, itd.

$$\heartsuit_2$$
$$|$$
$$(23_p)\ \neg\forall y\ (y \neq c \rightarrow (P(y) \rightarrow \neg R(y)))\ ^{28.\checkmark d_2}$$
$$|$$
$$(28)\ \neg(d_2 \neq c \rightarrow (P(d_2) \rightarrow \neg R(d_2)))\ ^{29.\neg\rightarrow}$$
$$|$$
$$(29_g)\ d_2 \neq c$$
$$|$$
$$(29_d)\ \neg(P(d_2) \rightarrow \neg R(d_2))\ ^{30.\neg\rightarrow}$$
$$|$$
$$(30_g)\ P(d_2)$$
$$|$$
$$(30_d)\ \neg\neg R(d_2)$$
$$|$$
$$(20_p)\ \neg\forall y\ (y \neq b \rightarrow (P(y) \rightarrow \neg R(y)))\ ^{31.\checkmark d_3}$$
$$|$$
$$(31)\ \neg(d_3 \neq b \rightarrow (P(d_3) \rightarrow \neg R(d_3)))\ ^{32.\neg\rightarrow}$$
$$|$$
$$(32_g)\ d_3 \neq b$$
$$|$$
$$(32_d)\ \neg(P(d_3) \rightarrow \neg R(d_3))\ ^{33.\neg\rightarrow}$$
$$|$$
$$(33_g)\ P(d_3)$$
$$|$$
$$(33_d)\ \neg\neg R(d_3)$$
$$|$$
$$\vdots_2$$

Teraz trzeba rozwinąć wszystkie zdania generalne (tj. zdania (0.2) oraz (0.4)) względem stałych d_2 oraz d_3. W konsekwencji, otrzymamy nowe zdania postaci $A(y, \alpha)$, które z kolei zmuszą do wprowadzenia dalszych nowych stałych, itd.

Dochodzą informacje: $d_2 \neq c$ oraz $d_3 \neq b$. Pamiętajmy, że nie ma znaczenia, jakie są zależności między d_1 a d_2 oraz d_3.

$$\heartsuit_3$$
$$|$$
$$(18_p)\ \neg\forall y\ (y \neq a \rightarrow (P(y) \rightarrow \neg R(y)))\ ^{34.\checkmark d_4}$$
$$|$$
$$(34)\ \neg(d_4 \neq a \rightarrow (P(d_4) \rightarrow \neg R(d_4)))\ ^{35.\neg\rightarrow}$$
$$|$$
$$(35_g)\ d_2 \neq a$$
$$|$$
$$(35_d)\ \neg(P(d_4) \rightarrow \neg R(d_4))\ ^{36.\neg\rightarrow}$$
$$|$$
$$(36_g)\ P(d_4)$$
$$|$$
$$(36_d)\ \neg\neg R(d_4)$$
$$|$$
$$(23_p)\ \neg\forall y\ (y \neq b \rightarrow (P(y) \rightarrow \neg R(y)))\ ^{37.\checkmark d_5}$$
$$|$$
$$(37)\ \neg(d_5 \neq c \rightarrow (P(d_5) \rightarrow \neg R(d_5)))\ ^{38.\neg\rightarrow}$$
$$|$$
$$(38_g)\ d_5 \neq c$$
$$|$$
$$(38_d)\ \neg(P(d_5) \rightarrow \neg R(d_5))\ ^{39.\neg\rightarrow}$$
$$|$$
$$(39_g)\ P(d_5)$$
$$|$$
$$(39_d)\ \neg\neg R(d_5)$$
$$|$$
$$\vdots_3$$

Teraz trzeba rozwinąć wszystkie zdania generalne (tj. zdania (0.2) oraz (0.4)) względem stałych d_4 oraz d_5. W konsekwencji, otrzymamy nowe zdania postaci $A(y, \alpha)$, które z kolei zmuszą do wprowadzenia dalszych nowych stałych, itd.

Dochodzą informacje: $d_4 \neq a$ oraz $d_5 \neq c$. Pamiętajmy, że nie ma znaczenia, jakie są zależności między d_1 a d_4 oraz d_5, a także między d_2 i d_3 a d_4 a d_5.

$$\begin{array}{c}
\heartsuit_4 \\
| \\
(18_p)\ \neg\forall y\ (y \neq a \to (P(y) \to \neg R(y)))\ ^{40.\checkmark d_6} \\
| \\
(40)\ \neg(d_4 \neq a \to (P(d_6) \to \neg R(d_6)))\ ^{41.\neg\to} \\
| \\
(41_g)\ d_6 \neq a \\
| \\
(41_d)\ \neg(P(d_6) \to \neg R(d_6))\ ^{42.\neg\to} \\
| \\
(42_g)\ P(d_6) \\
| \\
(42_d)\ \neg\neg R(d_6) \\
| \\
(20_p)\ \neg\forall y\ (y \neq b \to (P(y) \to \neg R(y)))\ ^{43.\checkmark d_7} \\
| \\
(43)\ \neg(d_7 \neq b \to (P(d_7) \to \neg R(d_7)))\ ^{44.\neg\to} \\
| \\
(44_g)\ d_7 \neq b \\
| \\
(44_d)\ \neg(P(d_7) \to \neg R(d_7))\ ^{45.\neg\to} \\
| \\
(45_g)\ P(d_7) \\
| \\
(45_d)\ \neg\neg R(d_7) \\
| \\
(23_p)\ \neg\forall y\ (y \neq b \to (P(y) \to \neg R(y)))\ ^{46.\checkmark d_8} \\
| \\
(46)\ \neg(d_8 \neq c \to (P(d_8) \to \neg R(d_8)))\ ^{47.\neg\to} \\
| \\
(47_g)\ d_8 \neq c \\
| \\
(47_d)\ \neg(P(d_8) \to \neg R(d_8))\ ^{48.\neg\to} \\
| \\
(48_g)\ P(d_8) \\
| \\
(48_d)\ \neg\neg R(d_8) \\
| \\
\vdots_4
\end{array}$$

