JĘZYKOZNAWSTWO I NAUKI O INFORMACJI, ROK I

Logika Matematyczna: egzamin pisemny 11 czerwca 2012

Imię i Nazwisko: ....FIGLARNE POZNANIANKI

Wybierz dokładnie cztery z poniższych pięciu zadań i spróbuj je rozwiązać. Za każde poprawnie rozwiązane zadanie możesz otrzymać co najwyżej sto punktów. Uzyskanie co najmniej 200 punktów oznacza zdany egzamin. O liczbie przyznanych punktów oraz ocenie decyduję ja.

1. Udowodnij, że jest tezą systemu założeniowego klasycznego rachunku zdań:

$$(((p \rightarrow s) \wedge \neg r) \rightarrow \neg q) \rightarrow (((p \rightarrow s) \wedge q) \rightarrow r).$$

2. Dowolną poprawną metodą sprawdź czy wniosek: *Jeśli pada, to wieje* wynika logicznie z przesłanek: *Jeśli grzmi, to: jeżeli pada, to jest zimno. Jeśli jest zimno, to: wieje, o ile pada. Grzmi.*

3. W zbiorze wszystkich formuł języka klasycznego rachunku zdań określamy relację R następująco:

$\alpha R \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \wedge \beta$ jest tautologią klasycznego rachunku zdań.

Ustal, czy R jest relacją przechodnią.

4. Ustal, czy wniosek *Pewni Poznaniacy lubią samych siebie* wynika tablicowo z przesłanki: *Pewnego Poznaniaka lubią wszyscy Poznaniacy.*

5. Precyzyjnie wytłumacz, jakie błędy popełniono w następujących sformułowaniach, ale najpierw podaj poprawne definicje terminów zapisanych kursywą:

1. Formuła α języka klasycznego rachunku zdań przy pewnych wartościowaniach zmiennych zdaniowych *wynika logicznie* ze zbioru formuł X tego języka, a przy innych takich wartościowaniach α *nie wynika logicznie* z X.

2. Jeśli tablica analityczna zdania α języka klasycznego rachunku predykatów nie ma żadnej gałęzi zamkniętej, to α jest *tezą* systemu tablicowego dla klasycznego rachunku predykatów.

Wskazówka do zadania 2. Jeśli chcesz rozwiązywać to zadanie metodą dowodów założeniowych, to bądź łaskawa pamiętać, że tezami są: $(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta)$ oraz $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\alpha \wedge \neg\beta)$. To daje ładne reguły wyprowadzalne.

Wskazówka do zadania 3. Spróbuj rozumowania nie wprost.

PISZ I RYSUJ WYRAŹNIE. NIE PRZEMILCZAJ CZYNIONYCH ZAŁOŻEŃ. ODPOWIEDZI UZASADNIAJ. ODPOWIEDZI PODAWAJ PEŁNYM POPRAWNYM SKŁADNIOWO ZDANIEM.

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki Stosowanej UAM

JĘZYKOZNAWSTWO I NAUKI O INFORMACJI, ROK I

Logika Matematyczna: egzamin pisemny 11 czerwca 2012

Imię i Nazwisko: .... NADOBNE WIELKOPOLANKI

Wybierz dokładnie cztery z poniższych pięciu zadań i spróbuj je rozwiązać. Za każde poprawnie rozwiązane zadanie możesz otrzymać co najwyżej sto punktów. Uzyskanie co najmniej 200 punktów oznacza zdany egzamin. O liczbie przyznanych punktów oraz ocenie decyduję ja.

1. Udowodnij, że jest tezą systemu założeniowego klasycznego rachunku zdań:

$$(((p \to s) \wedge q) \to r) \to (((p \to s) \wedge \neg r) \to \neg q).$$

2. Dowolną poprawną metodą sprawdź czy wniosek: *Jeśli jestem uczesana, to wyglądam powabnie* wynika logicznie z przesłanek: *Jeśli jestem umyta, to: jestem czysto ubrana, o ile jestem uczesana. Jeśli jestem czysto ubrana, to: jeżeli jestem uczesana, to wyglądam powabnie. Jestem umyta.*

3. W zbiorze wszystkich formuł języka klasycznego rachunku zdań określamy relację R następująco:

$\alpha R \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \vee \beta$ jest kontrtautologią klasycznego rachunku zdań.

