Logika

Michał Lipnicki

Zakład Logiki Stosowanej UAM

11 stycznia 2013

KRP — wstęp

Rozważmy wnioskowanie:

Każdy człowiek jest śmiertelny.
Sokrates jest człowiekiem.

Zatem: Sokrates jest śmiertelny.

Wnioskowanie jest niezawodne, jednak język rachunku zdań jest za mało precyzyjny, by przy jego pomocy uzasadnić ową niezawodność.

Język KRP

Klasyczny rachunek predykatów (lub kwantyfikatorów), jest rozszerzeniem Klasycznego rachunku Zdań. Można go rozpatrywać jako logiczną rekonstrukcję wypowiedzi językowych, w której obok znanych spójników prawdziwościowych wyróżnia się:

- **kwantyfikatory** (operatory zdaniotwórcze):
  - generalny $\forall$;
  - egzystencjalny $\exists$;
- **predykaty** (funktory zdaniotwórcze o argumentach nazwowych) — $P_1^1, P_2^1, \ldots, P_k^1; P_1^n, P_2^n, \ldots, P_k^n$;
- **zmienne indywiduowe** — $x_1, x_2, \ldots, x_n$;
- **stałe indywiduowe**— $a_1, a_2, \ldots, a_n$;
- **znaki pomocnicze** — (), .

Język KRP

Dane wyrażenie jest formułą zdaniową atomową wtedy i tylko wtedy, gdy ma ona postać $P_k^n(t_1, \ldots, t_n)$, gdzie $t_1, \ldots, t_n$ są dowolnymi termami.

1. Każda formuła zdaniowa atomowa jest formułą zdaniową.
2. Jeżeli α jest dowolną formułą zdaniową, to wyrażenia $\neg(\alpha), \forall(\alpha), \exists(\alpha)$ są również formułami zdaniowymi.
3. Jeżeli α i β są dowolnymi formułami zdaniowymi, to wyrażenia: $(\alpha) \wedge (\beta)$, $(\alpha) \vee (\beta)$, $(\alpha) \rightarrow (\beta)$, $(\alpha) \equiv (\beta)$ są formułami zdaniowymi.
4. Nie ma innych formuł zdaniowych języka KRP prócz tych, które można utworzyć wg (1) — (3).

Język KRP

Funkcją zdaniową nazywamy wyrażenia zawierające zmienne, z których po podstawieniu za te zmienne stałych otrzymujemy zdania.

Deskrypcje określone — złożone wyrażenia nazwowe, które denotują dokładnie jeden obiekt.

Zakresem zmiennej x_i nazywamy zbiór przedmiotów oznaczanych przez nazwy, które można za nią podstawić. Mówimy wówczas, że zmienna przebiega ten zbiór.

Dany przedmiot a_i z zakresu zmiennej x_i spełnia daną funkcję zdaniową $F(x_i)$ wtedy i tylko wtedy, gdy po podstawieniu jego nazwy za zmienną x_i w tej funkcji otrzymujemy zdanie prawdziwe $F(a_i)$.

Język KRP

Wyrażenie α w dowolnej formule zdaniowej postaci $\forall x_n(\alpha)$ oraz $\exists x_n(\alpha)$ nazywa się zasięgiem odpowiedniego kwantyfikatora.

Zmienną x_i występująca na danym miejscu w formule α jest na tym miejscu związana, jeżeli jest ona podpisana pod którymś z kwantyfikatorów.

Jeżeli zmienna x_i, występująca na danym miejscu w formule α, nie jest na tym miejscu związana, to mówimy, że jest ona na tym miejscu wolna w α.

Formuły zdaniowe nie zawierające żadnych zmiennych wolnych nazywamy zdaniami (języka KRP).

Język KRP — ćwiczenia

Napisz schematy poniższych zdań w języku KRP

- (1) *Stefan pije.*
- (2) *Stefan pije z Romanem.*
- (3) *Stefan pije i zakąsza.*
- (4) *Stefan pije lub Roman zakąsza.*
- (5) *Jeśli Stefan nie pije ale zakąsza, to znaczy że wróciła żona Stefana.*
- (6) *Najlepszy kumpel Stefana pije i nie zakąsza wtedy i tylko wtedy, gdy żona Stefana wróciła do męża.*
- (7) *Najlepsza przyjaciółka najstarszej córki żony Stefana z pierwszego małżeństwa spotyka się za stogiem siana z najmłodszym synem brata najlepszego kumpla Stefana.*

Ćwiczenia

Napisz schematy poniższych zdań w języku KRP

- (1) *Każdy Polak jest katolikiem.*
- (2) *Niektórzy Polacy są katolikami.*
- (3) *Niektórzy Polacy nie są katolikami.*
- (4) *Istnieje aktor, który spał ze wszystkimi swoimi fankami.*
- (5) *Każdy człowiek ma jakiś talent.*
- (6) *Nie każdy mężczyzna jest żonaty.*
- (7) *Żadna gwiazda popu nie zna twierdzenia Lindenbauma.*

Ćwiczenia

Napisz schematy poniższych zdań w języku KRP

- (1) *Każdy matematyk jest uczniem pewnego matematyka.*
- (2) *Pewien matematyk nie jest uczniem żadnego matematyka.*
- (3) *Pewien matematyk nie ma uczniów wśród matematyków.*
- (4) *Każdy jest przyjacielem wszystkich.*
- (5) *Istnieje książka, którą przeczytali wszyscy.*
- (6) *Nie każdy przystojny mężczyzna jest logikiem.*
- (7) *Pewna modelka zakochała się w sobie samej.*
- (8) *Joanna, lubi każdego mężczyznę, który ma Mercedesa.*

zdania 1 — 5 pochodzą z: B. Stanosz „ćwiczenia z logiki”.

Ćwiczenia

Wskaż zmienne wolne i zmienne związane formuł:

- (a) $\forall x(P(x,y) \rightarrow \exists y(Q(x) \wedge R(x,y)))$,
- (b) $\exists x(P(x) \wedge \forall z(Q(z) \rightarrow R(x,z)))$,
- (c) $\exists x(P(x) \wedge \forall x(Q(x) \rightarrow R(x,y)))$.

Powyższe zadanie pochodzi ze skryptu prof. J. Pogonowskiego.

Semantyka KRP

Pojęcie prawdy w KRP jest relatywizowane do konkretnej interpretacji przyjmowanej dla określonego języka. Prawdziwość wyrażenia zależy od tego, co oznaczają występujące w nim symbole.

Niech $\langle X, \mathcal{O}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \ldots, \mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \ldots, \mathcal{H} \rangle$ będzie dziedziną, gdzie X jest pewnym zbiorem, $\mathcal{O}$ — wyróżnionym elementem zbioru X, a $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \ldots, \mathcal{R}$ relacjami. Wówczas interpretacją $\Im_n$ nazwiemy każde przyporządkowanie:

- stałej indywiduowej a elementu $\mathcal{O}$;
- symbolom predykatywnym $P, Q, \ldots, R$ relacji $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \ldots, \mathcal{R}$;

Relacja spełniania

Wyrażenie $\alpha(x, y, \ldots, z)$, zawierające symbole predykatywne $P, Q, \ldots, R$ jest spełnione w dziedzinie $\langle X, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \ldots, \mathcal{R} \rangle$ przez elementy $a, b, \ldots, c$ przy interpretacji zgodnie z którą: symbole predykatywne $P, Q, \ldots, R$ są nazwami relacji $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \ldots, \mathcal{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy elementy $a, b, \ldots, c \in X$ razem z relacjami $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \ldots, \mathcal{R}$ tak się zachowują w zbiorze X, jak opisuje to zdanie $\alpha(x, y, \ldots, z)$.

(Powyższa formuła wyraża sens relacji spełniania w sposób intuicyjny. Nie jest to jej ścisła definicja.)

Jeżeli wyrażenie α nie zawiera zmiennych wolnych i jest spełnione w pewnej dziedzinie $\mathfrak{D}$, to wówczas możemy powiedzieć, że α jest prawdziwe w dziedzinie $\mathfrak{D}$.

W dalszej części mówimy skrótowo o zdaniach prawdziwych przy pewnej interpretacji $\Im_n$. Przy czym przez interpretację rozumiemy powiązanie języka z określoną dziedziną.

Interpretacja

Rozważmy formułę $Q(a) \wedge \forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$.

- Niech $\Im_1$ będzie interpretacją, gdzie X przebiega zbiór ludzi, natomiast:
  - stała indywiduowa a — oznacza Stefana,
  - predykat Q — oznacza własność bycia chciwym.
  - predykat P — oznacza własność bycia kapitalistą.
- Niech $\Im_2$ będzie interpretacją, gdzie X przebiega zbiór ludzi, natomiast:
  - stała indywiduowa (a) — oznacza Mariannę;
  - predykat Q — oznacza bycie kobietą;
  - predykat P — oznacza bycie matką.

Interpretacja

Rozważmy tą samą formułę $Q(a) \land \forall x[P(x) \to Q(x)]$.

- Niech $\Im_3$ będzie interpretacją, gdzie X przebiega zbiór języków etnicznych, natomiast:
  - stała indywiduowa a — oznacza język kaszubski;
  - predykat Q — oznacza bycie językiem urzędowym;
  - predykat P — oznacza bycie językiem narodowym.

Model

Modelem formuły KRP α nazywamy taką interpretację $\Im_n$, dla której formuła zdaniowa α jest prawdziwa. Interpretację $\Im_i$ nazwiemy kontrmodelem formuły KRP α, gdy α jest w niej fałszywa.

Modelem formuły $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$ jest interpretacja $\Im_1$, gdzie:

- X przebiega zbiór liczb;
- predykat P oznacza własność bycia podzielnym przez 4.
- predykat Q oznacza własność bycia liczbą parzystą;

Kontrmodelem formuły $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$ jest interpretacja $\Im_2$, gdzie:

- X przebiega zbiór polityków;
- predykat P oznacza własność bycia posłem;
- predykat Q oznacza własność bycia uczciwym.

Model

Modelem formuły $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$ jest interpretacja $\Im_1$, gdzie:

- X przebiega zbiór głosek;
- predykat P oznacza własność bycia spółgłoską dwuwargową.
- predykat Q oznacza własność bycia spółgłoską nosową;

Kontrmodelem formuły $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$ jest interpretacja $\Im_2$, gdzie:

- X przebiega zbiór głosek;
- predykat P oznacza własność bycia spółgłoską retrofleksyjną;
- predykat Q oznacza własność bycia spółgłoską drżącą.

Medele — ćwiczenia

Znajdź model oraz kontrmodel dla poniższych formuł:

- (1) $\exists x P(x)$;
- (2) $\neg\exists x(P(x) \wedge Q(x))$;
- (3) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$;
- (4) $\neg\forall x(P(x) \equiv Q(x))$;
- (5) $\exists x(R(x, x))$
- (6) $\forall x\forall y(R(x, y) \rightarrow R(y, x))$
- (7) $\forall x\exists y(P(x) \rightarrow R(x, y))$;
- (8) $\exists x\forall y(P(x) \wedge Q(y) \rightarrow R(x, y))$.

Prawda czy fałsz

Chcąc określić wartość logiczną formuły KRP korzystamy z pojęcia modelu.

Znalezienie przykładu pozwala stwierdzić prawdziwość zdania egzystencjalnego.

$$\exists x[P(x) \wedge \exists y(Q(y) \wedge R(x, y))].$$

Rozważmy interpretację $\Im$, gdzie:

- X przebiega zbiór języków etnicznych;
- P oznacza własność bycia językiem europejskim;
- Q oznacza własność bycia językiem słowiańskim;
- R oznacza relację posiadania poświadczonego wspólnego przodka.

Prawda czy fałsz

Znalezienie kontrprzykładu pozwala stwierdzić fałszywość zdania uniwersalnego.

Rozważmy interpretację $\Im$ taką samą, jak w poprzednim przykładzie dla formuły:

$$\forall x[P(x) \to \exists y(Q(y) \land R(x,y))].$$

Nie dysponujemy metodą rozstrzygania o fałszywości zdań egzystencjalnych oraz prawdziwości zdań uniwersalnych.

Prawda czy fałsz

Aby określić prawdziwość zdań, które powstały przez powiązanie ich skwantyfikowanych części spójnikami logicznymi, należy odwołać się do tabelek zero-jedynkowych dla odpowiedniego spójnika.

Aby pokazać pokazać fałszywość formuły (w interpretacji $\Im_n$):

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)),$$

musimy znaleźć kontrmodel, gdzie poprzednik implikacji będzie zdaniem prawdziwym, zaś następnik zdaniem fałszywym.
Kontrmodelem jest na przykład interpretacja $\Im_1$ gdzie:

- X przebiega zbiór głosek;
- P oznacza własność bycia dźwięczną;
- Q oznacza własność bycia bezdźwięczną.