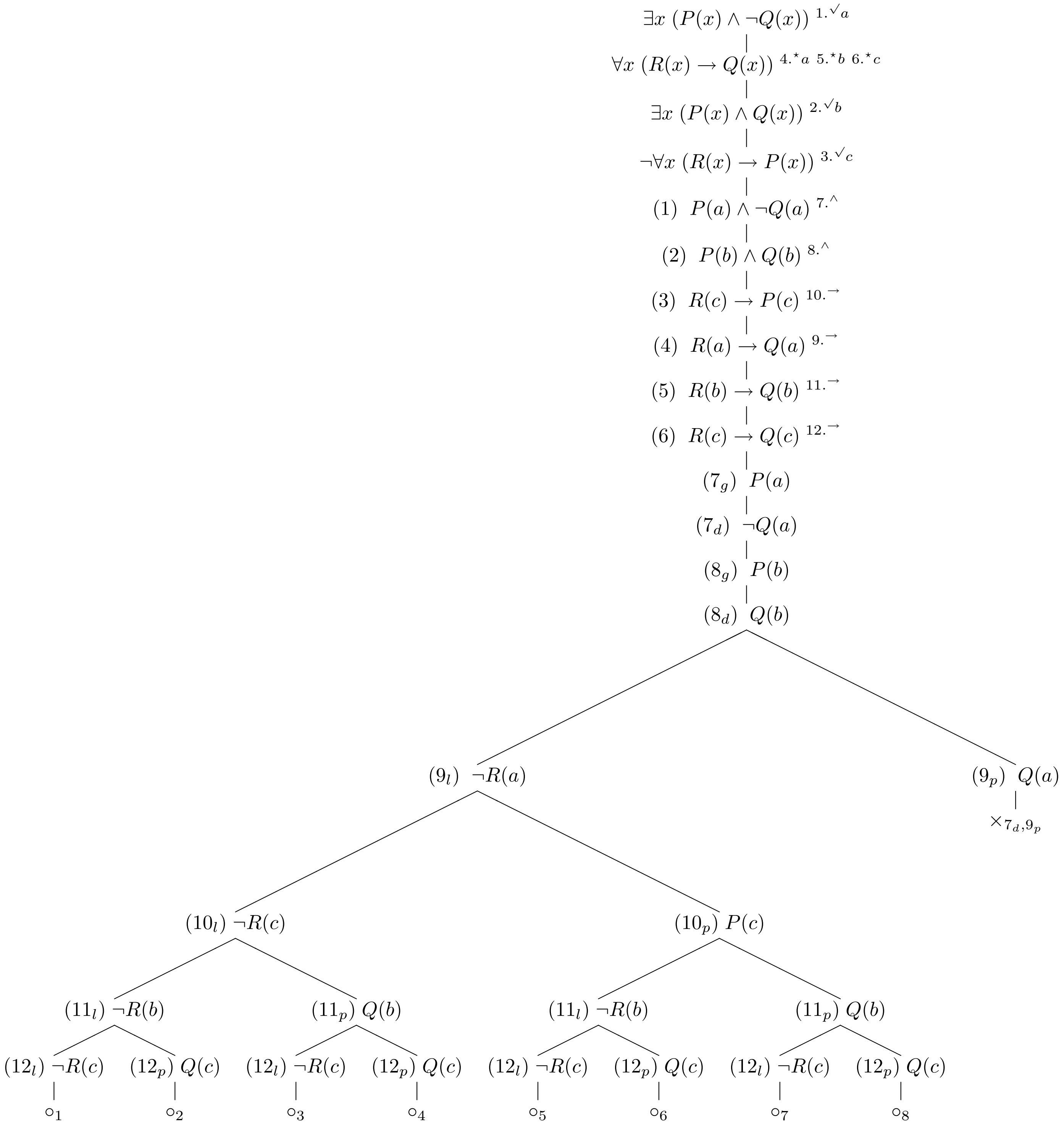
Teraz trzeba rozwinąć wszystkie zdania generalne (tj. zdania (0.2) oraz (0.4)) względem stałych d_7 oraz d_8. W konsekwencji, otrzymamy nowe zdania postaci $A(y, \alpha)$, które z kolei zmuszą do wprowadzenia dalszych nowych stałych, itd.

Dochodzą informacje: $d_6 \neq a$, $d_7 \neq b$ oraz $d_8 \neq c$. Pamiętajmy, że nie ma znaczenia, jakie są zależności między d_7 i d_8 a:

- d_1
- d_2 i d_3
- d_4 i d_5.

(a).4. Widać więc, że rozważane drzewo jest nieskończone. Reguła zawodna.

(b) Budujemy drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:



Drzewo ma gałęzie otwarte. Reguła zawodna. Przykłady interpretacji, w których prawdziwe są przesłanki oraz fałszywy wniosek:

$\circ_1$	P	Q	R
a	+	−	−
b	+	+	−
c	?	?	−

$\circ_2$	P	Q	R
a	+	−	−
b	+	+	−
c	?	+	−

$\circ_3$	P	Q	R
a	+	−	−
b	+	+	?
c	?	?	−

$\circ_4$	P	Q	R
a	+	−	−
b	+	+	?
c	?	+	−

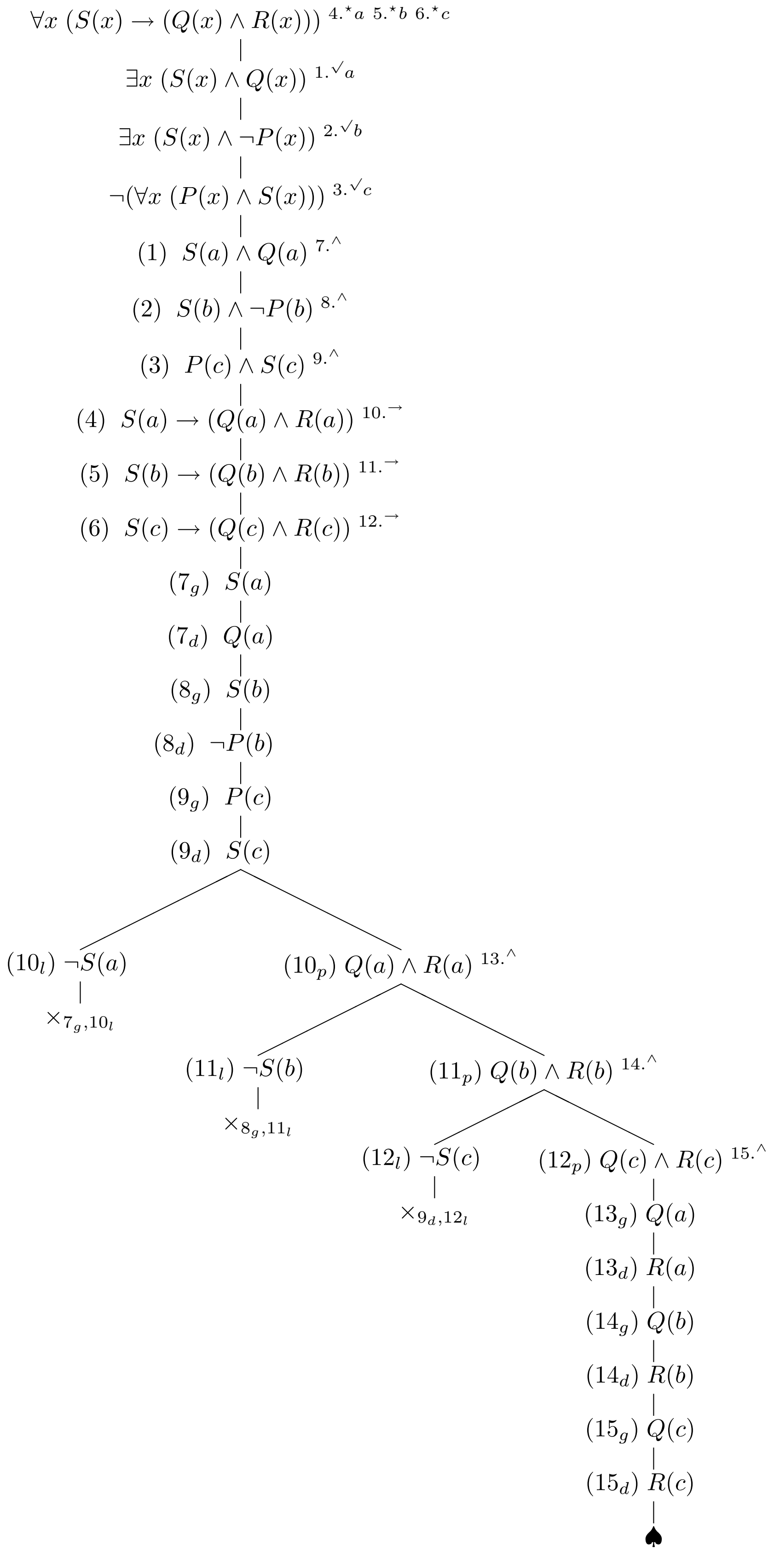
$\circ_5$	P	Q	R
a	+	−	−
b	+	+	−
c	+	?	−

$\circ_6$	P	Q	R
a	+	−	−
b	+	+	−
c	+	+	?

$\circ_7$	P	Q	R
a	+	−	−
b	+	+	?
c	+	?	−

$\circ_8$	P	Q	R
a	+	−	−
b	+	+	?
c	+	+	?

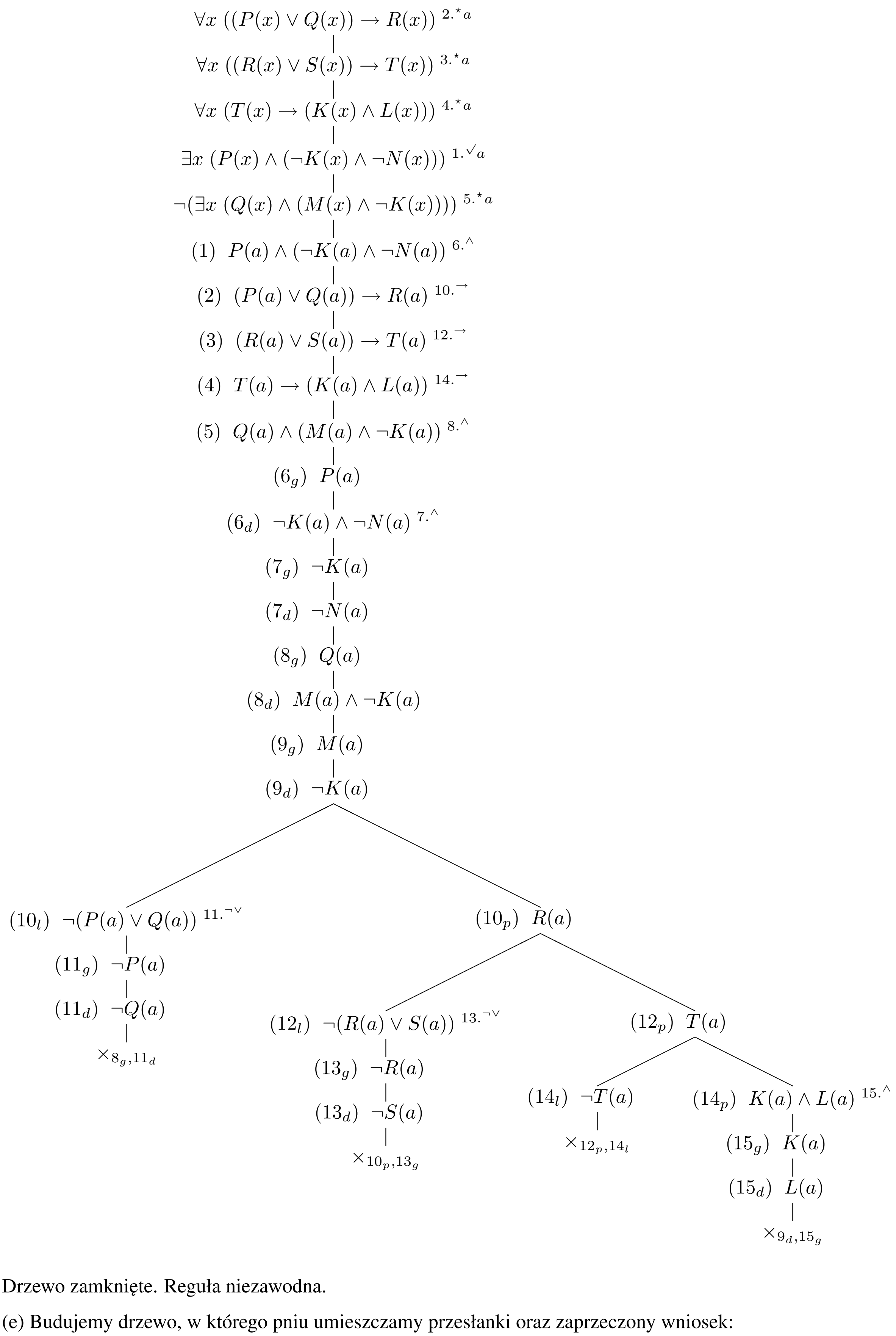
(c) Budujemy drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:



Drzewo ma gałąź otwartą. Reguła zawodna. Oto interpretacja, w której przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy:

