Logika

Michał Lipnicki

Zakład Logiki Stosowanej UAM

22 maja 2011

System założeniowy KRP

System założeniowy KRZ, który rozważaliśmy w pierwszym semestrze można rozszerzyć do KRP przez dodadnie czterech reguł wnioskowania dla kwantyfikatorów.

Zapis $\alpha(x/t)$ oznacza formułę KRP, w której zmienna nazwowa x została zastąpiona termem t. **Pamiętajmy:**

- Nie możemy dokonywać podstawienia za zmienną związaną;
- Podstawianie musi być konsekwentne;
- Żadna zmienna wolna podstawianego termu nie może zostać związana w wyniku podstawienia.

Konsekwencja założeniowa

Tezami KRP nazywa się te formuły, które na gruncie systemu KRP posiadają dowód. Jeżeli formuła β jest tezą KRP, to symbolicznie zapisujemy: $\vdash_{KRP} \beta$

Niech $X = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ będzie skończonym zbiorem formuł KRP, a β formułą języka KRP. Zachodzi $X \vdash_{KRP} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy tezą systemu założeniowego jest formuła:

$$(\alpha_1 \to (\alpha_2 \to \ldots (\alpha_n \to \beta) \ldots))$$

Zgodnie z powyższym $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \vdash_{KRP} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dowód założeniowy β w oparciu o założenia $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ oraz przyjęte reguły wnioskowania.

Reguły wnioskowania

W systemie założeniowym KRP opieramy się na tych samych pojęciach, co w przypadku KRZ:

- dowód wprost i nie wprost;
- pierwotna i wtórna reguła wnioskowania;

Regułę $\Re$ nazywamy niezawodną wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego sekwentu $(X, \alpha) \in \Re$: $X \models_{krp} \alpha$.

Reguła o sekwencie (X, α) zachowuje własność bycia tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy: jeśli wszystkie elementy zbioru X są tautologiami KRP, to formuła α również jest tautologią.

Reguły wnioskowania

Reguła opuszczania kwantyfikatora uniwersalnego (O∀).

$$\frac{\forall x \alpha}{\alpha(x/t)}$$

Reguła dołączania kwantyfikatora uniwersalnego (D∀).

$$\frac{\alpha}{\forall x \alpha}$$

Uwaga: powyższa reguła może być stosowana tylko wtedy, gdy x nie jest zmienną wolną w założeniach dowodu.

Reguły wnioskowania

Reguła dołączania kwantyfikatora egzystencjalnego (D∃).

$$\frac{\alpha(x/t)}{\exists x\alpha}$$

Reguła opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego (O∃)

$$\frac{\exists x\alpha}{\alpha(x/t(x_1,\ldots,x_n))}$$

Gdzie $t(x_1,\ldots,x_n)$ jest stałą indywiduową zależną od wszystkich zmiennych wolnych formuły $\exists x\alpha$.

Uwaga: Przy każdym zastosowaniu reguły opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego RO∃ należy używać nowej stałej, nie występującej dotąd w dowodzie. Stała ta nie może ponadto wystąpić w dowodzonej tezie.

Reguły wnioskowania

Oto sposoby wykorzystania czterech powyższych reguł:

Reguła opuszczania kwantyfikatora uniwersalnego (O∀).

$$\frac{\forall x P(x)}{P(x)} \qquad \frac{\forall x P(x)}{P(y)} \qquad \frac{\forall x P(x)}{P(a)}$$

Reguła dołączania kwantyfikatora uniwersalnego (O∀).

$$\frac{P(x)}{\forall x P(x)}$$

Reguły wnioskowania

Reguła dołączania kwantyfikatora egzystencjalnego (D∃).

$$\frac{P(x)}{\exists x P(x)} \qquad \frac{P(y)}{\exists x P(x)} \qquad \frac{P(a)}{\exists x P(x)}$$

Reguła opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego (O∃).

$$\frac{\exists x Q(x)}{Q(a)} \qquad \frac{\exists x Q(x,y,z)}{Q(a_{y,z},y,z)} \qquad \frac{\exists x \forall y Q(x,y,z)}{\forall y Q(a_z,y,z)} \qquad \frac{\exists x \forall y \exists z Q(x,y,z)}{\forall y \exists z Q(a,y,z)}$$

Dowody założeniowe wprost

Dany jest pewien zbiór formuł KRP $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ zwanych założeniami oraz formuła β zwana wnioskiem. **Dowodem założeniowym wprost** wniosku β z założeń $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ jest ciąg formuł KRP spełniający następujące warunki:

- Pierwszymi formułami dowodu są jego założenia.
- Każda następna formuła jest albo wcześniej udowodnionym twierdzeniem, albo formułą otrzymaną z poprzedzających ją formuł przy użyciu dopuszczalnych reguł wnioskowania.
- Ostatnią formułą dowodu jest wniosek.

Dowody założeniowe wprost

Przeprowadzimy dowód wprost tezy KRP: $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x\ P(x) \to \forall x\ Q(x)$.