Ustal, czy R jest relacją przechodnią.

4. Ustal, czy wniosek *Co najmniej jeden polityk sam z siebie się śmieje* wynika tablicowo z przesłanki: *Z pewnych polityków śmieją się wszyscy politycy.*

5. Precyzyjnie wytłumacz, jakie błędy popełniono w następujących sformułowaniach, ale najpierw podaj poprawne definicje terminów zapisanych kursywą:

1. Zbiór X formuł języka klasycznego rachunku zdań przy pewnych wartościowaniach zmiennych zdaniowych może być *semantycznie niesprzeczny*, a przy innych *semantycznie sprzeczny*.
2. Jeśli zarówno zdanie α języka klasycznego rachunku predykatów, jak też wszystkie zdania ze zbioru X są prawdziwe w pewnej interpretacji, to α *wynika logicznie* z X.

Wskazówka do zadania 2. Jeśli chcesz rozwiązywać to zadanie metodą dowodów założeniowych, to bądź łaskawa pamiętać, że tezami są: $(\alpha \to \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta)$ oraz $\neg(\alpha \to \beta) \equiv (\alpha \wedge \neg\beta)$. To daje ładne reguły wyprowadzalne.

Wskazówka do zadania 3. Spróbuj rozumowania nie wprost.

PISZ I RYSUJ WYRAŹNIE. NIE PRZEMILCZAJ CZYNIONYCH ZAŁOŻEŃ. ODPOWIEDZI UZASADNIAJ. ODPOWIEDZI PODAWAJ PEŁNYM POPRAWNYM SKŁADNIOWO ZDANIEM.

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki Stosowanej UAM

1. Dowód założeniowy formuły: $(((p \to s) \wedge \neg r) \to \neg q) \to (((p \to s) \wedge q) \to r)$. Budujemy dowód nie wprost:

1.	$(((p \to s) \wedge \neg r) \to \neg q)$	zał.
2.	$(p \to s) \wedge q$	zał.
3.	$\neg r$	z.d.n.
4.	q	OK: 2
5.	$\neg\neg q$	DN: 4
6.	$\neg((p \to s) \wedge \neg r)$	MT: 1,5
7.	$\neg(p \to s) \vee \neg\neg r$	NK: 6
8.	$\neg\neg\neg r$	DN: 3
9.	$\neg(p \to s)$	OA: 7,8
10.	$p \to s$	OK: 2
11.	$\perp$	9,10

Ponieważ w dowodzie nie wprost uzyskano parę formuł wzajem sprzecznych, więc badana formuła jest tezą systemu założeniowego klasycznego rachunku zdań.

Inny przykład dowodu nie wprost rozważanej formuły:

1.	$(((p \to s) \wedge \neg r) \to \neg q)$	zał.
2.	$(p \to s) \wedge q$	zał.
3.	$\neg r$	z.d.n.
4.	$p \to s$	OK: 2
5.	$(p \to s) \wedge \neg r$	DK: 4,3
6.	$\neg q$	RO: 1,5
7.	q	OK: 2
8.	$\perp$	6,7

2. Znajdujemy zdania proste:

p	–	*Grzmi.*
q	–	*Pada.*
r	–	*Jest zimno.*
s	–	*Wieje.*

Znajdujemy schematy składniowe przesłanek i wniosku:

1. PRZESŁANKA 1: $p \to (q \to r)$.
2. PRZESŁANKA 2: $r \to (q \to s)$.
3. PRZESŁANKA 3: p.
4. WNIOSEK: $q \to s$.

I Metoda: dowód założeniowy. Trzeba pokazać, że reguła:

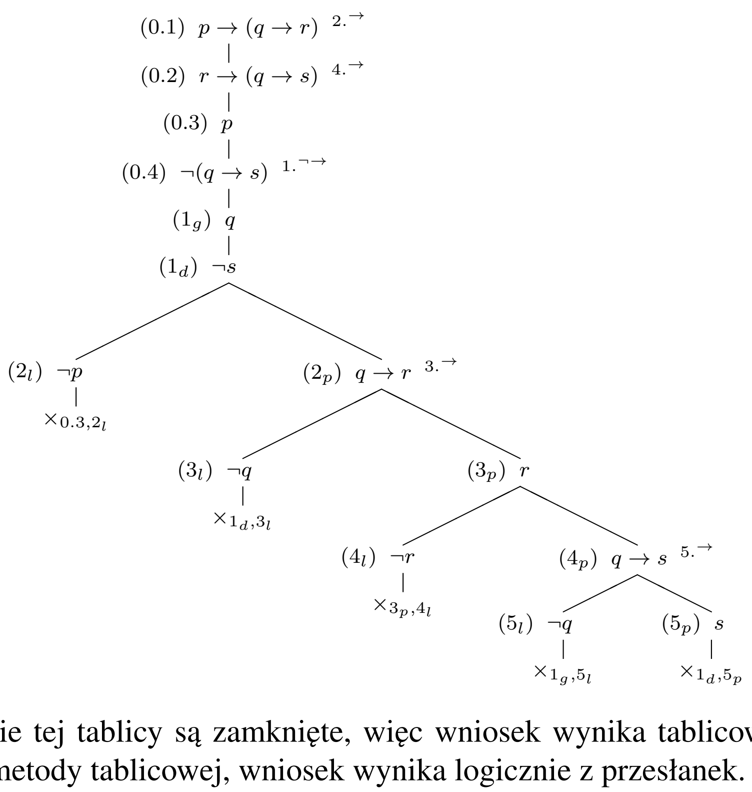
$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ r \rightarrow (q \rightarrow s) \\ p \end{array}}{q \rightarrow s}$$

jest wyprowadzalna w systemie założeniowym klasycznego rachunku zdań. Przeprowadzimy dowód metodą nie wprost.

$$\begin{array}{rll}
1. & p \rightarrow (q \rightarrow r) & \text{zał.} \\
2. & r \rightarrow (q \rightarrow s) & \text{zał.} \\
3. & p & \text{zał.} \\
4. & \neg(q \rightarrow s) & \text{z.d.n} \\
5. & q \wedge \neg s & \text{NI: 4} \\
6. & q \rightarrow r & \text{RO: 1,3} \\
7. & q & \text{OK: 5} \\
8. & r & \text{RO: 6,7} \\
9. & q \rightarrow s & \text{RO: 2,8} \\
10. & s & \text{RO: 9,7} \\
11. & \neg s & \text{OK: 5} \\
12. & \perp & \text{10,11}
\end{array}$$

Ponieważ w dowodzie nie wprost uzyskano parę formuł wzajem sprzecznych, więc badana reguła jest wyprowadzalna w systemie założeniowym klasycznego rachunku zdań. Na mocy twierdzenia o pełności metody założeniowej, wniosek reguły wynika logicznie z jej przesłanek.

II Metoda: tablice analityczne. Budujemy tablicę analityczną zaczynającą się od przesłanek oraz zaprzeczonego wniosku:



Ponieważ wszystkie gałęzie tej tablicy są zamknięte, więc wniosek wynika tablicowo z przesłanek. Na mocy twierdzenia o pełności metody tablicowej, wniosek wynika logicznie z przesłanek.

III Metoda: skrócona metoda $0 - 1$. Badamy, czy istnieje wartościowanie zmiennych zdaniowych, przy którym wszystkie przesłanki mają wartość 1, natomiast wniosek ma wartość 0. Są dwie możliwości:

1. Istnieje takie wartościowanie. Wtedy wniosek nie wynika logicznie z przesłanek.

2. Nie istnieje takie wartościowanie. Wtedy wniosek wynika logicznie z przesłanek.

Przypomnijmy, że wartość formuły α przy wartościowaniu v zmiennych zdaniowych oznaczamy przez $Val(\alpha, v)$.

Przypuśćmy zatem, że istnieje wartościowanie w zmiennych zdaniowych takie, że:

1. $Val(p \rightarrow (q \rightarrow r), w) = 1$
2. $Val(r \rightarrow (q \rightarrow s), w) = 1$
3. $Val(p, w) = 1$
4. $Val(q \rightarrow s, w) = 0$.