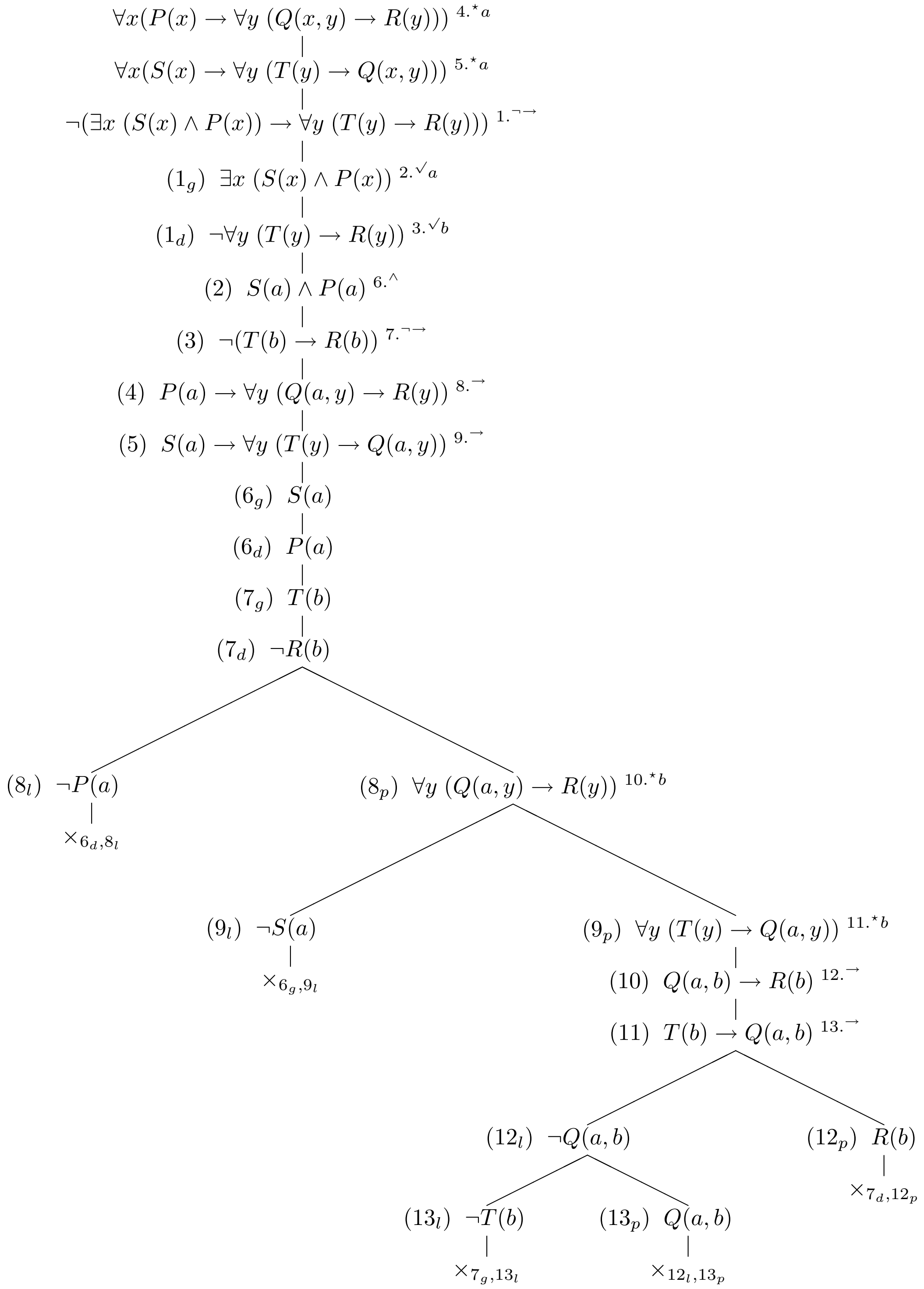
♠	P	Q	R	S
a	?	+	+	+
b	–	+	+	+
c	+	+	+	+

(d) Budujemy drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:



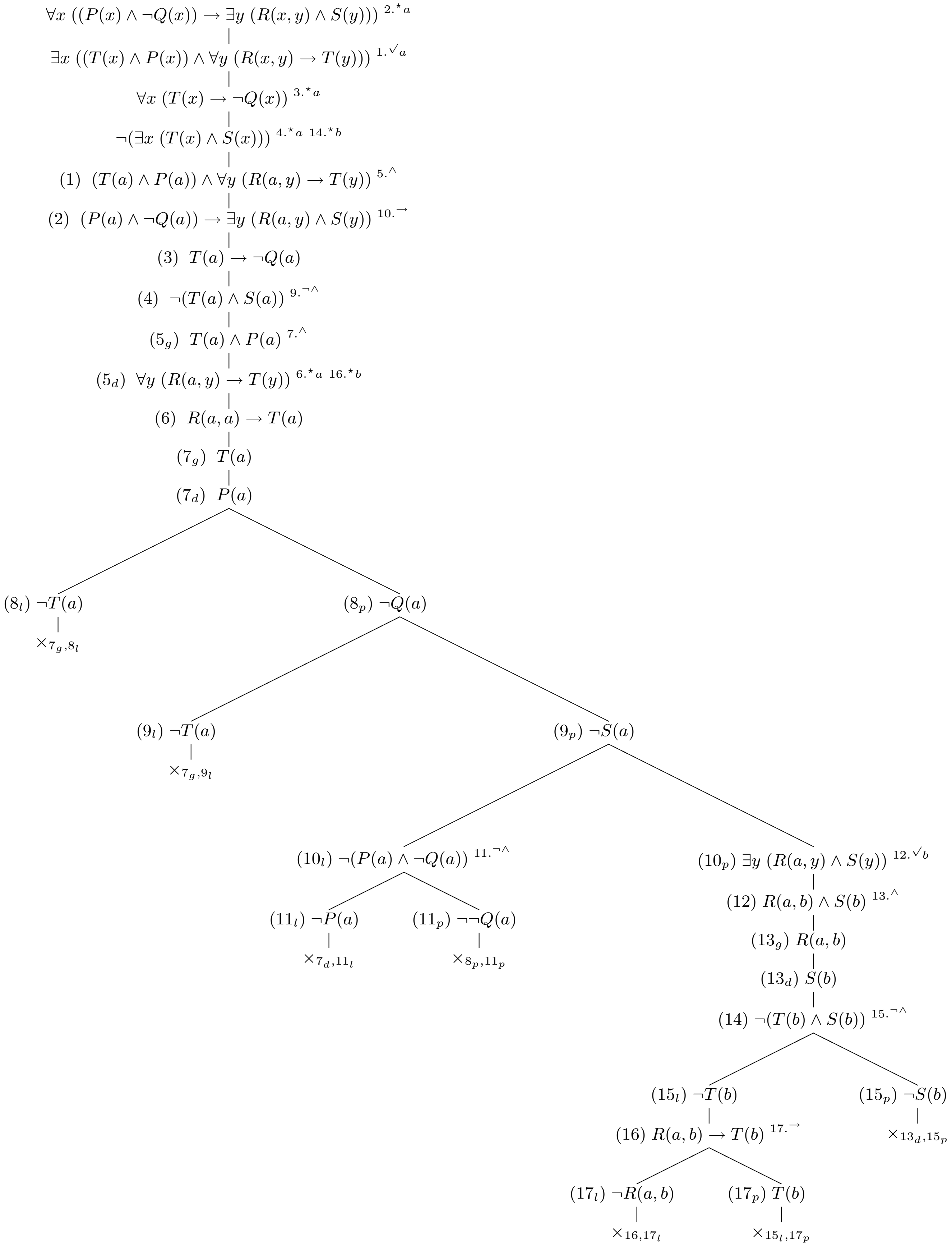
Drzewo zamknięte. Reguła niezawodna.