(1)	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	zał.
(2)	$\forall x\ P(x)$	zał.
(3)	$P(x) \to Q(x)$	O$\forall$ 1
(4)	$P(x)$	O$\forall$ 2
(5)	$Q(x)$	RO 3, 4
(6)	$\forall x\ Q(x)$	D$\forall$ 5

Dowody założeniowe wprost

Przeprowadzimy dowód wprost tezy KRP: $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists x\ P(x) \to \exists x\ Q(x)$.

(1)	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	zał.
(2)	$\exists x\ P(x)$	zał.
(3)	$P(a)$	O$\exists$ 2
(4)	$P(a) \to Q(a)$	O$\forall$ 1
(5)	$Q(a)$	RO 4, 3
(6)	$\exists x\ Q(x)$	D$\exists$ 5

Dowody założeniowe nie wprost

Dany jest pewien zbiór formuł KRP $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ zwanych założeniami oraz formuła KRP β zwana wnioskiem. **Dowodem założeniowym nie wprost** wniosku β z założeń $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ jest ciąg formuł logicznych spełniający następujące warunki:

- Pierwszymi formułami dowodu są jego założenia oraz założenie dowodu nie wprost w postaci negacji wniosku.
- Każda następna formuła jest albo wcześniej udowodnionym twierdzeniem, albo formułą otrzymaną z poprzedzających ją formuł przy użyciu dopuszczalnych reguł wnioskowania.
- Ostatnią formułą dowodu jest jakaś formuła sprzeczna z jedną z formuł ją poprzedzających.

Dowody założeniowe nie wprost

Przy okazji ćwiczenia dowodzenia metodą nie wprost wprowadzimy do naszego systemu założeniowego dwie reguły wtórne: (1) regułę negowania kwantyfikatora generalnego (N∀) oraz regułę negowania kwantyfikatora egzystencjalnego (N∃).

$$\text{N}\forall \qquad \frac{\neg\forall x\ \alpha}{\exists x \neg\alpha} \qquad\qquad \text{N}\exists \qquad \frac{\neg\exists x\ \alpha}{\forall x\ \neg\alpha}$$

Reguły negowania kwantyfikatorów

Aby wprowadzić obie reguły do systemu musimy udowodnić dwie równoważności:

(1) $\neg\forall x\ P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$,
(2) $\neg\exists x\ P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$.

Naszym celem będzie zatem dowiedzenie czterech implikacji:

- (1a) $\neg\forall x\ P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x)$,
- (1b) $\exists x \neg P(x) \rightarrow \neg\forall x\ P(x)$,
- (2a) $\neg\exists x\ P(x) \rightarrow \forall x \neg P(x)$,
- (2b) $\forall x \neg P(x) \rightarrow \neg\exists x\ P(x)$.

Reguły negowania kwantyfikatorów

Dowód (1a) oraz (1b):

(1a)	$\neg\forall x\ P(x)$	zał.
(2a)	$\neg\exists x\ \neg P(x)$	z.d.n.
(3a_1)	$\neg P(x)$	zał.dod.
(3a_2)	$\exists x\ \neg P(x)$	D$\exists$
(4a)	$\neg P(x) \rightarrow \exists x\ \neg P(x)$	3$a_1 \Rightarrow$ 3a_2
(5a)	$P(x)$	MT 4a, 2a
(6a)	$\forall x\ P(x)$	D$\forall$ 5
	sprzeczność	1a, 6a

(1b)	$\exists x\ \neg P(x)$	zał.
(2b)	$\neg\neg\forall x\ P(x)$	z.d.n.
(3b)	$\forall x\ P(x)$	NN 2b
(4b)	$\neg P(a)$	O$\exists$ 1b
(5b)	$P(a)$	O$\forall$ 3b
	sprzeczność	4b, 5b.

Ponieważ dowiedliśmy (1a) oraz (1b), zatem tezą jest $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$, czyli możemy wprowadzić do systemu regułę N$\forall$.

Reguły negowania kwantyfikatorów

Dowód (2a) oraz (2b):

(1a)	$\neg\exists x\ P(x)$	zał.
(2a)	$\neg\forall x\neg P(x)$	z.d.n.
(3a)	$\exists x\neg\neg P(x)$	N$\forall$ 2a
(4a)	$\neg\neg P(a)$	O$\exists$ 3a
(5a)	$P(a)$	NN 4a
(6a)	$\exists x\ P(x)$	D$\exists$ 5a
	sprzeczność	1a, 6a.

(1b)	$\forall x\neg P(x)$	zał.
(2b)	$\exists x\ P(x)$	z.d.n.
(3b)	$P(a)$	O$\exists$ 2b
(4b)	$\neg P(a)$	O$\forall$ 3b
	sprzeczność	3b, 4b

Ponieważ dowiedliśmy (2a) oraz (2b), zatem tezą jest $\neg\exists x P(x) \equiv \forall x\neg P(x)$, czyli możemy wprowadzić do systemu regułę N$\exists$.

Dodatkowe założenia dowodu

Technika dowodowa opierająca się na dodatkowych założeniach dowodu przebiega następująco:

- Czynimy w dowodzie dodatkowe założenie α
- Jeżeli z założenia α (oraz wcześniejszych kroków dowodu) możemy wyprowadzić formułę β, to do dowodu można włączyć formułę $\alpha \to \beta$
- Z kroków wyprowadzenia β z α **nie wolno** korzystać poza tym wyprowadzeniem.

Dodatkowe założenia dowodu

Dowiedziemy tezy: $(\forall x P(x) \to \alpha) \to \exists x(P(x) \to \alpha)$.

(1)	$(\forall x P(x) \to \alpha)$	zał.
(1.1)	$\neg\alpha$	zał. dod.
(1.2)	$\neg\forall x P(x)$	MT 1, 1.1
(1.3)	$\exists x \neg P(x)$	N$\forall$ 1.2
(1.4)	$\neg P(a)$	O$\exists$ 1.3
(2)	$\neg\alpha \to \neg P(a)$	1.1$\Rightarrow$1.4
(3)	$P(a) \to \alpha$	RK 2
(4)	$\exists x(P(x) \to \alpha)$	D$\exists$ 3

Wynikanie logiczne w KRP

Pokażemy, że z formuł: $\{\forall x(P(x) \wedge Q(x)), \forall x(P(x) \rightarrow R(x))\}$ wynika logicznie : $\exists x(R(x) \wedge Q(x))$. Procedura jest analogiczna jak w przypadku KRZ.

(1)	$(\forall x(P(x) \wedge Q(x))$	zał.
(2)	$(\forall x(P(x) \rightarrow R(x))$	zał.
(3)	$P(a) \wedge Q(a)$	O$\forall$ 1
(4)	$P(a)$	OK 3
(5)	$Q(a)$	OK 3
(6)	$P(a) \rightarrow R(a)$	O$\forall$ 2
(7)	$R(a)$	RO 6, 4
(8)	$R(a) \wedge Q(a)$	DK 7, 5
(9)	$\exists x(R(x) \wedge Q(x))$	D$\exists$ 8

Sprzeczne zbiory zdań

Pokażemy, że zbiór formuł:
$\{\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x(Q(x) \to \exists y R(x,y)), \exists x P(x), \forall x \forall y \neg R(x,y)\}$ jest sprzeczny.
Procedura jest analogiczna jak w przypadku KRZ.

(1)	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	zał.
(2)	$\forall x(Q(x) \to \exists y R(x,y))$	zał.
(3)	$\exists x P(x)$	zał.
(4)	$\forall x \forall y \neg R(x,y)$	zał.
(5)	$P(a)$	O$\exists$ 3
(6)	$P(a) \to Q(a)$	O$\forall$ 1
(7)	$Q(a) \to \exists y R(a,y)$	O$\forall$ 2
(8)	$P(a) \to \exists y R(a,y)$	RSyl 6, 7
(9)	$\exists y R(a,y)$	RO 8, 5
(10)	$R(a,b)$	O$\exists$ 9
(11)	$\forall y \neg R(a,y)$	O$\forall$ 4
(12)	$\neg R(a,b)$	O$\forall$ 11
	sprzeczność	(10), (12)

Ćwiczenia

Podaj dowody poniższych tez KRP.

- $\forall x \forall y\ R(x,y) \to \forall y \forall x\ R(x,y)$,
- $\exists x \forall y\ R(x,y) \to \forall y \exists x\ R(x,y)$.

Pokaż, że pomiędzy formułami ze zbioru X a formułą α zachodzi wynikanie logiczne.

- (1) $X = \{\exists x\ (P(x) \vee Q(x)), \forall x\ (P(x) \to R(x)), \forall x\ (Q(x) \to R(x))\}$, $\alpha = \exists x\ R(x)$.
- (2) $X = \{\exists x\ P(x), \exists x\ Q(x)\}$, $\alpha = \exists x\ (P(x) \vee Q(x))$.

Pokaż, że poniższe zbiory formuł są sprzeczne.

- (1) $\{\exists x\ P(x), \neg\exists x\ Q(x), \forall x\ (P(x) \to Q(x))\}$,
- (2) $\{\forall x\ P(x), \exists x\ \neg Q(x), \forall x\ (P(x) \to Q(x))\}$

Ćwiczenia

Zbadaj, czy poniższe wnioskowania są dedukcyjne.

- *Istnieje modelka chudsza od wszystkich modelek. Zatem istnieje modelka chudsza od samej siebie.*
- *Ktoś donosi na wszystkich. Są zatem tacy, którzy donoszą na siebie nawzajem.* za: J. Pogonowski.

Ćwiczenia

Zbadaj, czy poniższe zbiory zdań są sprzeczne.

- *Każdy ateista jest komunistą. Niektórzy anarchiści nie są komunistami. Każdy nie jest anarchistą lub jest ateistą.*
- *Jakiś anarchista nie gardzi pewnymi komunistami. Każdy anarchista gardzi wszystkimi kapitalistami. Każdy jest anarchistą lub kapitalistą.*