Logika algebraiczna 7

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

2021

Plan na dziś:

- Semantyka prawdziwościowa
- Matryce logiczne
- Konsekwencja matrycowa
- Reguły niezawodne i reguły normalne
- Operacje na matrycach logicznych
- Adekwatność: słaba i silna
- Przykłady matryc logicznych

Następny wykład:

- Logika niefregowska: geneza, zasady semantyczne
- Sentential Calculus with Identity
- Teorie w języku logiki niefregowskiej
- Ontologie sytuacji

- Wartościowaniem prawdziwościowym dla języka $\mathbf{S} = (S, F_1, \ldots, F_n)$ nazywamy każde odwzorowanie $v : S \to \{0, 1\}$, gdzie 0 i 1 interpretujemy jako, odpowiednio, wartości logiczne: fałsz i prawda.
- Mówimy, że wartościowanie v:
  1. spełnia sekwent (X, α), gdy $v(\alpha) = 1$ lub $v(\beta) = 0$ dla pewnego $\beta \in X$;
  2. falsyfikuje sekwent (X, α), gdy $v(\alpha) = 0$ i $v(\beta) = 1$ dla wszystkich $\beta \in X$;
  3. spełnia zbiór X, gdy $v(\alpha) = 1$ dla wszystkich $\alpha \in X$;
  4. falsyfikuje zbiór X, gdy $v(\alpha) = 0$ dla pewnego $\alpha \in X$.
- Dla każdego zbioru H wartościowań dla $\mathbf{S}$ operacja $C_H : \wp(S) \to \wp(S)$ określona warunkiem $\alpha \in C_H(X)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy każde wartościowanie* $v \in H$ *spełnia sekwent* (X, α) jest operacją konsekwencji.

- Dla klasy struktur $\mathbb{S}$ (np. klasy wartościowań) przez $\mathbb{S}$-semantykę rozumie się przyporządkowanie każdej podklasie $\mathbb{S}'$ pewnej operacji konsekwencji $C_{\mathbb{S}'}$.
- Mówimy, że operacja konsekwencji C jest:
  1. pełna (słabo pełna) względem $\mathbb{S}$-semantyki, gdy $C = C_{\mathbb{S}'}$ dla pewnego $\mathbb{S}' \subseteq \mathbb{S}$ (odpowiednio, $C(\emptyset) = C_{\mathbb{S}'}(\emptyset)$);
  2. pełna (słabo pełna) względem ustalonej semantyki $\mathbb{S}' \subseteq \mathbb{S}$, gdy $C_{\mathbb{S}'} \leqslant C$ (odpowiednio, $C_{\mathbb{S}'}(\emptyset) \subseteq C(\emptyset)$);
  3. trafna (słabo trafna) względem $\mathbb{S}' \subseteq \mathbb{S}$, gdy $C \leqslant C_{\mathbb{S}'}$ (odpowiednio, $C(\emptyset) \subseteq C_{\mathbb{S}'}(\emptyset)$);
- Mówimy, że ustalona semantyka $\mathbb{S}' \subseteq \mathbb{S}$ jest adekwatna (słabo adekwatna) względem C, gdy C jest trafna i pełna (odpowiednio, słabo trafna i słabo pełna) względem $\mathbb{S}'$.

- Przypominamy, że jeśli $\mathcal{X}$ jest systemem domknięć (rodziną podzbiorów zbioru S, zamkniętą na iloczyny), to operacja C taka, że $C(X) = \bigcap\{Y \in \mathcal{X} : X \subseteq Y\}$, dla dowolnego $X \subseteq S$ jest operacją konsekwencji. Rodzinę $\mathcal{X}$ nazywa się wtedy bazą domknięć dla C.
- **Twierdzenie**. Niech $\mathcal{X}$ będzie rodziną zbiorów formuł, a H zbiorem wartościowań prawdziwościowych. Niech χ_X będzie funkcją charakterystyczną zbioru X (czyli $\chi_X(\alpha) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in X$). Dla każdego wartościowania prawdziwościowego v niech X_v będzie zbiorem formuł, którego funkcją charakterystyczną jest v. Wtedy:
  1. $\mathcal{X}$ jest bazą domknięć dla konsekwencji C wtedy i tylko wtedy, gdy $\{\chi_X : X \in \mathcal{X}\}$ jest semantyką adekwatną dla C.
  2. H jest semantyką adekwatną dla C wtedy i tylko wtedy, gdy $\{X_v : v \in H\}$ jest bazą domknięć dla C.
- **Dowód**. Ponieważ 1) i 2) są równoważne, więc wystarczy udowodnić np. 1).

- Niech $\mathcal{X}$ będzie bazą domknięć dla C. Przypuśćmy, że $\alpha \in C(X)$.
- Jeśli $\chi_Y(\beta) = 1$ dla wszystkich $\beta \in X$, to $X \subseteq Y$, a zatem $C(X) \subseteq C(Y) = Y$, co daje $\chi_Y(\alpha) = 1$.
- Przypuśćmy z kolei, że $\alpha \notin C(X)$. Wtedy dla pewnego $Y \in \mathcal{X}$ mamy $X \subseteq Y$ i $\alpha \notin Y$. Stąd $\chi_Y[X] \subseteq \{1\}$ oraz $\chi_Y(\alpha) = 0$.
- Pokazaliśmy więc, że $\{\chi_X : X \in \mathcal{X}\}$ jest semantyką adekwatną dla C. Dowód implikacji odwrotnej otrzymujemy odwracając powyższą argumentację. $\square$

Ponieważ dla każdej operacji konsekwencji istnieje co najmniej jedna baza domknięć (np. $Th(C)$), więc dla każdej operacji konsekwencji istnieje semantyka prawdziwościowa H adekwatna dla C.
Jeśli H jest adekwatną semantyką dla C, to C jest strukturalna, o ile dla każdego $v \in H$ i każdego podstawienia e mamy $v_e \in H$, gdzie $v_e(\alpha) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v(e\alpha) = 1$.

- Każdą parę $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, A^*)$, gdzie $\mathbf{A}$ jest algebrą podobną do algebry języka $\mathbf{S}$, a A^* jest podzbiorem uniwersum algebry $\mathbf{A}$ (czyli $A^* \subseteq A$) nazywamy *matrycą logiczną*. Zbiór A^* (oznaczany też $\mathfrak{M}^*$) jest zbiorem *elementów wyróżnionych* matrycy $\mathfrak{M}$.
- Definiujemy zbiór $E(\mathfrak{M})$ wszystkich formuł $\mathfrak{M}$-*prawdziwych* ($\mathfrak{M}$-*tautologii*): $\alpha \in E(\mathfrak{M})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h^v(\alpha) \in A^*$, dla każdego $v : At \to A$ (tu At jest zbiorem wszystkich zmiennych zdaniowych rozważanego języka). Zbiór $E(\mathfrak{M})$ nazywamy też *zawartością* matrycy $\mathfrak{M}$.
- Prototypy pojęcia matrycy logicznej znajdujemy u Peirce'a i Schrödera (Marek 1993). Powyższa ścisła definicja pochodzi od Tarskiego i Łukasiewicza (1930). Pojęcie to jest omawiane w pracach Łosia (1949), Suszki (1957), Łosia i Suszki (1958), Wójcickiego (1970). W dalszej prezentacji opieramy się na pracach Pogorzelskiego (1975), Pogorzelskiego i Wojtylaka (2008), Wójcickiego (1984), Czelakowskiego (2003), Zygmunta (1984).

