Wstęp do Matematyki (dod. 3)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Rachunek relacji

Wprowadzenie

Zakładamy, że w szkole mówiono ci o relacjach i funkcjach. Przypomnimy wybrane prawa rachunku relacji.

- Symbol U oznacza brane pod uwagę *uniwersum rozważań*.
- Podane prawa zachodzą dla wszelkich zbiorów i relacji; należy więc je rozumieć jako poprzedzone stosownymi kwantyfikatorami ogólnymi.
- (Metajęzykowy) symbol $\Rightarrow$ zastępuje wyrażenie: „jeśli, to ”, a (metajęzykowy) symbol $\Leftrightarrow$ zastępuje wyrażenie: „wtedy i tylko wtedy, gdy”.

Używana notacja została przypomniana na pierwszych zajęciach ze Wstępu do Matematyki.

Wybrane prawa rachunku relacji

- Istnieją A, B i C takie, że:
  - $A \times B \neq B \times A$, (tj. działanie $\times$ nie jest przemienne).
  - $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$ (tj. działanie $\times$ nie jest łączne).
- Jeśli A, B, C i D są niepuste, to:
  - $A \subseteq B$ i $C \subseteq D \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times D$.
  - $A = B$ i $C = D \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times D$.
- $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.
- $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \times \bigcap\limits_{i \in I} B_i = \bigcap\limits_{i \in I} (A_i \times B_i)$.
- $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$.
- Jeśli $A, B \neq \emptyset$ i $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D$, to $A = B = C = D$.

Wybrane prawa rachunku relacji

- $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
- $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$.
- $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.
- $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.
- $A \times B = (A \times D) \cap (C \times B)$, gdzie $A \subseteq C$ i $B \subseteq D$.
- $U^2 - (A \times B) = [(U - A) \times U] \cup [U \times (U - B)]$.
- $\bigcup\limits_{k \in K} A_k \times \bigcup\limits_{t \in T} B_t = \bigcup\limits_{(k,t) \in K \times T} (A_k \times B_t)$.
- $\bigcap\limits_{k \in K} A_k \times \bigcap\limits_{t \in T} B_t = \bigcap\limits_{(k,t) \in K \times T} (A_k \times B_t)$.

Wybrane prawa rachunku relacji

Dla dowolnych relacji dwuargumentowych:

- $R \cup R = R \cap R = R$.
- $(R^{-1})^{-1} = R$.
- $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$.
- $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$.
- $-(R^{-1}) = (-R)^{-1}$.
- $(\bigcup\limits_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcup\limits_{i \in I} R_i^{-1}$.
- $(\bigcap\limits_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcap\limits_{i \in I} R_i^{-1}$.
- $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$.
- $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$.

Wybrane prawa rachunku relacji

- $(\bigcup_{i\in I} R_i) \circ Q = \bigcup_{i\in I}(R_i \circ Q)$.
- $Q \circ (\bigcup_{i\in I} R_i) = \bigcup_{i\in I}(Q \circ R_i)$.
- $Q \circ (\bigcap_{i\in I} R_i) \subseteq \bigcap_{i\in I}(Q \circ R_i)$.
- $(\bigcap_{i\in I} R_i) \circ Q \subseteq \bigcap_{i\in I}(R_i \circ Q)$.
- Jeśli $R_1 \subseteq R_2$, to:
  - $Q \circ R_1 \subseteq Q \circ R_2$
  - $R_1 \circ Q \subseteq R_2 \circ Q$
  - $R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$.

Wybrane prawa rachunku relacji

Dla dowolnej funkcji f:

- $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$.
- $f[\bigcup\limits_{i \in I} A_i] = \bigcup\limits_{i \in I} f[A_i]$.
- $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$.
- $f[\bigcap\limits_{i \in I} A_i] \subseteq \bigcap\limits_{i \in I} f[A_i]$.
- $f[A] - f[B] \subseteq f[A - B]$.
- Jeśli $A \subseteq B$, to $f[A)] \subseteq f[B]$.

Wybrane prawa rachunku relacji

Dla dowolnej funkcji f:

- $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$.
- $f^{-1}[\bigcup\limits_{i \in I} A_i] = \bigcup\limits_{i \in I} f^{-1}[A_i]$.
- $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$.
- $f^{-1}[\bigcap\limits_{i \in I} A_i] = \bigcap\limits_{i \in I} f^{-1}[A_i]$.
- $f^{-1}[A - B] = f^{-1}[A] - f^{-1}[B]$.
- Jeśli $A \subseteq B$, to $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.
- Jeśli $A \subseteq dom(f)$ i $B \subseteq rng(f)$, to:
  - $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$, $f[f^{-1}[B]] = B$, $f[A] \cap B = f[A \cap f^{-1}[B]]$.
  - $f[A] \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \cap f^{-1}[B] = \emptyset$.
  - $f[A] \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq f^{-1}[B]$.

Wybrane prawa rachunku relacji

- $\bigcup\limits_{i\in I}\bigcap\limits_{j\in J} A_{ij} = \bigcap\limits_{f\in J^I}\bigcup\limits_{i\in I} A_{i\,f(i)}$.
- $\bigcap\limits_{i\in I}\bigcup\limits_{j\in J} A_{ij} = \bigcup\limits_{f\in J^I}\bigcap\limits_{i\in I} A_{i\,f(i)}$.
- $A^I = \prod\limits_{i\in I} A_i$, gdzie $A_i = A$ dla wszystkich $i \in I$.
- Jeśli $A_i \subseteq X_i$, to:
  - $\prod\limits_{i\in I} A_i = \bigcap\limits_{i\in I}\prod\limits_{j\in J} A_{ij}$, gdzie $A_{ii} = A_i,\ A_{ij} = X_j$ dla $i \neq j$.
  - $\prod\limits_{i\in I} X_i - \prod\limits_{i\in I} A_i = \bigcup\limits_{i\in I}\prod\limits_{j\in I} B_{ij}$, gdzie $B_{ii} = X_i - A_i,\ B_{ij} = X_j$ dla $i \neq j$.
- $\bigcap\limits_{k\in K}\prod\limits_{t\in T} A_{kt} = \prod\limits_{t\in T}\bigcap\limits_{k\in K} A_{kt}$.

Wybrane prawa rachunku relacji

W prezentacji Ważne typy relacji podano niektóre prawa dotyczące:

- własności relacji,
- związków między własnościami relacji a operacjami na relacjach,
- wybranych własności relacji:
    - równoważności,
    - podobieństwa,
    - opozycji,
    - różnych typów porządków:
        - częściowych,
        - liniowych,
        - dyskretnych,
        - gęstych,
        - dobrych,
        - drzewowych.