(e) Budujemy drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:



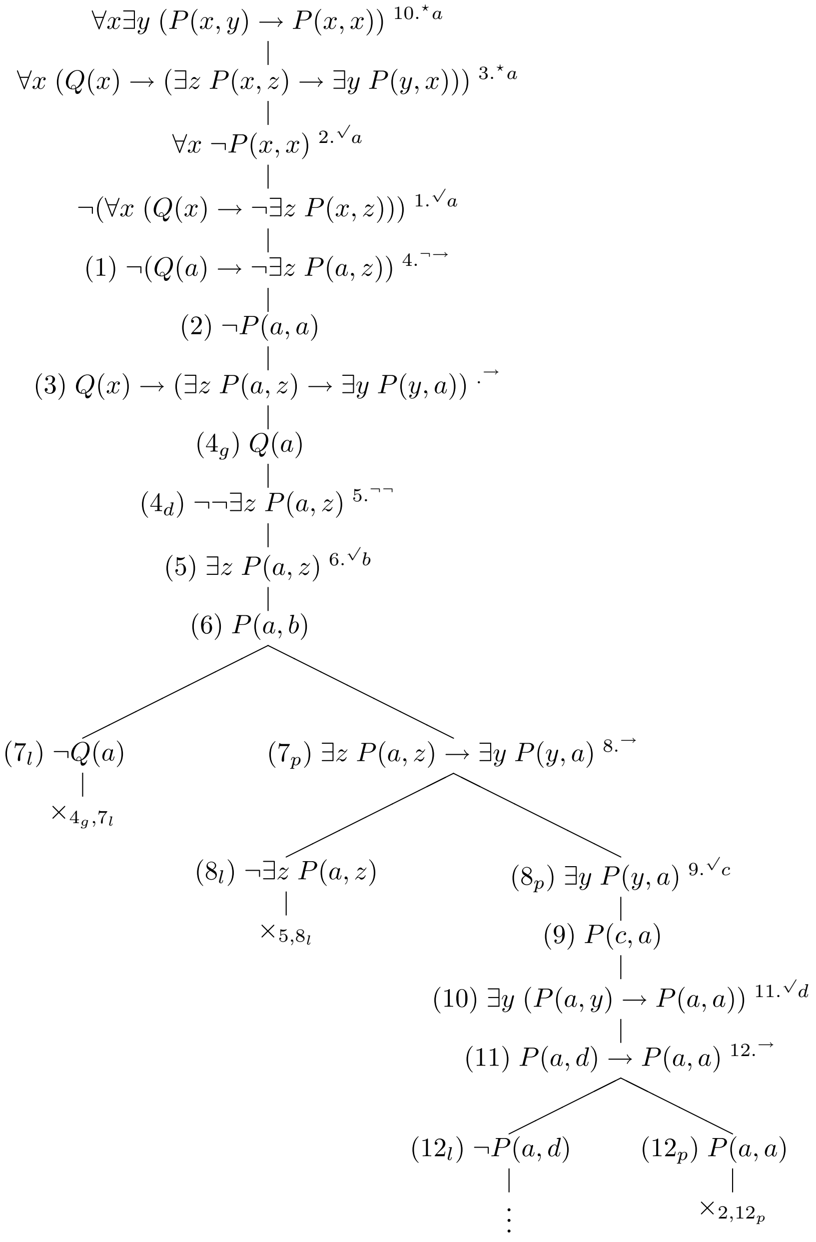
Drzewo zamknięte. Niezawodna reguła wnioskowania. Zauważmy, że dla zamknięcia wszystkich gałęzi nie było potrzebne zastosowanie wszystkich użyć reguły $R(\forall)$.

(f) Budujemy drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:



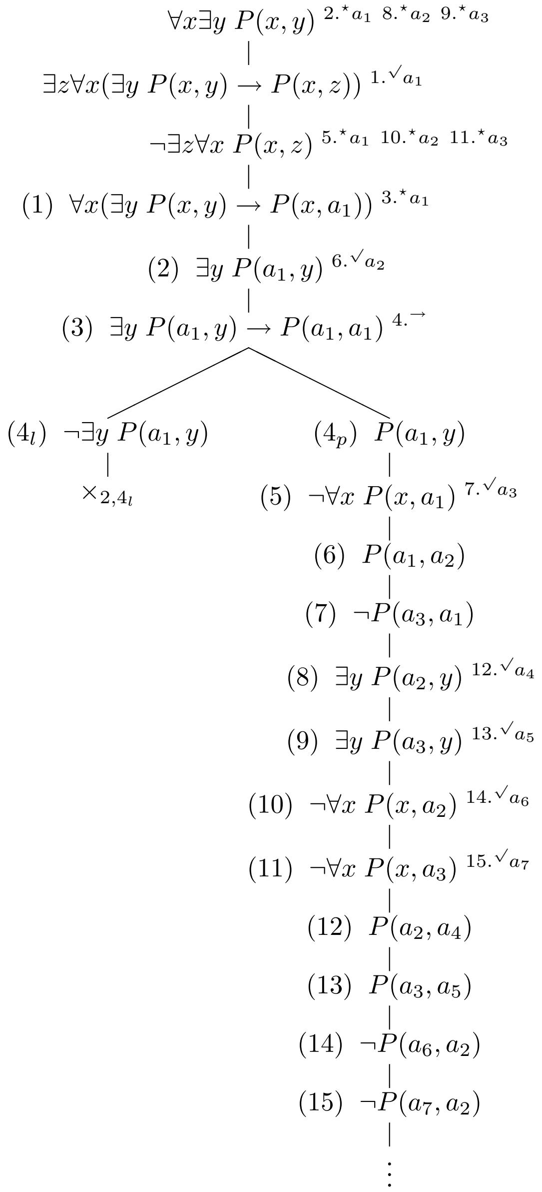
Drzewo zamknięte. Reguła niezawodna.

(g) Budujemy drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:



Drzewo jest nieskończone. Zauważmy, że z pierwszych dwóch przesłanek otrzymujemy ciągle nowe zdania egzystencjalne, nakazujące wprowadzanie nowych stałych indywiduowych. Reguła jest zawodna.