- Klasyczna matryca dwuwartościowa $\mathfrak{M}_2$. Jest to matryca dla języka $\mathbf{S}_2 = (S_2, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow, \neg)$ klasycznego rachunku zdań. Niech $\mathfrak{M}_2 = (\{0,1\}, f^{\rightarrow}, f^{\wedge}, f^{\vee}, f^{\leftrightarrow}, f^{\neg})$, gdzie:
  1. $f^{\rightarrow}(x,y) = \min(1 - x + y, 1)$
  2. $f^{\wedge}(x,y) = \min(x,y)$
  3. $f^{\vee}(x,y) = \max(x,y)$
  4. $f^{\leftrightarrow}(x,y) = \max(\min(1-x, 1-y), \min(x,y))$
  5. $f^{\neg}(x) = 1 - x$
- Matryca $\mathfrak{M}_3$ dla języka $\mathbf{S}^{CKAN} = (S^{CKAN}, \rightarrow, \wedge, \vee, \neg)$. Niech $\mathfrak{M}_3 = (\{0,1,2\}, \{2\}, \min(2, 2-x+y), \min(x,y), \max(x,y), 2-x)$.
- Inna matryca $\mathfrak{M}_T$ dla języka $\mathbf{S}^{CKAN}$: $\mathfrak{M}_T = (\mathcal{O}(T), \{T\}, T - cl(X - Y), X \cap Y, X \cup Y, T - cl(X))$, gdzie $(T, \mathcal{O}(T))$ jest T_1-przestrzenią topologiczną. Mówimy, że przestrzeń topologiczna jest T_1-przestrzenią, jeśli dla każdych dwóch różnych jej punktów istnieje zbiór otwarty, który zawiera jeden z tych punktów, a nie zawiera drugiego.

- Formuła $\neg\neg p \to p$ jest prawdziwa w matrycy $\mathfrak{M}_3$. Aby to wykazać, trzeba rozważyć wartościowania $v_1(p) = 0$, $v_2(p) = 1$, $v_3(p) = 2$. Przy każdym z tych wartościowań mamy $h^{v_i}(\neg\neg p \to p) = 2$, ponieważ dla $i \in \{1, 2, 3\}$ mamy: $h^{v_i}(\neg\neg p \to p) = \min(2, 2 - h^{v_i}(\neg\neg p) + h^v(p)) = \min(2, 2 - (2 - h^v(p)) + v(p)) = \min(2, (2 - (2 - h^v(p)) + v(p))) = \min(2, 2 - (2 - (2 - v(p))) + v(p)) = \min(2, 2) = 2 \in \{2\}$.
- Formuła $p \vee \neg p$ nie jest prawdziwa w matrycy $\mathfrak{M}_3$. Aby to wykazać, wystarczy znaleźć jedno wartościowanie v takie, że $h^v(p \vee \neg p) \notin \{2\}$. Mamy np. dla $v(p) = 1$:
  $h^v(p \vee \neg p) = \max(h^v(p), h^v(\neg p)) = \max(v(p), 2 - h^v(p)) = \max(v(p), 2 - v(p)) = \max(1, 2 - 1) = 1 \notin \{2\}$.

- Niech $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, A^*)$. Operacja *konsekwencji matrycowej* $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ ma następującą definicję: $\alpha \in \overrightarrow{\mathfrak{M}}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $v : At \to A$ jeśli $h^v(X) \subseteq A^*$, to $h^v(\alpha) \in A^*$. Mamy oczywiście $E(\mathfrak{M}) = \overrightarrow{\mathfrak{M}}(\emptyset)$.
- Operacja konsekwencji matrycowej jest strukturalną operacją konsekwencji.
- Mówimy, że zbiór $X \subseteq S$ jest *spełnialny* w matrycy $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, A^*)$, gdy istnieje wartościowanie $v : At \to A$ takie, że: $h^v(X) \subseteq A^*$. Jeśli X jest spełnialny w $\mathfrak{M}$, to piszemy $X \in \mathrm{Sat}(\mathfrak{M})$.
- Niech $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, A^*)$.
  1. Zbiorem v-nasyconym matrycy $\mathfrak{M}$ nazywamy zbiór $\mathrm{Sat}_v = (h^v)^{-1}(A^*)$.
  2. $E(\mathfrak{M}) = \bigcap\limits_{v:At \to A} \mathrm{Sat}_v$.
- $Sb[E(\mathfrak{M})] \subseteq E(\mathfrak{M})$. Tak więc, zawartość każdej matrycy logicznej jest zamknięta ze względu na regułę podstawiania.

- Określamy zbiory $V(\mathfrak{M})$ reguł *niezawodnych* (dziedzicznych) oraz $N(\mathfrak{M})$ reguł *normalnych* w matrycy $\mathfrak{M}$:
    1. $r \in V(\mathfrak{M})$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $P \subseteq S$ i $\alpha \in S$: jeśli $(P, \alpha) \in r$ i $P \subseteq E(\mathfrak{M})$, to $\alpha \in E(\mathfrak{M})$;
    2. $r \in N(\mathfrak{M})$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych $P \subseteq S$, $\alpha \in S$ i $v : At \to S$ zachodzi implikacja: jeśli $(P, \alpha) \in r$ i $h^v[P] \subseteq A^*$, to $h^v(\alpha) \in A^*$.
- Zachodzą wtedy następujące fakty:
    1. $N(\mathfrak{M}) = \mathrm{Der}(\overrightarrow{\mathfrak{M}})$
    2. $V(\mathfrak{M}) = \mathrm{Adm}(\overrightarrow{\mathfrak{M}})$
    3. $r_* \in V(\mathfrak{M}) - N(\mathfrak{M})$, jeśli $\emptyset \subsetneq A^* \subsetneq A$.

Trywialnym przykładem reguły niezawodnej w dowolnej matrycy $\mathfrak{M}$ jest reguła $r_{\mathfrak{M}}$, określona warunkiem $(P, \varphi) \in r_{\mathfrak{M}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy: jeśli $P \subseteq E(\mathfrak{M})$, to $\varphi \in E(\mathfrak{M})$.

- Reguła odrywania r_0 jest niezawodna w matrycy $\mathfrak{M}_3$. Przypuśćmy bowiem, że tak nie jest, czyli załóżmy, że dla pewnych φ i ψ mamy $\varphi, \varphi \to \psi \in E(\mathfrak{M}_3)$, ale $\psi \notin E(\mathfrak{M}_3)$.
Istnieje wtedy wartościowanie $v : At \to \{0, 1, 2\}$ takie, że $h^v(\psi) \neq 2$, ale $h^v(\varphi) = 2$ i $h^v(\varphi \to \psi) = 2$. Jednak wtedy
$2 = h^v(\varphi \to \psi) = \min(2, 2 - h^v(\varphi) + h^v(\psi)) = \min(2, h^v(\psi)) < 2$, co jest niemożliwe.
- Reguła $\frac{\neg\varphi \to \varphi}{\varphi}$ jest zawodna w matrycy $\mathfrak{M}_3$, ponieważ np. $\neg(p \vee \neg p) \to (p \vee \neg p) \in E(\mathfrak{M}_3)$, ale $p \vee \neg p \notin E(\mathfrak{M}_3)$.
- **Twierdzenie**. Jeśli $X \subseteq E(\mathfrak{M})$ i $R \subseteq V(\mathfrak{M})$, to $C(R, X) \subseteq E(\mathfrak{M})$. $\Box$
To twierdzenie ma ważne zastosowania. Jeśli chcemy pokazać, że φ nie jest tezą systemu (R, X) (czyli że $\varphi \notin C(R, X)$), to wystarczy znaleźć matrycę $\mathfrak{M}$ taką, że $R \subseteq V(\mathfrak{M})$, $X \subseteq E(\mathfrak{M})$ i $\varphi \notin E(\mathfrak{M})$.

- Reguła podstawiania r_* nie jest normalna w żadnej matrycy $\mathfrak{M}$, w której istnieje co najmniej jedna wartość wyróżniona i co najmniej jedna wartość niewyróżniona.
  Dla takich matryc istnieje bowiem wartościowanie $v : At \to S$ takie, że $(p, q) \in r_*$ i $h^v[\{p\}] \subseteq A^*$, ale $h^v(q) \notin A^*$.
- Reguła odrywania r_0 jest normalna w matrycy $\mathfrak{M}_3$, ponieważ: jeśli $h^v[\{\varphi, \varphi \to \psi\}] \subseteq \{2\}$, to
  $2 = \min(2, 2 - h^v(\varphi) + h^v(\psi)) = \min(2, h^v(\psi))$, czyli $h^v(\psi) = 2$.
- W matrycy $\mathfrak{M}_3$ nie jest normalna np. reguła $\frac{\varphi \to (\varphi \to \psi)}{\varphi \to \psi}$, co widać z przykładu: $P = \{p \to (p \to q)\}$, $\varphi = (p \to q)$, $v : At \to \{0, 1, 2\}$ takie, że $v(p) = 1$, $v(q) = 0$.
- **Twierdzenie**. Jeśli $X \subseteq E(\mathfrak{M})$ i $R \subseteq N(\mathfrak{M})$, to $\mathrm{Der}(R, X) \subseteq N(\mathfrak{M})$. $\square$
  Korzystając z tego twierdzenia, możemy wykazywać niewyprowadzalność reguł w danym systemie (konstruując stosowną matrycę).

- Przez moc matrycy rozumiemy moc algebry tej matrycy. Mówimy, że matryca jest skończona, gdy ma moc skończoną.
- Jeśli $\mathfrak{M}$ jest matrycą skończoną, to $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ jest finitystyczną operacją konsekwencji.
- **Twierdzenie**. Jeśli $\mathfrak{M}$ jest matrycą skończoną, to: $X \in \mathrm{Sat}(\mathfrak{M})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Y \in \mathrm{Sat}(\mathfrak{M})$ dla wszystkich $Y \in Fin(X)$.
- **Dowód**. Implikacja prosta jest oczywista, udowodnimy implikację odwrotną.
- Załóżmy, że $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, A^*)$ jest matrycą skończoną i że $Y \in \mathrm{Sat}(\mathfrak{M})$ dla wszystkich $Y \in Fin(X)$.
- Niech V będzie rodziną wartościowań $v : At \to V$ i niech $V(Y) = \{v \in V : h^v[Y] \subseteq A^*\}$.
- Jeśli $Y \subseteq Z$, to oczywiście $V(Z) \subseteq V(Y)$.
- Nadto, $V(Y) \neq \emptyset$ dla każdego $Y \in Fin(X)$.

- Tak więc, dla każdych $Y_1, \ldots, Y_k \in Fin(X)$ mamy $\emptyset \neq V(Y_1 \cup \ldots \cup Y_k) \subseteq V(Y_1) \cap \ldots \cap V(Y_k)$.
- Oznacza to, że rodzina $\{V(Y) : Y \in Fin(X)\}$ ma własność przecięć skończonych. Istnieje zatem filtr maksymalny (ultrafiltr) H w $\wp(V)$, zawierający wszystkie zbiory $V(Y)$, gdzie $Y \in Fin(X)$.
- V jest największym elementem w rodzinie $\wp(V)$, więc $V \in H$.
- Dla każdej zmiennej $p \in At$ mamy: $\bigcup\limits_{a \in A} \{v \in V : v(p) = a\} = V \in H$.
- Skoro H jest ultrafiltrem, to jest też filtrem pierwszym, a ponieważ A jest zbiorem skończonym, więc dla każdego $p \in At$ istnieje $a \in A$ taki, że $\{v \in V : v(p) = a\} \in H$.
- Mamy też $\{v \in V : v(p) = a\} \cap \{v \in V : v(p) = b\} = \emptyset \notin H$ dla $a \neq b$.
- Definiujemy wartościowanie $w : At \to A$ warunkiem: $w(p) = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{v \in V : v(p) = a\} \in H$.

- Mamy wtedy: $\{v \in V : v(p) = w(p)\} \in H$ dla każdego $p \in At$.
- Niech $Y \in Fin(X)$. Ponieważ $At(Y)$ jest skończony, a H jest filtrem, więc $\{v \in V : v \upharpoonright At(Y) = w \upharpoonright At(Y)\} = \bigcap_{p \in At(Y)} \{v \in V : v(p) = w(p)\} \in H$.
- Tak więc, $\{v \in V : v \upharpoonright At(Y) = w \upharpoonright At(Y)\} \in H$.
- Istnieje zatem wartościowanie $v : At \rightarrow A$ takie, że $v \upharpoonright At(Y) = w \upharpoonright At(Y)$ i $h^v[Y] \subseteq A^*$.
- Stąd $h^w[Y] \subseteq A^*$ dla każdego $Y \in Fin(X)$, co daje $h^w[X] \subseteq A^*$. $\square$

- Niech $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, A^*)$ oraz $\mathfrak{N} = (\mathbf{B}, B^*)$ będą matrycami podobnymi. Mówimy, że:

  1. $\mathfrak{M}$ jest *podmatrycą* $\mathfrak{N}$, gdy $\mathbf{A}$ jest podalgebrą $\mathbf{B}$ oraz $A^* = A \cap B^*$. Jeśli $\mathfrak{M}$ jest podmatrycą $\mathfrak{N}$, to piszemy $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$.
  2. $\mathfrak{M}$ jest *izomorficzna* z $\mathfrak{N}$, gdy istnieje izomorfizm h algebry $\mathbf{A}$ na algebrę $\mathbf{B}$ taki, że dla wszystkich $x \in A$: $x \in A^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(x) \in B^*$. Jeśli $\mathfrak{M}$ jest izomorficzna z $\mathfrak{N}$, to piszemy $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$.

- Zachodzą następujące fakty:

  1. Jeśli $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, to $E(\mathfrak{N}) \subseteq E(\mathfrak{M})$.
  2. Jeśli $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$, to $\overrightarrow{\mathfrak{M}} = \overrightarrow{\mathfrak{N}}$.
  3. Jeśli $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$, to $\overrightarrow{\mathfrak{M}} \leqslant \overrightarrow{\mathfrak{N}}$.
  4. $\overrightarrow{\mathfrak{M}}(Sb(X)) = \bigcap\{E(\mathfrak{N}) : \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M} \wedge X \subseteq E(\mathfrak{N})\}$.
  5. $N(\mathfrak{M}) \subseteq \bigcap\{V(\mathfrak{N}) : \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}\}$.

Matryca $\mathfrak{M}_2' = (\{0, 2\}, \{2\}, \min(2, 2 - x + y), \min(x, y), \max(x, y), 2 - x)$ jest podmatrycą omówionej wcześniej matrycy $\mathfrak{M}_3$. Mamy zatem: $E(\mathfrak{M}_3) \subseteq E(\mathfrak{M}_2')$.

Niech $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, A^*)$ oraz $\mathfrak{N} = (\mathbf{B}, B^*)$ będą matrycami podobnymi. Mówimy, że $f : A \to B$ jest homorfizmem matrycy $\mathfrak{M}$ na matrycę $\mathfrak{N}$, jeśli f jest surjektywnym homomorfizmem algebry $\mathbf{A}$ na algebrę $\mathbf{B}$, a ponadto dla każdego $a \in A$ mamy: $a \in A^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(a) \in B^*$.
Przykład. Homomorfizm $(\{2,3,4\}, \{4\}, \omega_1^{\mathbf{A}}, \omega_2^{\mathbf{A}})$ na $(\{0,1\}, \{1\}, \omega_1^{\mathbf{B}}, \omega_2^{\mathbf{B}})$ definiujemy tak: $f(2) = f(3) = 0$, $f(4) = 1$

$\omega_1^{\mathbf{A}}$	2	3	4
2	4	4	4
3	4	4	4
4	2	3	4

$\omega_2^{\mathbf{A}}$	
2	4
3	4
4	2

$\omega_1^{\mathbf{B}}$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\omega_2^{\mathbf{B}}$	
0	1
1	0

Jeśli istnieje homomorfizm matrycy $\mathfrak{M}$ na matrycę $\mathfrak{N}$, to: $V(\mathfrak{M}) = V(\mathfrak{N})$, $N(\mathfrak{M}) \subseteq N(\mathfrak{N})$, $E(\mathfrak{M}) = E(\mathfrak{N})$.

- Istnieją jednak matryce o tej samej zawartości, które nie są homomorficzne (Prucnal 1969). Niech mianowicie:
  $\mathfrak{M} = (\{1,2,3,4\},\{4\},f^{\mathfrak{M}})$
  $\mathfrak{N} = (\{1,2\},\{2\},f^{\mathfrak{N}})$
- Funkcje $f^{\mathfrak{M}}$ i $f^{\mathfrak{N}}$ opisane są tabelkami:

$f^{\mathfrak{M}}$	1	2	3	4
1	4	4	4	4
2	3	4	3	4
3	2	2	4	4
4	1	2	3	4

$f^{\mathfrak{N}}$	1	2
1	2	2
2	1	2

Wtedy $E(\mathfrak{M}) = E(\mathfrak{N})$, ale nie istnieje homomorfizm z $\mathfrak{M}$ na $\mathfrak{N}$.

Niech $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ będą matrycami takimi, że:

- $\mathfrak{M} = (\{1, 2, 3\}, \{3\}, f)$
- $\mathfrak{N} = (\{1, 3\}, \{3\}, g)$

f	1	2	3
1	3	3	3
2	1	3	3
3	1	3	3

g	1	3
1	3	3
3	1	3

- Wtedy $\mathfrak{M}$ jest homomorficzna z $\mathfrak{N}$, co poświadcza homomorfizm h: $h(1) = h(2) = 1$, $h(3) = 3$.
- Mamy: $r_0 \in N(\mathfrak{N})$, ale $r_0 \notin N(\mathfrak{M})$.
- Mamy też: $E(\mathfrak{M}) = E(\mathfrak{N})$ oraz $r_0 \in V(\mathfrak{M}) - N(\mathfrak{M})$.

- Relacja R jest *kongruencją* matrycy $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, A^*)$, gdy R jest kongruencją algebry $\mathbf{A}$ oraz dla wszystkich $x, y \in A$: jeśli xRy i $x \in A^*$, to $y \in A^*$.
- Każda kongruencja R matrycy $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, A^*)$ wyznacza *matrycę ilorazową* $\mathfrak{M}/R = (\mathbf{A}/R, A^*/R)$, gdzie $\mathbf{A}/R$ jest algebrą ilorazową oraz $A^* = \{[a]_R : a \in A^*\}$.
- **Twierdzenie**. Jeśli R jest kongruencją matrycy $\mathfrak{M}$, to konsekwencja matrycowa wyznaczona przez $\mathfrak{M}$ jest identyczna z konsekwencją matrycową wyznaczoną przez matrycę ilorazową: $\overrightarrow{\mathfrak{M}} = \overrightarrow{\mathfrak{M}/R}$.
- **Dowód**. Niech $\mathfrak{M} = (\mathbf{A}, A^*)$ i niech R będzie kongruencją matrycy $\mathfrak{M}$.

- Pokażemy najpierw, że $\overrightarrow{\mathfrak{M}} \leqslant \overrightarrow{\mathfrak{M}/R}$.
- Przypuśćmy, że $\alpha \notin \overrightarrow{\mathfrak{M}/R}(X)$. Wtedy istnieje homomorfizm $h : \mathbf{S} \to \mathbf{A}/R$ taki, że $h[X] \subseteq A^*/R$, ale $h(\alpha) \notin A^*/R$.
- Na mocy aksjomatu wyboru istnieje odwzorowanie $v : At \to A$ takie, że $v(p) \in h(p)$ dla każdej zmiennej $p \in At$.
- Rozszerzamy odwzorowanie v do homomorfizmu $h^v : \mathbf{S} \to \mathbf{A}$.
- Wtedy $h^v(\varphi) \in h(\varphi)$ dla każdego $\varphi \in S$.
- Stąd $h^v[X] \subseteq A^*$, ale $h^v(\alpha) \notin A^*$, co oznacza, że $\alpha \notin \overrightarrow{\mathfrak{M}}(X)$.

- Pokażemy z kolei, że $\overrightarrow{\mathfrak{M}/R} \leqslant \overrightarrow{\mathfrak{M}}$.
- Przypuśćmy, że $\alpha \notin \overrightarrow{\mathfrak{M}}(X)$.
- Wtedy $h^v[X] \subseteq A^*$, ale $h^v(\alpha) \notin A^*$ dla pewnego $v : At \to A$.
- Niech $h_R : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/R$ będzie homomorfizmem kanonicznym, czyli $h_R(\alpha) = [\alpha]_R$ dla $a \in A$.
- Złożenie $h = h_R \circ h^v$ jest homomorfizmem z $\mathbf{S}$ w $\mathbf{A}/R$.
- Mamy ponadto: $h[X] = h_R[h^v[X]] \subseteq A^*/R$, ale $h(\alpha) = h_R(h^v(\alpha)) \notin A^*/R$, co oznacza, że $\alpha \notin \overrightarrow{\mathfrak{M}/R}(X)$.
- Na mocy obu nierówności $\overrightarrow{\mathfrak{M}} \leqslant \overrightarrow{\mathfrak{M}/R}$ i $\overrightarrow{\mathfrak{M}/R} \leqslant \overrightarrow{\mathfrak{M}}$ mamy zatem $\overrightarrow{\mathfrak{M}} = \overrightarrow{\mathfrak{M}/R}$. □

- *Produktem* rodziny matryc podobnych $\{\mathfrak{M}_t\}_{t\in T}$, gdzie $\mathfrak{M}_t = (\mathbf{A}_t, A_t^*)$ nazywamy matrycę $\prod\limits_{t\in T} \mathfrak{M}_t = (\prod\limits_{t\in T} \mathbf{A}_t, \prod\limits_{t\in T} A_t^*)$.
- Zachodzą następujące fakty:
  - $E(\prod\limits_{t\in T} \mathfrak{M}_t) = \bigcap\{E(\mathfrak{M}_t) : t \in T\}$. $\square$
  - **Twierdzenie**. Dla każdego $X \subseteq S$: $\overrightarrow{\prod\limits_{t\in T} \mathfrak{M}_t}(X) = \bigcap\{\overrightarrow{\mathfrak{M}_t}(X) : t \in T\}$, o ile $X \in \mathrm{Sat}(\mathfrak{M}_t)$ dla wszystkich $t \in T$; w przeciwnym przypadku $\overrightarrow{\prod\limits_{t\in T} \mathfrak{M}_t}(X) = S$.
  - **Dowód**. Udowodnimy obie inkluzje:
    1. $\bigcap\{\overrightarrow{\mathfrak{M}_t}(X) : t \in T\} \subseteq \overrightarrow{\prod\limits_{t\in T} \mathfrak{M}_t}(X)$
    2. $\overrightarrow{\prod\limits_{t\in T} \mathfrak{M}_t}(X) \subseteq \bigcap\{\overrightarrow{\mathfrak{M}_t}(X) : t \in T\}$.

  Niech $\pi_t : \prod\limits_{t\in T} A_t \to A_t$ oznacza rzutowanie na t-ty czynnik produktu.

- Dowód 1). Załóżmy, że $\alpha \notin \overrightarrow{\prod_{t \in T} \mathfrak{M}_t}(X)$. Istnieje wtedy homomorfizm $h : \mathbf{S} \to \prod_{t \in T} \mathbf{A}_t$ taki, że $h[X] \subseteq \prod_{t \in T} \mathbf{A}_t^*$, ale $\alpha \notin \prod_{t \in T} \mathbf{A}_t^*$.
- Stąd $\pi_t[h[X]] \subseteq A_t^*$ dla każdego $t \in T$, ale $\pi_s(h(\alpha)) \notin A_s^*$ dla pewnego $s \in T$.
- Dla każdego $t \in T$ odwzorowanie $\pi_t \circ h$ jest homomorfizmem $\mathbf{S}$ w $\mathbf{A}_t$, a zatem $X \in \mathrm{Sat}(\mathfrak{M}_t)$ dla każdego $t \in T$, ale $\alpha \notin \overrightarrow{\mathfrak{M}_s}(X)$ dla pewnego $s \in T$.
- Oznacza to, że $\alpha \notin \bigcap\{\overrightarrow{\mathfrak{M}_t}(X) : t \in T\}$.
- Udowodniliśmy zatem inkluzję $\bigcap\{\overrightarrow{\mathfrak{M}_t}(X) : t \in T\} \subseteq \overrightarrow{\prod_{t \in T} \mathfrak{M}_t}(X)$.

- Dowód 2). Załóżmy, że $X \in \mathrm{Sat}(\mathfrak{M}_t)$ dla każdego $t \in T$ i niech $\alpha \notin \bigcap\{\overrightarrow{\mathfrak{M}_t}(X) : t \in T\}$.
- Istnieje zatem rodzina $\{h_t : t \in T\}$ homomorfizmów taka, że $h_t : \mathbf{S} \to \mathbf{A}_t$, $h_t[X] \subseteq A_t^*$ dla każdego $t \in T$ i $h_s(\alpha) \notin A_s^*$ dla pewnego $s \in T$.
- Zdefiniujmy odwzorowanie $h : \mathbf{S} \to \prod\limits_{t \in T} \mathbf{A}_t$ warunkiem: $h(\varphi) = (h_t(\varphi))_{t \in T}$ dla $\varphi \in S$.
- Wtedy h jest homomorfizmem, a ponadto $h[X] \subseteq \prod\limits_{t \in T} A_t^*$, ale $h(\alpha) \notin \prod\limits_{t \in T} A_t^*$.
- Oznacza to, że $\alpha \notin \overrightarrow{\prod\limits_{t \in T} \mathfrak{M}_t}(X)$.
- Udowodniliśmy zatem inkluzję $\overrightarrow{\prod\limits_{t \in T} \mathfrak{M}_t}(X) \subseteq \bigcap\{\overrightarrow{\mathfrak{M}_t}(X) : t \in T\}$, co kończy dowód twierdzenia. $\square$

- Szczególną rolę pełnią tzw. matryce Lindenbauma. Dla dowolnych $R \subseteq \mathbb{R}_S$ oraz $X \subseteq S$ matrycę:

$$\mathfrak{M}^{R,X} = (\mathbf{S}, C_R(X))$$

nazywamy *matrycą Lindenbauma* dla systemu (R, X).

- Zachodzą następujące fakty:
  1. $E(\mathfrak{M}^{R,X}) = \{\alpha : Sb(\alpha) \subseteq C_R(X)\}$.
  2. Jeśli $r_* \in \mathrm{Adm}(R, X)$, to $E(\mathfrak{M}^{R,X}) = C_R(X)$.
- Jeśli $r_* \in \mathrm{Adm}(R, X)$, to każda strukturalna reguła niezawodna w matrycy $\mathfrak{M}^{R,X}$ jest regułą normalną tej matrycy.

- Niech (R, X) będzie systemem logiki zdaniowej, a $\mathfrak{M}$ matrycą logiczną podobną do algebry języka tego systemu. Jeżeli $E(\mathfrak{M}) = C_R(X) = C_{R,X}(\emptyset)$, to mówimy, że matryca $\mathfrak{M}$ jest *(słabo) adekwatna* dla (R, X).
- Udowodnimy za chwilę, że: Dla każdej logiki zdaniowej (R, X) takiej, że $r_* \in \mathrm{Adm}(R, X)$ oraz $R - \{r_*\} \subseteq \mathrm{Struct}$ istnieje matryca $\mathfrak{M}$ taka, że: $C_R(X) = E(\mathfrak{M})$ oraz $R - \{r_*\} \subseteq N(\mathfrak{M})$.
- Mogłoby się wydawać, że fakt powyższy czyni pytanie o istnienie semantyki dla dowolnych rachunków zdaniowych całkiem trywialnym: dla każdego rachunku (R, X) takiego, że $r_* \in \mathrm{Adm}(R, X)$ oraz $R - \{r_*\} \subseteq \mathrm{Struct}$ zachodzi $C_R(X) = E(\mathfrak{M}^{R,X})$, gdzie $\mathfrak{M}^{R,X}$ jest matrycą Lindenbauma dla (R, X). Tak jednak nie jest: poszukujemy nie *całkiem dowolnych* semantyk dla rachunków zdaniowych, lecz raczej semantyk, spełniających pewne określone warunki.

- $\mathfrak{M}_2$ jest (minimalną) matrycą adekwatną dla logiki klasycznej.
- Logika modalna (R_{0a*}, A_{S5}) nie ma żadnej skończonej matrycy adekwatnej. Istnieje jednak dla niej nieskończona matryca adekwatna (matryca Wajsberga).
- Istnieją matryce skończone, które nie są skończenie aksjomatyzowalne (wyniki Wojtylaka i Pałasińskiej).
- Skończenie wartościowe wielowartościowe logiki Łukasiewicza mają skończone matryce słabo adekwatne.
- Nieskończenie wartościowa logika Łukasiewicza ma nieskończoną matrycę słabo adekwatną.
- Jeśli $C_R(X) = E(\mathfrak{M})$, to:
  1. $\mathrm{Adm}(R, X) = V(\mathfrak{M})$
  2. $\mathrm{Der}(R, X) \subseteq V(\mathfrak{M})$
  3. $N(\mathfrak{M}) \subseteq \mathrm{Adm}(R, X)$.

- **Twierdzenie** (Lindenbauma o matrycach adekwatnych). Dla każdego systemu logicznego (R, X) takiego, że $r_* \in R$, $R - \{r_*\} \subseteq \mathrm{Struct}$ istnieje skończona lub przeliczalna matryca $\mathfrak{M}$ taka, że $C(R, X) = E(\mathfrak{M})$ oraz $R - \{r_*\} \subseteq N(\mathfrak{M})$.
- **Dowód**. Niech $\mathbf{S} = (S, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ będzie językiem zdaniowym, gdzie τ_{ω_i} jest liczbą argumentów funktora ω_i, dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Niech (R, X) będzie systemem logicznym w języku $\mathbf{S}$.
- Definiujemy *matrycę Lindenbauma* $\mathfrak{M}^{R,X}$ dla systemu (R, X):
  1. Algebrą tej matrycy jest algebra $(S, \omega_1^{\mathfrak{M}^{R,X}}, \ldots, \omega_n^{\mathfrak{M}^{R,X}})$.
  2. $\omega_i^{\mathfrak{M}^{R,X}} : S^{\tau_{\omega_i}} \to S$, dla $1 \leqslant i \leqslant n$.
  3. Zbiorem wartości wyróżnionych tej matrycy jest zbiór $C(R, X)$.
- Mamy zatem: $\mathfrak{M}^{R,X} = (S, C(R, X), \omega_1^{\mathfrak{M}^{R,X}}, \ldots, \omega_n^{\mathfrak{M}^{R,X}})$.

- Najpierw pokażemy, że $E(\mathfrak{M}^{R,X}) \subseteq C(R, X)$.
- Załóżmy, że $\varphi \in E(\mathfrak{M}^{R,X})$. Znaczy to, że $h^v(\varphi) \in C(R, X)$ dla każdego $v : At \rightarrow S$.
- Niech $v_0 : At \rightarrow S$ będzie wartościowaniem takim, że $v_0(p_i) = p_i$ dla każdego $p_i \in At$.
- Wtedy $h^{v_0}(\varphi) = \varphi$, mamy zatem $\varphi \in C(R, X)$.
- Pokażemy z kolei, że $C(R, X) \subseteq E(\mathfrak{M}^{R,X})$.
- Załóżmy, że $\varphi \in C(R, X)$. Na mocy założeń naszego twierdzenia $Sb[\{\varphi\}] \subseteq C(R, X)$.
- Znaczy to, że $h^v(\varphi) \in C(R, X)$ dla każdego $v : At \rightarrow S$. Stąd $\varphi \in E(\mathfrak{M}^{R,X})$.
- Obie udowodnione inkluzje dają równość $C(R, X) = E(\mathfrak{M})$.
- Trzeba jeszcze pokazać, że $R - \{r_*\} \subseteq N(\mathfrak{M})$.
- Niech $r \in R - \{r_*\}$, $v : At \rightarrow S$, $(P, \varphi) \in r$ i $h^v[P] \subseteq C(R, X)$.
- Ponieważ wszystkie reguły w R są strukturalne, więc $h^v(\varphi) \in r$, a zatem $h^v(\varphi) \in C(R, X)$. $\square$

- Na mocy definicji reguł strukturalnych powyższe twierdzenie można sformułować także w obu następujących postaciach:
  1. Dla każdego systemu logicznego (R, X) takiego, że $R \subseteq \mathrm{Struct}$ i $X = Sb[X]$ istnieje skończona lub przeliczalna matryca adekwatna $\mathfrak{M}$ taka, że $R \subseteq N(\mathfrak{M})$. □
  2. Dla każdego systemu logicznego (R, X) takiego, że $r_* \in R$ istnieje skończona lub przeliczalna matryca adekwatna. □
- Wynika stąd, że pojęcie syntaktyczne $C(R, X)$ może zostać scharakteryzowane za pomocą semantycznego pojęcia matrycy logicznej:

  Twierdzenie. Dla dowolnego systemu (R, X) w języku $\mathbf{S} = (S, \omega_1, \ldots, \omega_n)$:
  1. Jeśli $R \subseteq \mathrm{Struct}$ i $X = Sb[X]$, to $\varphi \in C(R, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej matrycy $\mathfrak{M}$ takiej, że $R \subseteq V(\mathfrak{M})$ zachodzi implikacja: jeśli $X \subseteq E(\mathfrak{M})$, to $\varphi \in E(\mathfrak{M})$.
  2. Jeśli $r_* \in R$, to $\varphi \in C(R, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej matrycy $\mathfrak{M}$ takiej, że $R \subseteq V(\mathfrak{M})$ zachodzi implikacja: jeśli $X \subseteq E(\mathfrak{M})$, to $\varphi \in E(\mathfrak{M})$. □

- Matryca adekwatna dla $S5$, skonstruowana przez Mordechaja Wajsberga:
- Niech $\mathfrak{M}_{S5} = ((\{0,1\}^{\mathbb{N}}, g^{\rightarrow}, g^{\vee}, g^{\wedge}, g^{\neg}), \{\mathbf{1}\})$.
  $\mathbf{1} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_n = 1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$
  $g^{\neg}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (1 - x_n))_{n\in\mathbb{N}}$
  $g^{\wedge}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\min(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$
  $g^{\vee}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\max(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$
  $g^{\rightarrow}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \mathbf{1}$, jeśli $x_n \leqslant y_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$
  $g^{\rightarrow}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = g^{\neg}(\mathbf{1})$ w przeciwnym przypadku.
- Matryca $\mathfrak{M}_{S5}$ jest adekwatna dla systemu $S5$, czyli $E(\mathfrak{M}_{S5}) = C(R_{0a*}, A_{S5})$.
- Nie istnieje skończona matryca adekwatna dla (R_{0a*}, A_{S5}).

- Matryce dla logik wielowartościowych Łukasiewicza (Wajsberg 1935):
  $\mathfrak{M}_n = ((A_n, f^{\rightarrow}, f^{\vee}, f^{\wedge}, f^{\neg}), \{1\})$ dla $n \in \mathbb{N}$
  $A_n = \{\frac{k}{n-1} : k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$
  $f^{\rightarrow}(x, y) = \min(1 - x + y, 1)$
  $f^{\vee}(x, y) = \max(x, y)$
  $f^{\wedge}(x, y) = \min(x, y)$
  $f^{\neg}(x) = 1 - x$
- W szczególności, $\mathfrak{M}_2$ jest matrycą dla klasycznego rachunku zdań.
- Aksjomatyczne systemy logik wielowartościowych Łukasiewicza podane zostały na poprzednim wykładzie. Dowodzi się, że:
  1. $C(R_{0*}, \text{Ł}_n) = E(\mathfrak{M}_n)$
  2. $C(R_{0*}, \text{Ł}_\infty) = E(\mathfrak{M}_\infty)$
- Uniwersum matrycy $\mathfrak{M}_\infty$ jest zbiór liczb rzeczywistych z przedziału $[0, 1]$

- Matryca $\mathfrak{M}$ jest matrycą minimalną dla systemu (R, X), gdy:
  1. $E(\mathfrak{M}) = C(R, X)$
  2. moc matrycy $\mathfrak{M}$ jest niewiększa od mocy każdej matrycy adekwatnej dla (R, X).
- Zachodzą następujące fakty:
  1. Dany system może mieć matryce adekwatne różnych mocy: np. matrycą adekwatną dla systemu $(R_{0*}, E(\mathfrak{M}_3))$ jest matryca $\mathfrak{M}_3$ o trzech elementach, ale matrycą adekwatną dla tego systemu jest także przeliczalna matryca Lindenbauma.
  2. Matryca minimalna dla systemu intuicjonistycznego jest nieskończona.
  3. Matryca minimalna dla systemu modalnego $S5$ jest nieskończona.
  4. $\mathfrak{M}_2$ jest minimalną matrycą adekwatną dla klasycznego rachunku zdań.

- Można za punkt wyjścia przyjąć matrycę logiczną $\mathfrak{M}$ i poszukiwać systemu logicznego (R, X), dla którego ta matryca byłaby adekwatna.
- Trywialnym rozwiązaniem jest w takim przypadku system $(N(\mathfrak{M}), E(\mathfrak{M}))$.
- W tym podejściu nie chodzi jednak o zredukowanie pojęcia prawdziwości w matrycy $\mathfrak{M}$, ale o charakterystykę zbioru $E(\mathfrak{M})$.
- Dla przykładu, problemem może być znalezienie skończonego zbioru X oraz skończonego zbioru R standardowych reguł wnioskowania takich, że $C(R \cup \{r_*\}, X) = E(\mathfrak{M})$.

- Nie jest jednak tak, że dla każdej matrycy logicznej istnieje skończony zbiór X formuł i skończony zbiór R reguł standardowych takie, że $C(R \cup \{r_*\}, X) = E(\mathfrak{M})$.
  Kontrprzykład (Pałasińska 1994): rozważmy język czysto implikacyjny i zdefiniujmy trójelementowe matryce na zbiorze $\{0, 1, 2\}$ z jedną wartością wyróżnioną 2:

$\to$	0	1	2
0	1	2	2
1	2	2	2
2	1	2	2

$\to$	0	1	2
0	2	2	2
1	2	2	2
2	1	2	2

Dowodzi się, że żadna z tych matryc nie jest skończenie aksjomatyzowalna. Z prac Rautenberga wynika, że każdy system logiczny wyznaczony przez matryce dwuelementowe jest skończenie aksjomatyzowalny.

- Załóżmy, że dwa rachunki logiczne $\mathbb{Z} = (R, X)$ i $\mathbb{Z}' = (R', X')$ mają matryce adekwatne $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$.
- Jeżeli za pomocą funkcji matrycy $\mathfrak{M}'$ możemy zdefiniować taką matrycę $\mathfrak{N}$, że $E(\mathfrak{M}) = E(\mathfrak{N})$, to mówimy, że rachunek $\mathbb{Z}$ ma model w rachunku $\mathbb{Z}'$; w pewnym sensie Z zawiera się w Z'.
- W ten sposób pokazano np., że klasyczny dwuwartościowy rachunek zdań ma model m.in. w implikacyjno-negacyjnym trójwartościowym rachunku zdań Łukasiewicza.

- Mówimy, że matryca $\mathfrak{M}$ jest *silnie adekwatna* dla logiki (R, X) (lub dla operacji konsekwencji $C_{R,X}$), gdy dla wszystkich $Y \subseteq S$: $C_R(X \cup Y) = \overrightarrow{\mathfrak{M}}(Y)$.
- Wprost z definicji wynika, że $\mathfrak{M}$ jest silnie adekwatna dla logiki (R, X) wtedy i tylko wtedy, gdy $N(\mathfrak{M}) = \mathrm{Der}(R, X)$.
- Niech X_0 będzie zbiorem następujących formuł:

  1. $p \to p$
  2. $(p \to q) \to ((q \to s) \to (p \to s))$
  3. $(q \to s) \to ((p \to q) \to (p \to s))$
  4. $((p \to p) \to (p \to p)) \to (p \to p)$
  5. $(p \wedge q) \to p$
  6. $(p \wedge q) \to q$
  7. $(p \to q) \to ((p \to s) \to (p \to (q \wedge s)))$
  8. $p \to (p \vee q)$
  9. $q \to (p \vee q)$
  10. $(p \to s) \to ((q \to s) \to ((p \vee q) \to s))$.

- Zachodzi wtedy następujący fakt (S_1 to zbiór formuł pozytywnych, czyli bez funktora negacji):
- Jeśli (R, X) jest systemem niezmienniczym nad $\mathbf{S}_1$ takim, że $r_0 \in \mathrm{Der}(R, X)$ oraz $X_0 \subseteq C_R(X)$, to istnieje matryca $\mathfrak{M}$ silnie adekwatna dla (R, X).
- O matrycach silnie adekwatnych dla różnych systemów logicznych wiadomo np., że:
  1. Nie istnieją matryce silnie adekwatne dla systemów modalnych $S1$–$S3$ Lewisa.
  2. Matryca $\mathfrak{M}_2$ jest silnie adekwatna dla logiki klasycznej.
  3. Istnieje matryca silnie adekwatna dla systemu modalnego $(R_{0a}, Sb(A_{S5}))$ (różna od wspomnianej wcześniej matrycy Wajsberga).

- **Twierdzenie** (Łoś, Suszko 1958, Wójcicki 1970). Niech C będzie strukturalną operacją konsekwencji (czyli $C = C_{R,X}$ dla pewnego systemu niezmienniczego (R, X)). Istnieje matryca silnie adekwatna dla C (a więc także dla (R, X)) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek dla wszystkich $K \subseteq \wp(S)$, $Z \subseteq S$ i $\alpha \in S$: jeśli K jest rodziną zbiorów C-niesprzecznych taką, że dla wszystkich $X, Y \in K$ (gdzie $X \neq Y$), jeśli $At(\bigcup K) \cap At(Z \cup \{\alpha\}) = \emptyset$, to zachodzi implikacja: jeśli $\alpha \in C(\bigcup K \cup Z)$, to $\alpha \in C(Z)$. $\square$
- **Wniosek**. Niech C będzie finitystyczną strukturalną operacją konsekwencji. Wtedy istnieje matryca silnie adekwatna dla C wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $\alpha \in S$, $Z \subseteq S$ i wszystkich C-niesprzecznych zbiorów $Y \subseteq S$ zachodzi implikacja: jeśli $\alpha \in C(Z \cup Y)$ i $At(\{\alpha\} \cup Z) \cap At(Y) = \emptyset$, to $\alpha \in C(Z)$. $\square$

Powyższe sformułowanie tego twierdzenia pochodzi z monografii Pogorzelski, Wojtylak 2008. Rozważmy inne sformułowanie:

- Niech $V(X)$ oznacza zbiór wszystkich zmiennych zdaniowych występujących w formułach ze zbioru X.
- Mówimy, że system $(\mathbf{S}, C)$ jest jednorodny, gdy dla dowolnych $X \subseteq S$, $Y \subseteq S$ i $\alpha \in S$: jeśli $V(X) \cap V(Y) = V(\{\alpha\}) \cap V(Y) = \emptyset$, $C(Y) \neq S$ i $\alpha \in C(X \cup Y)$, to $\alpha \in C(X)$.
- Warunek jednorodności głosi, że jeśli zbiór $X \cup \{\alpha\}$ ma rozdzielone zmienne z niesprzecznym zbiorem Y, to α musi być konsekwencją samego zbioru X, o ile α jest konsekwencją zbioru $X \cup Y$.
- Niech $X \approx Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru formuł Z i każdego α oraz dowolnych automorfizmów f, g języka $\mathbf{S}$ odwzorowujących zmienne zdaniowe na zmienne zdaniowe, jeśli zbiór $f[X] \cup g[Y]$ ma rozdzielone zmienne ze zbiorem $Z \cup \{\alpha\}$, to: $\alpha \in C(Z \cup f[X])$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in C(Z \cup g[Y])$.
- Mówimy, że system $(\mathbf{S}, C)$ jest regularny, gdy dla każdej rodziny $\mathcal{R}$ zbiorów pozostających w relacji $\approx$, suma tej rodziny pozostaje w relacji $\approx$ z każdym swoim elementem.

- Trudny w sformułowaniu warunek regularności jest równoważny z warunkiem separowalności: dla dowolnej rodziny $\mathcal{R}$ zbiorów formuł takiej, że:

  1. jeśli $X, Y \in \mathcal{R}$, $X \neq Y$, to $V(X) \cap V(Y) = \emptyset$
  2. $\bigcup\{V(X) : X \in \mathcal{R}\}$ nie jest zbiorem *wszystkich zmiennych zdaniowych*
  3. jeśli $X \in \mathcal{R}$, to $C(X) \neq S$,

  mamy $C(\bigcup \mathcal{R}) \neq S$ (czyli: suma niesprzecznych zbiorów o rozdzielonych zmiennych, które łącznie nie wyczerpują wszystkich zmiennych, jest niesprzeczna).
- **Twierdzenie**. Jeśli strukturalny system $(\mathbf{S}, C)$ jest jednorodny i regularny, to istnieje dla niego matryca silnie adekwatna, tj. taka matryca $\mathfrak{M}$, że $C = C_{\mathfrak{M}}$. □
- Dowód tego twierdzenia znajdą słuchacze w monografii Wójcicki 1984, str. 147.

- Niech $\mathcal{K}$ będzie klasą matryc podobnych. Definiujemy operację konsekwencji wyznaczoną przez tę klasę:
  $\alpha \in C_{\mathcal{K}}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in C_{\mathfrak{M}}(X)$ dla wszystkich $\mathfrak{M} \in \mathcal{K}$.
- Klasę $\mathcal{K}$ matryc nazywamy adekwatną dla systemu $(\mathbf{S}, C)$, gdy dla dowolnych $X \subseteq S$ i $\alpha \in S$ zachodzi warunek: $\alpha \in C(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in C_{\mathcal{K}}(X)$.
- **Twierdzenie**. Dla każdego systemu $(\mathbf{S}, C)$ klasa wszystkich matryc Lindenbauma dla tego systemu (nazywana wiązką Lindenbauma) jest adekwatna dla $(\mathbf{S}, C)$. $\square$
- Matrycę $\mathfrak{M}$ dla $(\mathbf{S}, C)$ nazywamy C-matrycą, gdy $C \leqslant C_{\mathfrak{M}}$.
- Klasę wszystkich C-matryc oznaczamy przez $Matr(C)$.
- Dzieląc każdą z matryc z $Matr(C)$ przez jej największą kongruencję otrzymujemy klasę $Matr^*(C)$ matryc ilorazowych, których jedyną kongruencją jest relacja identyczności.

Niniejsza prezentacja zostanie uzupełniona o następujące tematy:

- Uogólnione matryce (matryce z rodziną zbiorów wartości wyróżnionych).
- Klasy matryc jako semantyki dla systemów logicznych.
- *Sb*-adekwatność.
- Operacje konsekwencji generowane przez algebry Heytinga.
- Filtr-konsekwencje.
- Wybrane twierdzenia o matrycach logicznych.

- Czelakowski, J. 2001. *Protoalgebraic logics.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.
- Łoś, J. 1949. *O matrycach logicznych*. Wrocław.
- Łoś, J., Suszko, R. 1958. Remarks on sentential logics. *Indagationes Mathematicae* 20, 177–189.
- Łukasiewicz, J., Tarski, A. 1930. Untersuchungen über den Aussagenkalkül. *Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie* Cl III, 23, 30–50.
- Marek, I. 1993. Początki matryc logicznych. *Acta Universitatis Wratislaviensis* No 1445, Seria *Logika* 15, 5–44.
- Pałasińska, K. 1994. Three-element nonfinitely axiomatizable matrices. *Studia Logica* 53, 362–372.
- Pogorzelski, W.A. 1975. *Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Pogorzelski, W.A., Wojtylak, P. 2008. *Completeness theory for propositional logics.* Birkhäuser, Basel Boston Berlin.

- Prucnal, T. 1969. O wzajemnej interpretowalności wielowartościowych rachunków zdań Łukasiewicza. *Zeszyty Naukowe WSP w Opolu* 6.
- Suszko, R. 1957. Formalna teoria wartości logicznych. *Studia Logica* 6, 145–237.
- Tarski, A. 1930. Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften. *Monatshefte für Mathematik und Physik* 37, 361–404.
- Wajsberg, M. 1935. Beiträge zum Metaaussagenkalkül I. *Monatshefte für Mathematik und Physik* 42, 221–242.
- Wójcicki, R. 1970. Some remarks on the consequence operation in sentential logics. *Fundamenta Mathematicae* 68, 269–279.
- Wójcicki, R. 1984. *Lectures on propositional calculi.* Ossolineum, Wrocław.
- Zygmunt, J. 1984. An essay in matrix semantics for consequence relations. *Acta Universitatis Wratislaviensis* No 741.