Wtedy mamy kolejno (na mocy indukcyjnej definicji funkcji Val):

1. Skoro $Val(q \rightarrow s, w) = 0$, to: $Val(q, w) = 1$ oraz $Val(s, w) = 0$.
2. Skoro $Val(q \rightarrow s, w) = 0$ oraz $Val(r \rightarrow (q \rightarrow s), w) = 1$, to musi być: $Val(r, w) = 0$.
3. Skoro $Val(q, w) = 1$ oraz $Val(r, w) = 0$, to $Val(q \rightarrow r, w) = 0$.
4. Skoro $Val(q \rightarrow r, w) = 0$ oraz $Val(p \rightarrow (q \rightarrow r), w) = 1$, to musi być: $Val(p, w) = 0$.
5. $Val(p, w) = 0$ przeczy założeniu, że $Val(p, w) = 1$.
6. Ponieważ przypuszczenie, że istnieje wartościowanie zmiennych zdaniowych, przy którym wszystkie przesłanki mają wartość 1, natomiast wniosek ma wartość 0 doprowadziło do sprzeczności, więc musimy je odrzucić. W konsekwencji, nie istnieje takie wartościowanie.
7. Oznacza to, że przy każdym wartościowaniu zmiennych zdaniowych, przy którym wszystkie przesłanki mają wartość 1, również wniosek ma wartość 1.
8. Ostatecznie: wniosek wynika logicznie z przesłanek.

3. Trzeba sprawdzić, czy zachodzi:

$$\forall\alpha\forall\beta\forall\gamma\ ((\alpha R\beta \wedge \beta R\gamma) \rightarrow \alpha R\gamma).$$

Trzeba zatem ustalić, czy $\alpha \wedge \gamma$ jest tautologią, o ile zarówno $\alpha \wedge \beta$, jak i $\beta \wedge \gamma$ są tautologiami. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że zarówno $\alpha \wedge \beta$, jak i $\beta \wedge \gamma$ są tautologiami oraz przypuśćmy, że $\alpha \wedge \gamma$ nie jest tautologią. Wtedy:

1. Przy każdym wartościowaniu zmiennych zdaniowych zarówno $\alpha \wedge \beta$, jak i $\beta \wedge \gamma$ przyjmuje wartość 1.
2. Istnieje wartościowanie w zmiennych zdaniowych, przy którym $\alpha \wedge \gamma$ przyjmuje wartość 0.
3. Na mocy indukcyjnej definicji wartości logicznej koniunkcji, skoro $\alpha \wedge \gamma$ przyjmuje wartość 0 przy wartościowaniu w, to co najmniej jedno z dwojga: a) albo α albo b) γ przyjmuje wartość 0 przy wartościowaniu w.
4. Jeśli zachodzi a), to $\alpha \wedge \beta$ przyjmuje wartość 0 przy wartościowaniu w, co sprzeczne jest z założeniem, że $\alpha \wedge \beta$ jest tautologią.
5. Jeśli zachodzi b), to $\beta \wedge \gamma$ przyjmuje wartość 0 przy wartościowaniu w, co sprzeczne jest z założeniem, że $\beta \wedge \gamma$ jest tautologią.
6. Tak więc, przypuszczenie dowodu nie wprost prowadzi do sprzeczności. Trzeba je zatem odrzucić.

7. W konsekwencji, $\alpha \wedge \gamma$ jest tautologią, co oznacza, że $\alpha R \gamma$. Udowodniliśmy więc, że relacja R jest przechodnia.

4. Znajdujemy predykaty:

1. $P(x)$: x jest Poznaniakiem.
2. $S(x,y)$: x lubi y.

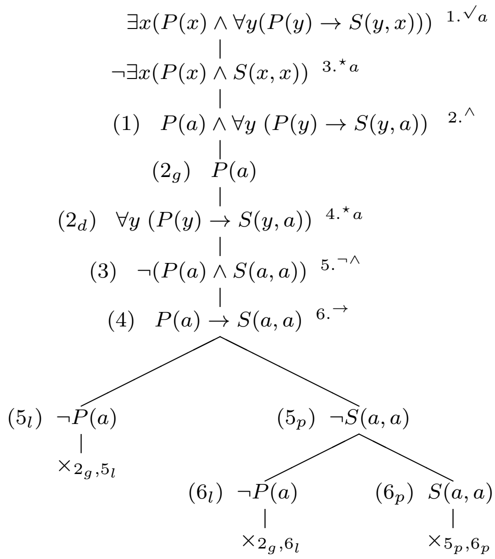
Znajdujemy struktury składniowe przesłanki oraz wniosku:

1. PRZESŁANKA: $\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \to S(y,x)))$
2. WNIOSEK: $\exists x(P(x) \wedge S(x,x))$