(h) Budujemy drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:



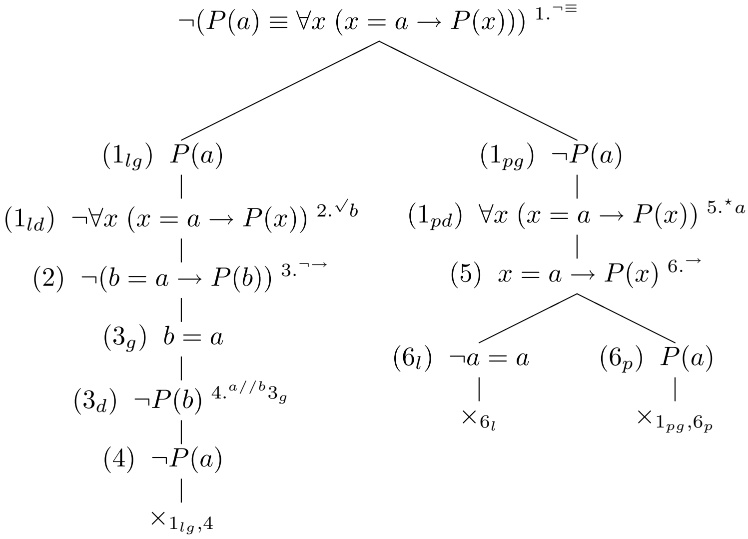
Widać, że to drzewo ma gałąź nieskończoną. Stosowanie reguł $R(\forall)$ oraz $R(\neg\exists)$ do formuł w pniu drzewa generuje stale nowe zdania egzystencjalne, które z kolei (na mocy reguł $R(\exists)$ oraz $R(\neg\forall)$ każą wprowadzić kolejne nowe stałe indywiduowe.

Tak więc, badana reguła jest zawodna. Wniosek nie wynika logicznie z przesłanek. Jako ćwiczenie pozostawiamy czytelniczkom próbę scharakteryzowania modelu, w którym prawdziwe są przesłanki, a fałszywy wniosek badanej reguły.

III.9.5. KRP z identycznością

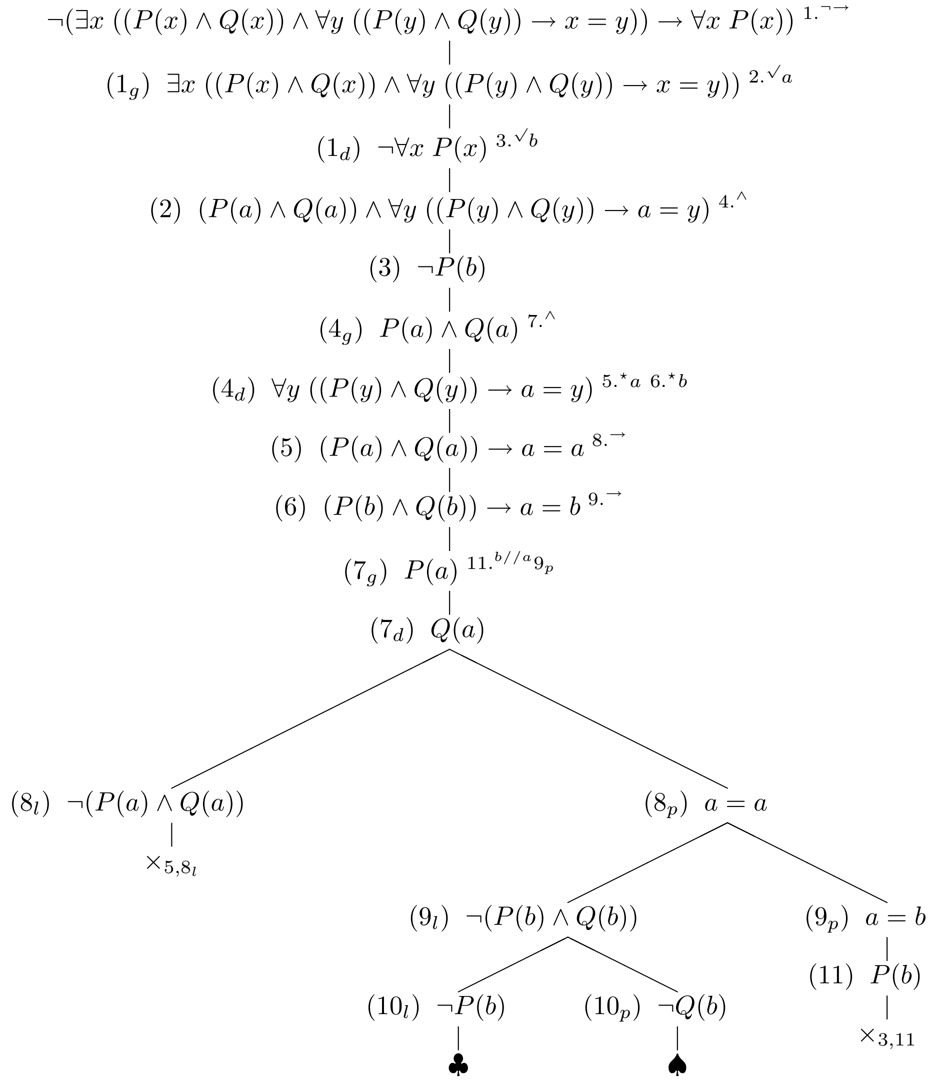
9.5.1.

(a) $P(a) \equiv \forall x\ (x = a \rightarrow P(x))$.



Drzewo zamknięte. Badana formuła jest tautologią KRP.

(b) $\exists x\, ((P(x) \wedge Q(x)) \wedge \forall y\, ((P(y) \wedge Q(y)) \rightarrow x = y)) \rightarrow \forall x\, P(x)$.



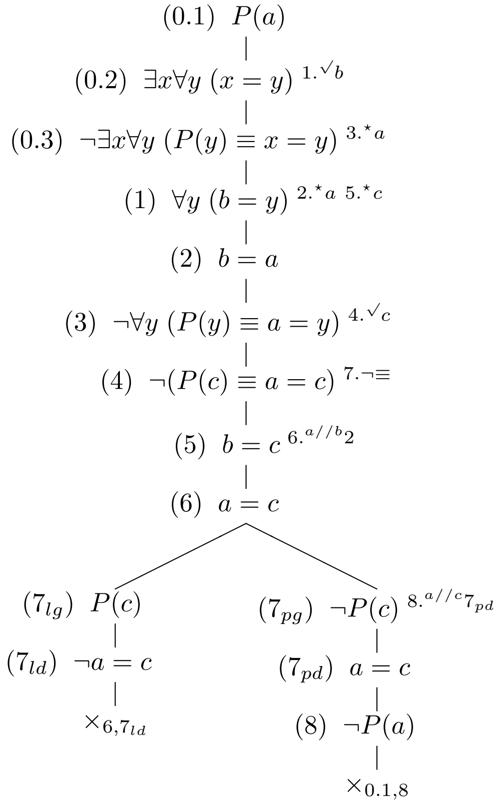
Drzewo ma gałęzie otwarte. Badana formuła nie jest tautologią. Oto przykłady interpretacji, w których zaprzeczenie badanej formuły jest prawdziwe:

♣	P	Q
a	+	+
b	–	?

♠	P	Q
a	+	+
b	–	–

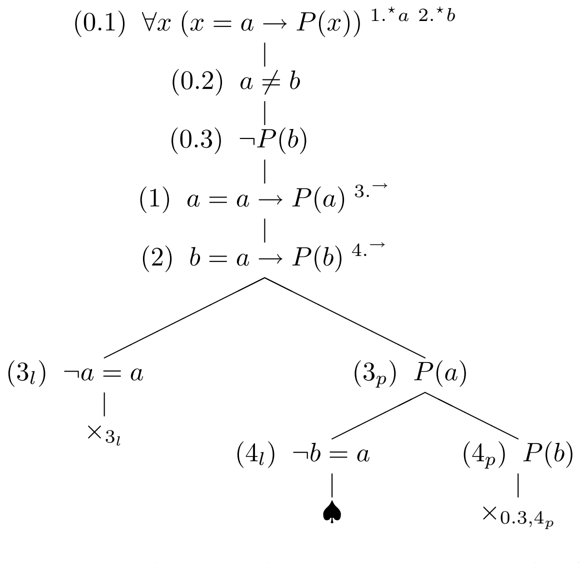
9.5.2.

(a) Budujemy drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:



Drzewo zamknięte. Reguła niezawodna. Zauważmy, że gdyby ***nie*** zastosować reguły dotyczącej identyczności, to otrzymalibyśmy drzewo ***nieskończone***. Ćwiczenie dodatkowe: zastąp znak identyczności $=$ przez predykat dwuargumentowy Q i zbuduj początkowy fragment drzewa nieskończonego.

(b) Budujemy drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczony wniosek:



Drzewo ma gałąź otwartą. Reguła zawodna. Interpretacja, w której prawdziwe są przesłanki, a fałszywy wniosek:

♠	P
a	+
b	–

=	a	b
a	+	–
b	–	+

III.9.6. KRP z symbolami funkcyjnymi

9.6.1. Przypomnijmy aksjomaty specyficzne Arytmetyki Robinsona:

A_1: $\forall x \forall y\ (x \neq y \rightarrow \sigma(x) \neq \sigma(y))$

A_2: $\forall x\ (\bigcirc \neq \sigma(x))$

A_3: $\forall x\ (x \neq \bigcirc \rightarrow \exists y\ (x = \sigma(y)))$

A_4: $\forall x\ (\oplus(x, \bigcirc) = x)$

A_5: $\forall x \forall y\ (\oplus(x, \sigma(y)) = \sigma(\oplus(x, y)))$

A_6: $\forall x\ (\otimes(x, \bigcirc) = \bigcirc)$

A_7: $\forall x \forall y\ (\otimes(x, \sigma(y)) = \oplus(\otimes(x, y), x))$.

Dowody punktów (a) i (b) przedstawiamy poniżej.
(a) $\oplus(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\bigcirc)$

0.1.	$\forall x\ (\oplus(x, \bigcirc) = x)$	aksjomat A_4
0.2.	$\forall x \forall y\ (\oplus(x, \sigma(y)) = \sigma(\oplus(x, y)))$	aksjomat A_5
0.3.	$\neg(\oplus(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\bigcirc))$	z.d.n.
1.	$\oplus(\bigcirc, \bigcirc) = \bigcirc$	0.1., $R(\forall)$ dla $\bigcirc$
2.	$\forall y\ (\oplus(\bigcirc, \sigma(y)) = \sigma(\oplus(\bigcirc, y)))$	0.2., $R(\forall)$ dla $\bigcirc$
3.	$\oplus(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\oplus(\bigcirc, \bigcirc)))$	2, $R(\forall)$ dla $\bigcirc$
4.	$\oplus(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\bigcirc)$	1,3, $R(=)$
5.	$\times_{0.3.,4}$	SPRZECZNOŚĆ.

(b) $\otimes(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\bigcirc)$

0.1.	$\forall x\ (\oplus(x, \bigcirc) = x)$	aksjomat A_4
0.2.	$\forall x\ (\otimes(x, \bigcirc) = \bigcirc)$	aksjomat A_6
0.3.	$\forall x \forall y\ (\otimes(x, \sigma(y)) = \oplus(\otimes(x, y), x))$	aksjomat A_7
0.4.	$\neg(\otimes(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\bigcirc))$	z.d.n.
1.	$\otimes(\bigcirc, \bigcirc) = \bigcirc$	0.2., $R(\forall)$ dla $\bigcirc$
2.	$\forall y\ (\otimes(\bigcirc, \sigma(y)) = \oplus(\otimes(\bigcirc, y), \bigcirc))$	0.3., $R(\forall)$ dla $\bigcirc$
3.	$\otimes(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \oplus(\otimes(\bigcirc, \bigcirc), \bigcirc)$	2, $R(\forall)$ dla $\bigcirc$
4.	$\otimes(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \oplus(\bigcirc, \bigcirc)$	1,3, $R(=)$
5.	$\oplus(\bigcirc, \bigcirc) = \bigcirc$	0.1., $R(\forall)$ dla $\bigcirc$
6.	$\otimes(\bigcirc, \sigma(\bigcirc)) = \sigma(\bigcirc)$	4,5, $R(=)$
7.	$\times_{0.4.,6}$	SPRZECZNOŚĆ.

III.9.7. Unifikacja

9.7.1.
(1) Niech $\sigma_0 = \epsilon$, $S_0 = S$.
(2) Ponieważ S_0 nie jest zbiorem jednoelementowym, więc znajdujemy zbiór niezgodności D_0 dla S_0.
Mamy $D_0 = \{f(a), y\}$.
(3) $\sigma_1 = \sigma_0\{y \mapsto f(a)\} = \{y \mapsto f(a)\}$, $S_1 = S_0\{y \mapsto f(a)\} = \{Q(f(a), g(x)), Q(f(a), f(a))\}$.
(4) S_1 nie jest zbiorem jednoelementowym i mamy $D_1 = \{g(x), f(a)\}$. Ponieważ termy występujące w D_1 różnią się głównymi symbolami funkcyjnymi, więc D_1 nie jest uzgadnialny.
(5) S nie jest uzgadnialny.