Wnioskowanie to przebiega zatem wedle następującej reguły:

$$\frac{\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \to S(y,x)))}{\exists x(P(x) \wedge S(x,x))}$$

Gdyby reguła ta była tablicowo niezawodna, to zbudowana wedle reguł sztuki tablica analityczna (dla przesłanki oraz zaprzeczonego wniosku) miałaby wszystkie gałęzie zamknięte. Budujemy zatem tablicę analityczną rozpoczynającą się od przesłanki oraz zaprzeczonego wniosku:



Ponieważ wszystkie gałęzie tej tablicy są zamknięte, więc wniosek wynika tablicowo z przesłanki.

5. Poprawne definicje:

1. Formuła α języka klasycznego rachunku zdań *wynika logicznie* ze zbioru formuł X tego języka wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wartościowania w zmiennych zdaniowych: jeśli wszystkie formuły ze zbioru X mają wartość 1 przy wartościowaniu w, to także α ma wartość 1 przy wartościowaniu w. Można też sformułować tę definicję równoważnie tak oto. Formuła α języka klasycznego rachunku zdań *wynika logicznie* ze zbioru formuł X tego języka wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje wartościowanie w zmiennych zdaniowych takie, że wszystkie formuły ze zbioru X przyjmują wartość 1 przy wartościowaniu w, natomiast α przyjmuje wartość 0 przy tymże wartościowaniu. Tak więc, formuła α języka klasycznego rachunku zdań *nie wynika logicznie* ze zbioru formuł X tego języka wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wartościowanie w zmiennych zdaniowych takie, że wszystkie formuły ze zbioru X przyjmują wartość 1 przy wartościowaniu w, natomiast α przyjmuje wartość 0 przy tymże wartościowaniu.

2. Zdanie α jest *tezą systemu tablicowego* dla klasycznego rachunku predykatów wtedy i tylko wtedy, gdy tablica analityczna zdania $\neg\alpha$ ma wszystkie gałęzie zamknięte. Gałąź zamknięta tablicy analitycznej to gałąź, na której występuje para formuł wzajem sprzecznych.

Popełniono następujące błędy w sformułowaniach:

1. Wynikanie logiczne w klasycznym rachunku zdań ma charakter obiektywny, w tym sensie, że dla dowolnego zbioru X formuł oraz formuły α tego języka: albo α wynika logicznie z X, albo nie wynika. Nie można mówić, że przy pewnych wartościowaniach zmiennych zdaniowych α wynika logicznie z X, a przy innych nie wynika. Przy ustalaniu wynikania logicznego w klasycznym rachunku zdań bierzemy zawsze pod uwagę *wszystkie* wartościowania zmiennych zdaniowych. W praktyce, rozważamy oczywiście tylko zmienne zdaniowe występujące w formułach z X oraz w formule α. Ponadto, dla ustalenia, że α *nie wynika logicznie* z X, wystarczy znaleźć *jedno wartościowanie*, przy którym wszystkie formuły z X przyjmują wartość 1, natomiast α przyjmuje wartość 0.

2. Dla ustalenia, czy α jest tezą systemu tablicowego dla klasycznego rachunku predykatów budujemy tablicę analityczną nie dla α, lecz dla zdania $\neg\alpha$! Jeśli α jest tezą systemu tablicowego, to może być tak, że jej tablica analityczna ma zarówno gałęzie zamknięte, jak i otwarte.

1. Dowód założeniowy formuły: $(((p \to s) \wedge q) \to r) \to (((p \to s) \wedge \neg r) \to \neg q)$. Budujemy dowód nie wprost:

1.	$((p \to s) \wedge q) \to r$	zał.
2.	$(p \to s) \wedge \neg r$	zał.
3.	$\neg\neg q$	z.d.n.
4.	$\neg r$	OK: 2
5.	$\neg((p \to s) \wedge q)$	MT: 1,4
6.	$\neg(p \to s) \vee \neg q$	NK: 5
7.	$\neg(p \to s)$	OA: 6,3
8.	$p \to s$	OK: 2
9.	$\perp$	7,8

Ponieważ w dowodzie nie wprost uzyskano parę formuł wzajem sprzecznych, więc badana formuła jest tezą systemu założeniowego klasycznego rachunku zdań.

Inny przykład dowodu nie wprost rozważanej formuły:

1.	$((p \to s) \wedge q) \to r$	zał.
2.	$(p \to s) \wedge \neg r$	zał.
3.	$\neg\neg q$	z.d.n.
4.	q	ON: 3
5.	$p \to s$	OK: 2
6.	$(p \to s) \wedge q$	DK: 5,4
7.	r	RO: 1,6
8.	$\neg r$	OK: 2
9.	$\perp$	7,8

2. Znajdujemy zdania proste:

p – *Jestem umyta.*
q – *Jestem uczesana.*
r – *Jestem czysto ubrana.*
s – *Wyglądam powabnie.*

Znajdujemy schematy składniowe przesłanek i wniosku:

1. PRZESŁANKA 1: $p \to (q \to r)$.
2. PRZESŁANKA 2: $r \to (q \to s)$.
3. PRZESŁANKA 3: p.
4. WNIOSEK: $q \to s$.

I Metoda: dowód założeniowy. Trzeba pokazać, że reguła:

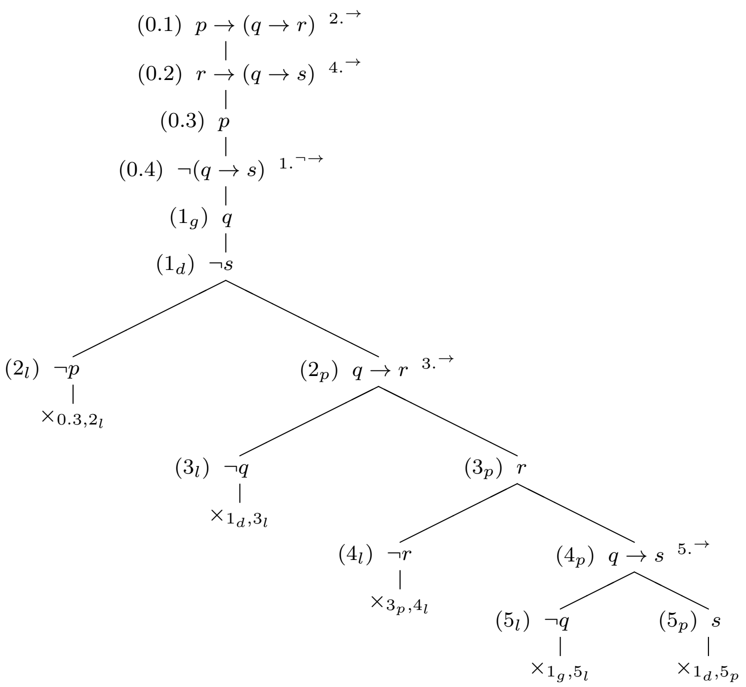
$$\frac{\begin{array}{c} p \to (q \to r) \\ r \to (q \to s) \\ p \end{array}}{q \to s}$$

jest wyprowadzalna w systemie założeniowym klasycznego rachunku zdań. Przeprowadzimy dowód metodą nie wprost.

1.	$p \to (q \to r)$	zał.
2.	$r \to (q \to s)$	zał.
3.	p	zał.
4.	$\neg(q \to s)$	z.d.n
5.	$q \wedge \neg s$	NI: 4
6.	$q \to r$	RO: 1,3
7.	q	OK: 5
8.	r	RO: 6,7
9.	$q \to s$	RO: 2,8
10.	s	RO: 9,7
11.	$\neg s$	OK: 5
12.	$\bot$	10,11

W powyższym dowodzie nie wprost uzyskano sprzeczność, a więc udowodniono tym samym, że rozważana reguła jest wyprowadzalna w systemie założeniowym. Na mocy twierdzenia o pełności metody założeniowej, wniosek reguły wynika zatem logicznie z jej przesłanek.

II Metoda: tablice analityczne. Budujemy tablicę analityczną zaczynającą się od przesłanek oraz zaprzeczonego wniosku:



Ponieważ wszystkie gałęzie tej tablicy są zamknięte, więc wniosek wynika tablicowo z przesłanek. Na mocy twierdzenia o pełności metody tablicowej, wniosek wynika logicznie z przesłanek.

III Metoda: skrócona metoda $0-1$. Badamy, czy istnieje wartościowanie zmiennych zdaniowych, przy którym wszystkie przesłanki mają wartość 1, natomiast wniosek ma wartość 0. Są dwie możliwości:

1. Istnieje takie wartościowanie. Wtedy wniosek nie wynika logicznie z przesłanek.

2. Nie istnieje takie wartościowanie. Wtedy wniosek wynika logicznie z przesłanek.

Przypomnijmy, że wartość formuły α przy wartościowaniu v zmiennych zdaniowych oznaczamy przez $Val(\alpha, v)$.

Przypuśćmy zatem, że istnieje wartościowanie w zmiennych zdaniowych takie, że:

1. $Val(p \to (q \to r), w) = 1$
2. $Val(r \to (q \to s), w) = 1$
3. $Val(p, w) = 1$
4. $Val(q \to s, w) = 0$.

Wtedy mamy kolejno (na mocy indukcyjnej definicji funkcji Val):

1. Skoro $Val(q \to s, w) = 0$, to: $Val(q, w) = 1$ oraz $Val(s, w) = 0$.
2. Skoro $Val(q \to s, w) = 0$ oraz $Val(r \to (q \to s), w) = 1$, to musi być: $Val(r, w) = 0$.
3. Skoro $Val(q, w) = 1$ oraz $Val(r, w) = 0$, to $Val(q \to r, w) = 0$.
4. Skoro $Val(q \to r, w) = 0$ oraz $Val(p \to (q \to r), w) = 1$, to musi być: $Val(p, w) = 0$.
5. $Val(p, w) = 0$ przeczy założeniu, że $Val(p, w) = 1$.
6. Ponieważ przypuszczenie, że istnieje wartościowanie zmiennych zdaniowych, przy którym wszystkie przesłanki mają wartość 1, natomiast wniosek ma wartość 0 doprowadziło do sprzeczności, więc musimy je odrzucić. W konsekwencji, nie istnieje takie wartościowanie.
7. Oznacza to, że przy każdym wartościowaniu zmiennych zdaniowych, przy którym wszystkie przesłanki mają wartość 1, również wniosek ma wartość 1.
8. Ostatecznie: wniosek wynika logicznie z przesłanek.

3. Trzeba sprawdzić, czy zachodzi:

$$\forall\alpha\forall\beta\forall\gamma\ ((\alpha R\beta \wedge \beta R\gamma) \to \alpha R\gamma).$$

Trzeba zatem ustalić, czy $\alpha \vee \gamma$ jest kontrtautologią, o ile zarówno $\alpha \vee \beta$, jak i $\beta \vee \gamma$ są kontrtautologiami. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że zarówno $\alpha \vee \beta$, jak i $\beta \vee \gamma$ są kontrtautologiami oraz przypuśćmy, że $\alpha \vee \gamma$ nie jest kontrtautologią. Wtedy:

1. Przy każdym wartościowaniu zmiennych zdaniowych zarówno $\alpha \vee \beta$, jak i $\beta \vee \gamma$ przyjmuje wartość 0.
2. Istnieje wartościowanie w zmiennych zdaniowych, przy którym $\alpha \vee \gamma$ przyjmuje wartość 1.
3. Na mocy indukcyjnej definicji wartości logicznej alternatywy, skoro $\alpha \vee \gamma$ przyjmuje wartość 1 przy wartościowaniu w, to co najmniej jedno z dwojga: a) albo α albo b) γ przyjmuje wartość 1 przy wartościowaniu w.
4. Jeśli zachodzi a), to $\alpha \vee \beta$ przyjmuje wartość 1 przy wartościowaniu w, co sprzeczne jest z założeniem, że $\alpha \vee \beta$ jest kontrtautologią.
5. Jeśli zachodzi b), to $\beta \vee \gamma$ przyjmuje wartość 1 przy wartościowaniu w, co sprzeczne jest z założeniem, że $\beta \vee \gamma$ jest kontrtautologią.
6. Tak więc, przypuszczenie dowodu nie wprost prowadzi do sprzeczności. Trzeba je zatem odrzucić.

7. W konsekwencji, $\alpha \vee \gamma$ jest kontrtautologią, co oznacza, że $\alpha R \gamma$. Udowodniliśmy więc, że relacja R jest przechodnia.

4. Znajdujemy predykaty:

1. $P(x)$: x jest politykiem.
2. $S(x, y)$: x śmieje się z y.

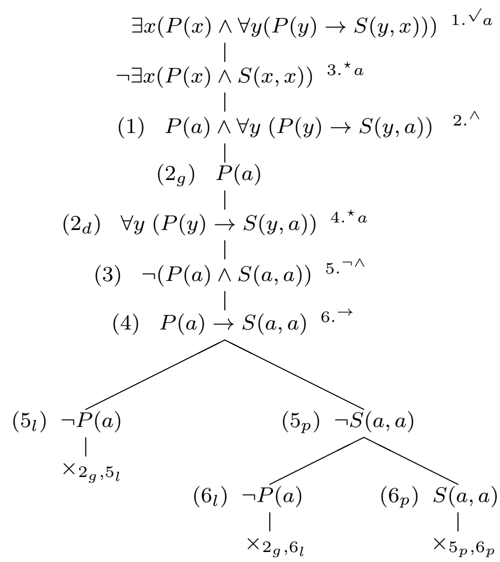
Znajdujemy struktury składniowe przesłanki oraz wniosku:

1. PRZESŁANKA: $\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow S(y, x)))$
2. WNIOSEK: $\exists x(P(x) \wedge S(x, x))$

Wnioskowanie to przebiega zatem wedle następującej reguły:

$$\frac{\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow S(y, x)))}{\exists x(P(x) \wedge S(x, x))}$$

Gdyby reguła ta była tablicowo niezawodna, to zbudowana wedle reguł sztuki tablica analityczna (dla przesłanki oraz zaprzeczonego wniosku) miałaby wszystkie gałęzie zamknięte. Budujemy zatem tablicę analityczną rozpoczynającą się od przesłanki oraz zaprzeczonego wniosku:



Ponieważ wszystkie gałęzie tej tablicy są zamknięte, więc wniosek wynika tablicowo z przesłanki.

5. Poprawne definicje:

1. Zbiór formuł X języka klasycznego rachunku zdań jest *semantycznie niesprzeczny* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje co najmniej jedno wartościowanie zmiennych zdaniowych, przy którym wszystkie formuły ze zbioru X przyjmują wartość 1. Zbiór formuł X języka klasycznego rachunku zdań jest *semantycznie sprzeczny* wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje wartościowanie zmiennych zdaniowych, przy którym wszystkie formuły ze zbioru X przyjmują wartość 1.

2. Zdanie α języka klasycznego rachunku predykatów wynika logicznie ze zbioru X zdań tego języka wtedy i tylko wtedy, gdy α jest prawdziwe we wszystkich interpretacjach, w których prawdziwe są wszystkie zdania ze zbioru X.

Popełniono następujące błędy w sformułowaniach:

1. Semantyczna niesprzeczność zbioru X formuł języka klasycznego rachunku zdań jest własnością obiektywną, w tym sensie, że wystarcza istnienie co najmniej jednego wartościowania zmiennych zdaniowych, przy którym wszystkie formuły z X mają wartość 1. Nie wyklucza to przypadku, że wszystkie formuły z X mają wartość 0 przy pozostałych wartościowaniach zmiennych zdaniowych. Łatwo skonstruować np. zbiór X formuł, w których występuje n zmiennych zdaniowych taki, że wszystkie formuły z tego zbioru mają wartość 1 przy dokładnie jednym wartościowaniu, a wartość 0 przy pozostałych $2^n - 1$ wartościowaniach.

2. Na definicji wynikania logicznego w klasycznym rachunku predykatów, aby ustalić, że zdanie α *nie wynika logicznie* ze zbioru zdań X wystarczy znaleźć co najmniej jedną interpretację, w której wszystkie zdania ze zbioru X są prawdziwe, natomiast zdanie α jest fałszywe. Jednak dla ustalenia, że α *wynika logicznie* z X, trzeba brać pod uwagę *wszystkie* interpretacje, w których wszystkie zdania z X są prawdziwe i sprawdzić, czy w nich także α jest prawdziwe. Łatwo podać przykład zdań α i β oraz interpretacji $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ takich, że:

   (a) $\mathfrak{M} \models \alpha$ oraz $\mathfrak{M} \models \beta$

   (b) $\mathfrak{N} \models \alpha$ lecz nie zachodzi $\mathfrak{N} \models \beta$ (a więc β nie wynika logicznie z $\{\alpha\}$).