9.7.2.
(1) Niech $\sigma_0 = \epsilon$, $S_0 = S$.
(2) $D_0 = \{a, z\}$.
(3) $\sigma_1 = \sigma_0\{z \mapsto a\} = \{z \mapsto a\}$.
(4) $D_1 = \{x, f(a)\}$.

(5) $\sigma_2 = \sigma_1\{x \mapsto f(a)\} = \{z \mapsto a, x \mapsto f(a)\}$.
$S_2 = S_1\{x \mapsto f(a)\} = \{P(a, f(a), f(g(y))), P(a, f(a), f(u))$.
(6) $D_2 = \{g(y), u\}$.
(7) $\sigma_3 = \sigma_2\{u \mapsto g(y)\} = \{z \mapsto a, x \mapsto f(a), u \mapsto g(y)\}$.
$S_3 = S_2\{u \mapsto g(y)\} = \{P(a, f(a), f(g(y)))\}$.
Ponieważ S_3 jest zbiorem jednoelementowym, więc S jest uzgadnialny.
Najbardziej ogólnym unifikatorem dla S jest $\sigma_3 = \{z \mapsto a, x \mapsto f(a), u \mapsto g(y)\}$.

III.9.8. Rezolucja

9.8.1. Pokażemy, że klauzula reprezentująca formułę $\exists x\ (S(x) \wedge R(x))$ jest rezolucyjnie wyprowadzalna z klauzul reprezentujących formuły:

- $\forall x\ (P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x)))$
- $\exists x\ (P(x) \wedge S(x))$.

Wystarczy pokazać, że koniunkcja formuł:

- (1) $\forall x\ (P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x)))$
- (2) $\exists x\ (P(x) \wedge S(x))$
- (3) $\neg\exists x\ (S(x) \wedge R(x))$

nie jest spełnialna w żadnej interpretacji, co w przekładzie na terminologię dowodów rezolucyjnych (pamiętając o trafności i pełności metody rezolucji) oznacza, że ze zbioru klauzul reprezentujących powyższe formuły można rezolucyjnie wywieść klauzulę pustą $\Box$.

Sprowadzamy matryce formuł (1), (2) i (3) do skolemowej koniunkcyjnej postaci normalnej:

- (1') $(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg P(x) \vee R(x))$
- (2') $P(a) \wedge S(a)$
- (3') $\neg S(x) \vee \neg R(x)$.

Uwaga: stała a jest tutaj zeroargumentowym symbolem funkcyjnym, wprowadzanym w procesie skolemizacji formuły (2). Budujemy dowód rezolucyjny:

1.	$\neg P(x) \vee Q(x)$	z (1')
2.	$\neg P(x) \vee R(x)$	z (1')
3.	$P(a)$	z (2')
4.	$S(a)$	z (2')
5.	$\neg S(x) \vee \neg R(x)$	z (3')
6.	$R(a)$	rezolwenta 2. i 3.
7.	$\neg R(a)$	rezolwenta 4. i 5.
8.	$\Box$	rezolwenta 6. i 7.

9.8.2. Pokażemy, że formuła $\exists x\ (P(x) \wedge R(x))$ wynika logicznie z formuł:

- $\forall x((Q(x) \wedge \neg T(x)) \rightarrow \exists y\ (S(x, y) \wedge R(y)))$
- $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x) \wedge \forall y\ (S(x, y) \rightarrow P(y)))$
- $\forall x\ (P(x) \rightarrow \neg T(x))$.

Wystarczy pokazać, że koniunkcja formuł:

- (1) $\forall x((Q(x) \wedge \neg T(x)) \rightarrow \exists y\ (S(x, y) \wedge R(y)))$
- (2) $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x) \wedge \forall y\ (S(x, y) \rightarrow P(y)))$

- (3) $\forall x\ (P(x) \rightarrow \neg T(x))$
- (4) $\neg \exists x\ (P(x) \wedge R(x))$

nie jest spełnialna w żadnej interpretacji, co w przekładzie na terminologię dowodów rezolucyjnych (pamiętając o trafności i pełności metody rezolucji) oznacza, że ze zbioru klauzul reprezentujących powyższe formuły można rezolucyjnie wywieść klauzulę pustą $\Box$.

Sprowadzamy matryce formuł (1), (2), (3) i (4) do skolemowej koniunkcyjnej postaci normalnej:

- (1') $(\neg Q(x) \vee T(x) \vee S(x, f(x))) \wedge (\neg Q(x) \vee T(x) \vee R(f(x)))$
- (2') $P(a) \wedge Q(a) \wedge (\neg S(a, y) \vee P(y))$
- (3') $\neg P(x) \vee \neg T(x)$
- (4') $\neg P(x) \vee \neg R(x)$

Uwaga: stała a jest tutaj zeroargumentowym symbolem funkcyjnym, wprowadzanym w procesie skolemizacji formuły (2). Nowy symbol funkcyjny f jest jednoargumentowym symbolem funkcyjnym, wprowadzanym w procesie skolemizacji formuły (1).

Budujemy dowód rezolucyjny:

1.	$\neg Q(x) \vee T(x) \vee S(x, f(x))$	z (1')
2.	$\neg Q(x) \vee T(x) \vee R(f(x))$	z (1')
3.	$P(a)$	z (2')
4.	$Q(a)$	z (2')
5.	$\neg S(a, y) \vee P(y)$	z (2')
6.	$\neg P(x) \vee \neg T(x)$	z (3')
7.	$\neg P(x) \vee \neg R(x)$	z (4')
8.	$\neg T(a)$	rezolwenta 3. i 6.
9.	$T(a) \vee R(f(a))$	rezolwenta 2. i 4.
10.	$R(f(a))$	rezolwenta 8. i 9.
11.	$T(a) \vee S(a, f(a))$	rezolwenta 1. i 4.
12.	$S(a, f(a))$	rezolwenta 8. i 11.
13.	$P(f(a))$	rezolwenta 5. i 12.
14.	$\neg R(f(a))$	rezolwenta 7. i 13.
15.	$\Box$	rezolwenta 10. i 14.

Wiele zadań dotyczących drzew semantycznych w KRP znaleźć można np. w następujących podręcznikach:

Fitting, M. 1990. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving.* Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo Hong Kong.

Georgacarakos, G.N., Smith, R. 1979. *Elementary Formal Logic.* McGraw-Hill Book Company.

Hodges, W. 1977. *Logic.* Pelican Books.

Howson, C. 1997. *Logic with trees.* Routledge, London and New York.

Jeffrey, R. 1991. *Formal Logic: Its Scope and Limits.* McGraw-Hill, New York.

* * *

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl