4. Wynikanie logiczne

4.1. Definicje

Formuła A ***wynika logicznie*** ze zbioru formuł X, gdy każdy model zbioru X jest też modelem A, tj. gdy A jest prawdziwa w każdej interpretacji, w której prawdziwe są wszystkie elementy zbioru X. Ustalenie zachodzenia wynikania logicznego metodą wprost wymaga więc w ogólności przejrzenia nieskończenie wielu interpretacji, co nie jest oczywiście procedurą efektywną. Zauważmy jednak, że formuła A ***nie*** wynika logicznie ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy w co najmniej jednym modelu dla X formuła A jest fałszywa. Zatem, gdy dla ustalonego X oraz A uda się wykluczyć sytuację polegającą na tym, że w co najmniej jednej interpretacji formuła A jest fałszywa, a wszystkie formuły ze zbioru X są w tejże interpretacji prawdziwe, to potwierdzimy w ten sposób, że A wynika logicznie z X. Jeszcze inaczej mówiąc: jeśli wykluczymy przypadek, że wszystkie formuły ze zbioru X oraz formuła $\neg A$ są współprawdziwe, to wykażemy, iż A wynika logicznie z X.

Ustalanie za pomocą metody drzew semantycznych czy dana formuła A wynika logicznie z danego (skończonego) zbioru formuł X polega na:

- założeniu, że wszystkie formuły z X są prawdziwe;
- przypuszczeniu, że formuła $\neg A$ jest prawdziwa;
- zbudowaniu drzewa semantycznego, w którego pniu są wszystkie formuły ze zbioru X oraz formuła $\neg A$.

Możliwe są następujące sytuacje:

- otrzymane drzewo semantyczne ma wszystkie gałęzie zamknięte; wtedy formuła A wynika logicznie ze zbioru formuł X;[1]
- otrzymane drzewo semantyczne zawiera gałęzie otwarte; wtedy formuła A nie wynika logicznie ze zbioru X, a znalezione gałęzie otwarte pozwalają skonstruować takie interpretacje, które są modelami zbioru przesłanek X, a w których formuła A jest fałszywa.

W jeszcze innym sformułowaniu:

- formuła A ***wynika logicznie*** ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór formuł $X \cup \{\neg A\}$ jest ***semantycznie sprzeczny***;
- formuła A ***nie wynika logicznie*** ze zbioru formuł X wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór formuł $X \cup \{\neg A\}$ jest ***semantycznie niesprzeczny***.

4.2. Przykłady

Pobawmy się przykładami ilustrującymi zastosowania omawianej metody w ustalaniu, czy zachodzi wynikanie logiczne.

PRZYKŁAD III.4.1.: ŚMIESZNI POLITYCY

Polityka to sprawa poważna, dla dorosłych chłopców i dziewczynek. Nie zaprzątając sobie głowy tym, czy w podanym niżej wnioskowaniu przesłanka i wniosek są prawdziwe, ustalimy jaki jest związek logiczny między przesłanką i wnioskiem:

Z pewnego polityka śmieją się wszyscy politycy.
Zatem jakiś polityk śmieje się sam z siebie.

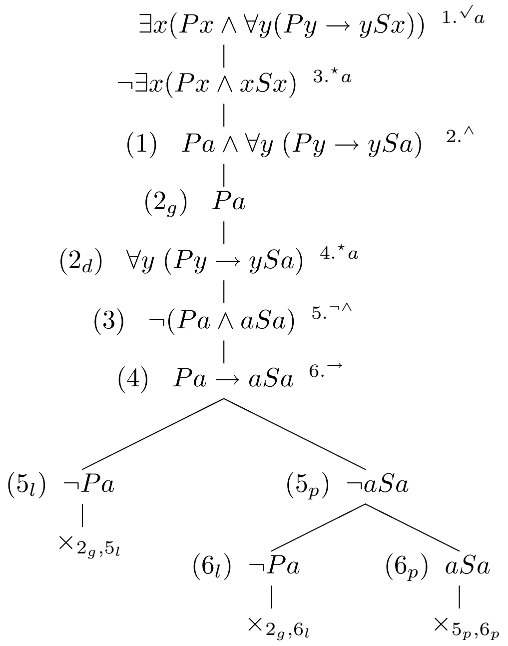
---

[1] Dowód, że zamknięcie wszystkich gałęzi takiego drzewa ma miejsce dokładnie wtedy, gdy zachodzi wspomniane wynikanie logiczne, podajemy w rozdziale IV.

Wnioskowanie to przebiega wedle następującej reguły:

$$\frac{\exists x(Px \wedge \forall y(Py \rightarrow ySx))}{\exists x(Px \wedge xSx)}$$

Gdyby reguła ta była niezawodna, to zbudowane wedle reguł sztuki drzewo semantyczne (w pniu przesłanka oraz zaprzeczony wniosek) miałoby wszystkie gałęzie zamknięte. Sprawdźmy:



I oto istotnie, wszystkie gałęzie drzewa są zamknięte. Rozpatrywana reguła jest więc niezawodna: nie istnieje interpretacja, w której prawdziwa byłaby przesłanka, a wniosek fałszywy. A to oznacza, że wniosek wynika logicznie z przesłanki. Zatem **każde** wnioskowanie, przeprowadzone wedle powyższej reguły jest dedukcyjne: jeśli jego przesłanka jest prawdziwa, to i wniosek jest prawdziwy.

Jeśli nie szkoda ci czasu, to możesz spróbować odnieść uzyskany przed chwilą wynik do sytuacji politycznej np. w Rzeczpospolitej Polskiej. Zastanów się: czy aby uzyskać poczucie autoironii trzeba być najpierw wyśmianym przez wszystkich?

Przykład III.4.2.: Szaleni studenci

Na prowadzonych przez nas zajęciach z logiki matematycznej nigdy dotąd nie doszło do aktów przemocy fizycznej, czego nie można powiedzieć — opierając się na doniesieniach prasowych — o wszystkich placówkach edukacyjnych w Rzeczpospolitej Polskiej. Może bezkonfliktowość naszego procesu dydaktycznego gwarantowana jest tym, że piszący te słowa, którego idolem jest Dawid ben Jesse, zawsze przychodzi na zajęcia z procą (która jest szybsza od siekiery, nawet dzierżonej przez niezrównaną Angelikę)?

Rozważmy wnioskowanie:

Wszyscy siedzący w tej sali to studenci.

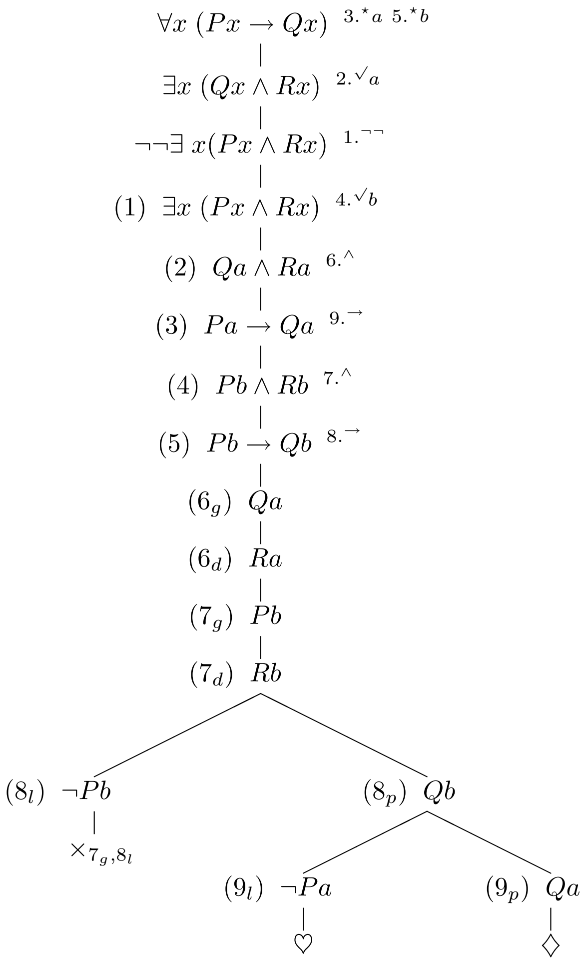
Wśród studentów jest szaleniec.

Stąd wynika, że wśród siedzących w tej sali nie ma szaleńca.

Reguła wnioskowania, wedle której powyższe wnioskowanie jest przeprowadzane, ma postać następującą:

$$\begin{array}{c}\forall x\,(Px \rightarrow Qx)\\ \exists x\,(Qx \wedge Rx)\\ \hline \neg\exists x\,(Px \wedge Rx)\end{array}$$

Budujemy drzewo semantyczne, w którego pniu są przesłanki tej reguły oraz zaprzeczenie jej wniosku:



Widać, że w drzewie tym są gałęzie otwarte. Do żadnej z formuł, na żadnej z gałęzi otwartych, nie można już zastosować żadnych reguł. Gałęzie otwarte odpowiadają interpretacjom, w których wszystkie przesłanki reguły są prawdziwe, a jej wniosek fałszywy. Reguła jest zatem zawodna, a przeprowadzone wedle niej powyższe wnioskowanie nie jest dedukcyjne. Kontrprzykłady, tj. interpretacje, w których prawdziwe są przesłanki, a fałszywy wniosek podają poniższe tabelki:

♡	P	Q	R
a	−	+	+
b	+	+	+

♢	P	Q	R
a	?	+	+
b	+	+	+

Zgodnie z przyjętą wcześniej konwencją, druga z tych tabelek jest skrótowym zapisem dwóch tabelek: w jednej zamiast znaku zapytania wpisujemy znak plusa, a w drugiej w miejsce znaku zapytania wstawiamy znak minusa. Tak więc, z konstrukcji powyższego drzewa semantycznego można odtworzyć dwa kontrprzykłady na dedukcyjność rozważanego wnioskowania. Czy widzisz, dlaczego nie trzy?

Radzimy uważać na osobnika, który jest desygnatem stałej indywiduowej *b*. Nie namawiamy od razu do defenestracji, ale zalecamy zachować czujność.

Spróbuj zbudować drzewo semantyczne, w którego pniu będą trzy następujące formuły:

$$\begin{gathered}\forall x\,(Px \to Qx)\\ \exists x\,(Qx \wedge Rx)\\ \neg\exists x\,(Px \wedge Rx)\end{gathered}$$

A teraz zastanów się, dlaczego zostałaś o to poproszona. Przecież nie chodziło tylko o bezduszne molestowanie intelektualne, prawda? Zapewniamy, że ani prośba ani pytanie nie są *tendencyjne.* Krótko mówiąc, chcemy zwrócić uwagę na związek między:

- badaniem, czy ze zbioru formuł $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ wynika logicznie formuła B;
- badaniem, czy zbiór formuł $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \neg B\}$ jest semantycznie sprzeczny.

Brawo! Na pewno odgadłaś, że odpowiedź twierdząca na pierwsze z powyższych pytań jest prawdziwa dokładnie wtedy, gdy prawdziwa jest odpowiedź twierdząca na drugie z nich: ze zbioru formuł $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ wynika logicznie formuła B ***wtedy i tylko wtedy, gdy*** zbiór formuł $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \neg B\}$ jest semantycznie sprzeczny. A zatem, w szczególności: $\exists x\,(Px \wedge Rx)$ wynika logicznie ze zbioru $\{\forall x\,(Px \to Qx),\ \exists x\,(Qx \wedge Rx)\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy formuły

$$\begin{gathered}\forall x\,(Px \to Qx)\\ \exists x\,(Qx \wedge Rx)\\ \neg\exists x\,(Px \wedge Rx)\end{gathered}$$

tworzą zbiór semantycznie sprzeczny.

PRZYKŁAD III.4.3.: KONSEKWENCJE NIEODWZAJEMNIANYCH UCZUĆ

W jednej ze scen słusznie bezoskarowego filmu *Ostatni walczyk w Międzyzdrojach* padają, przeplatane szlochem, słowa:

> *Każdy kogoś lubi.*
>
> *Niektórzy lubią tylko tych, którzy ich nie lubią.*
>
> *Zatem ktoś jest lubiany przez niesamoluba.*

Uznajmy, że — poszukując formuł języka KRP reprezentujących budowę składniową tych zdań — mamy tu do czynienia z predykatem dwuargumentowym: $x_1 L x_2$ interpretujemy jako x_1 *lubi* x_2. Uznajmy także, że pasywizacji w języku naturalnym odpowiada branie konwersu relacji w KRP. Samolub to ktoś, kto lubi siebie, a niesamolub to ktoś, kto nie jest samolubem. Powyższe wnioskowanie, którego zmuszone były wysłuchać nieliczne nadbałtyckie mewy (a do wysłuchania którego nikt nie zmuszał równie nielicznych widzów) przebiega wedle następującej reguły wnioskowania:

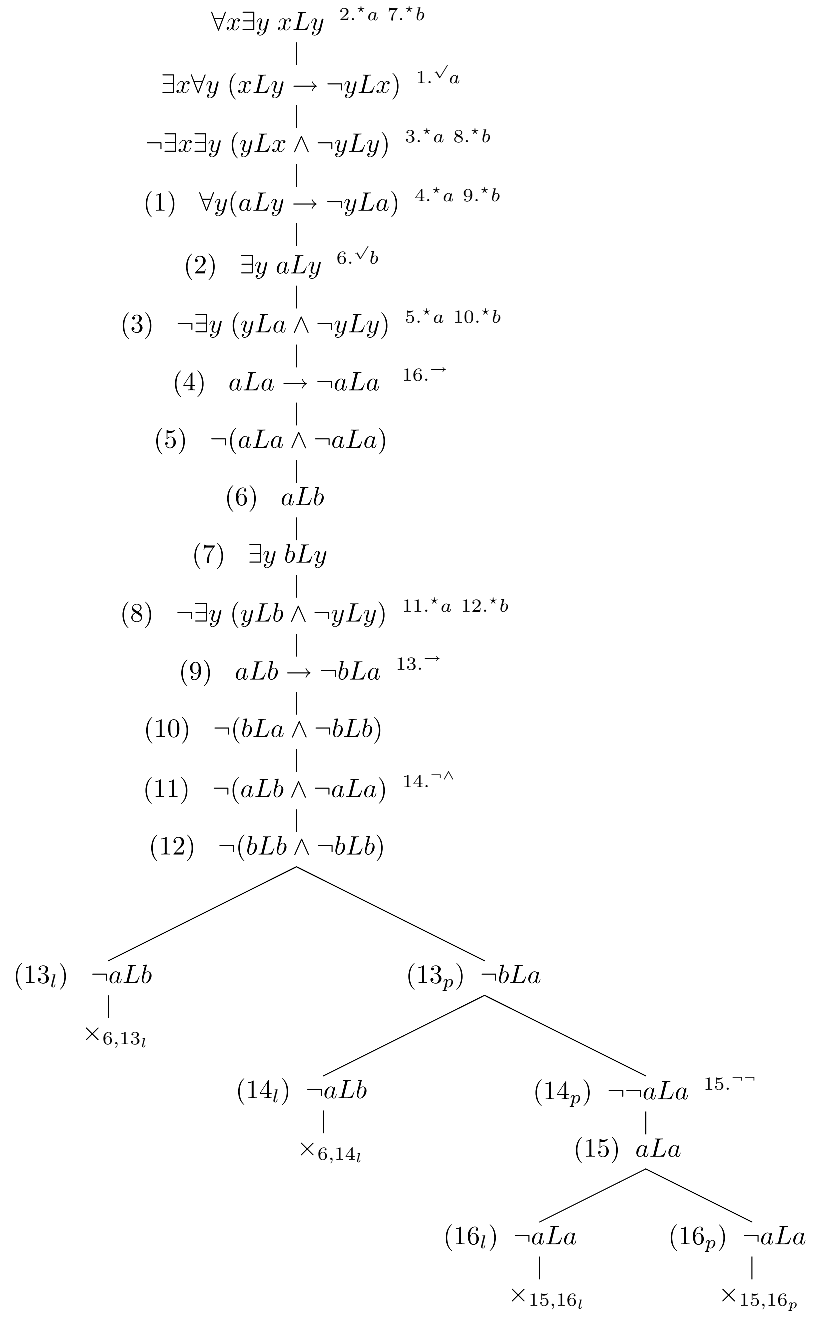
$$\begin{array}{c}\forall x \exists y\ xLy\\ \exists x \forall y\,(xLy \to \neg yLx)\\ \hline \exists x \exists y\,(yLx \wedge \neg yLy)\end{array}$$

Zbadamy, czy reguła ta jest niezawodna, tj. czy wniosek wynika logicznie z przesłanek.[2]

Zbudujemy drzewo semantyczne, w którego pniu będą przesłanki tej reguły oraz zaprzeczenie jej wniosku. Wygląda ono tak:

---

[2] Przykład ten zaczerpnęliśmy z książki: G.N. Georgacarakos, R. Smith *Elementary Formal Logic*, McGraw-Hill, 1979, str. 315–317. Omawiamy go jednak nieco inaczej, niż cytowani Autorzy.



Ponieważ wszystkie gałęzie tego drzewa semantycznego są zamknięte, więc badana reguła wnioskowania jest niezawodna — wniosek wynika logicznie z przesłanek.

Zauważmy, że nie wszystkie z wykonanych powyżej kroków były niezbędne, aby zamknąć wszystkie gałęzie rozważanego drzewa. Pozostawiamy Czytelniczkom — jako wdzięczne ćwiczenie — ustalenie, które mianowicie z tych kroków można opuścić.[3] Niech wskazówkę stanowi brak komentarza z prawej strony rozważanych formuł złożonych (nieatomowych). Proszę też wykazać czujność, spoglądając na zdania generalnie skwantyfikowane oraz negacje zdań egzystencjalnie skwantyfikowanych!

Zauważmy nadto dwie jeszcze rzeczy. Po pierwsze, formuły o numerach (5) oraz (12) są szczególnej postaci: obie są mianowicie podstawieniami prawa niesprzeczności $\neg(p \wedge \neg p)$ z KRZ. Dla ewentualnego zamknięcia gałęzi drzewa ich uwzględnianie jest zatem zbyteczne; dotyczy to oczywiście *każdej* tautologii. Bywają powody, dla których w budowie drzew semantycznych stosuje się zalecane reguły do takich formuł; w tym miejscu omawianie tych powodów pominiemy.

---

[3] Rozwiązanie: na końcu tego pliku.

Po drugie, (niepotrzebne!) wykonanie kroku $^{7.\star b}$ wprowadziło egzystencjalną formułę o numerze (7). Nie stosowaliśmy wobec niej reguły $R(\exists)$ wprowadzającej nową stałą indywiduową, bo i nie było takiej potrzeby (pamiętajmy: celem było jak najszybsze ewentualne zamknięcie wszystkich gałęzi drzewa). Tak więc, dwoje (fikcyjnych!) aktorów (desygnaty stałych indywiduowych a oraz b) wystarczyło do odegrania sceny zamykania wszystkich gałęzi drzewa... *Life's but a walking shadow. Poor player...* itd., jak znakomicie pamiętają Humanistki.

Na koniec, te Czytelniczki, które kochają się wyłącznie bez wzajemności, niech nacieszą się chociaż szczęśliwym losem potencjalnej bohaterki (dedukcyjnego!) wnioskowania, od którego rozpoczęliśmy ten przykład: pokochanej przez jakiegoś niesamoluba...

PRZYKŁAD III.4.4.: O KONIUNKCJACH ZDROWIA, BOGACTWA I SZCZĘŚCIA.

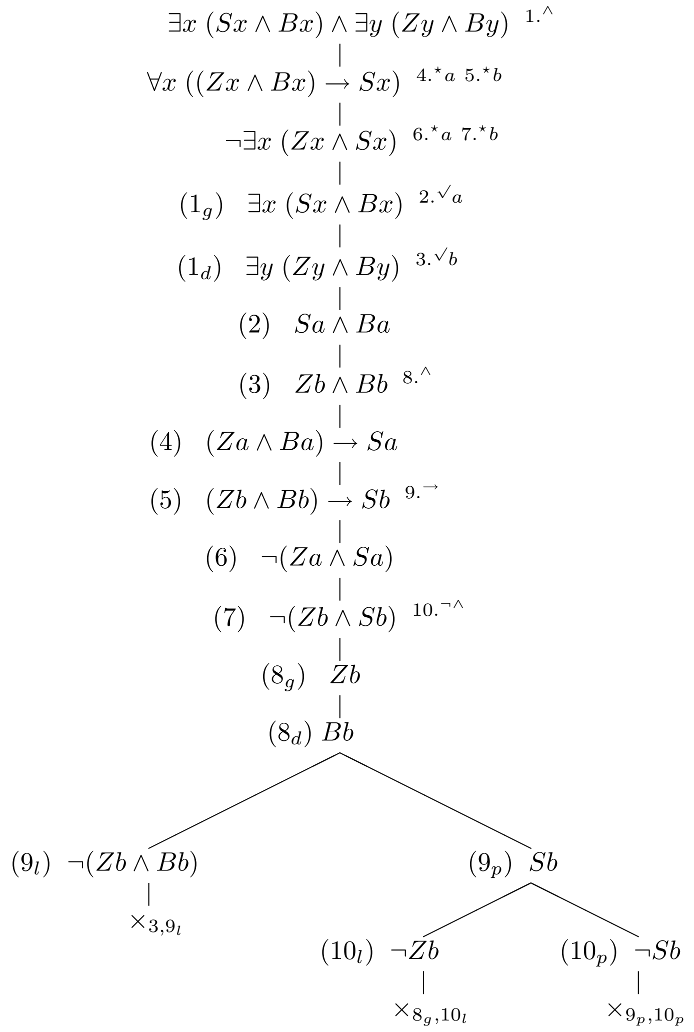
Być zdrowym, bogatym, szczęśliwym! Ma się rozumieć, także młodym (np. mniej niż stulatkiem). I żeby jeszcze kochały nas stworzenia takiej płci, ku której ciągnie nas nasza (zdrowa, bo przecie innej nie ma) orientacja seksualna... Dość marzeń, wracajmy do logiki. Rozpatrzmy wnioskowanie:

Co najmniej jeden szczęśliwy jest bogaty, a są i tacy, którzy nie dość, że są zdrowi, to są też bogaci. Zgodzicie się ze mną, że każdy, kto jest zdrowy i bogaty, jest też szczęśliwy. W takim razie musicie przyznać, że są tacy, którzy są jednocześnie zdrowi i szczęśliwi.

Przeprowadzone ono zostało wedle następującej reguły wnioskowania:

$$\begin{array}{c} \exists x\,(Sx \wedge Bx) \wedge \exists y\,(Zy \wedge By) \\ \forall x\,((Zx \wedge Bx) \rightarrow Sx) \\ \hline \exists x\,(Zx \wedge Sx) \end{array}$$

Beznamiętnie sprawdzimy, czy jest to reguła niezawodna, tj. czy wniosek wynika logicznie z przesłanek. Budujemy drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczenie wniosku. Jeśli to drzewo będzie miało wszystkie gałęzie zamknięte, to wykluczona zostanie sytuacja, aby w jakiejś interpretacji wszystkie przesłanki reguły były prawdziwe, a wniosek reguły fałszywy. Innymi słowy, zamknięcie wszystkich gałęzi drzewa o pniu złożonym z przesłanek reguły oraz zaprzeczenia jej wniosku oznacza, że wniosek wynika logicznie z przesłanek.



Wszystkie gałęzie zostały zamknięte. Reguła jest niezawodna. Wniosek reguły wynika logicznie z jej przesłanek. ***Każde*** wnioskowanie zbudowane wedle powyższej reguły jest dedukcyjne.

Zauważmy jeszcze, że — co czasem samo w sobie pochwały godne — stosowaliśmy się (prawie) ściśle do reguł budowania drzew. Jednakże nie wszystkie wykonane kroki były niezbędne do zamknięcia wszystkich gałęzi: nie korzystaliśmy z formuł o numerach (2), (4), (6). Nadto, na kształt otrzymanego drzewa wpływ ma kolejność wykonywanych kroków; proszę zauważyć, że krok $^{8.\wedge}$, stosowany do formuły o numerze (3) można wykonać ***po*** wykonaniu kroku $^{10.\neg\wedge}$ i wtedy formuły otrzymane w wyniku jego wykonania nie będą należały do pnia drzewa, lecz jedynie do gałęzi, na której znajdują się formuły o numerach (9_p) oraz (10_l) (oczywiście, numeracja kroków i formuł ulega wtedy zmianie). I tak to już jest: zauważenie, które kroki są (były) niezbędne przychodzi często dopiero po zbudowaniu całego drzewa ściśle wedle reguł. Pomijanie zbędnych kroków wymaga bystrości, którą uzyskuje się (rzadko) za darmo od Losu, a zwykle poprzez trening. Zachęcamy Czytelniczki, aby chyżo do owej bystrości zmierzały — niech dobrym początkiem przyszłego mistrzostwa w analizach logicznych będzie np. eleganckie uproszczenie powyższego drzewa tak, aby w jego konstrukcji nie występowały żadne zbędne kroki.

Zauważmy także, że większość owych zbędnych kroków można wyeliminować, jeśli nie będziemy zajmować się formułą o numerze (1_g); krok $^{2.\surd a}$ (i wszystkie inne, przezeń „prowokowane”, tj. prowadzące do formuł o numerach (2), (4), (6)) jest dla zamknięcia gałęzi drzewa nieistotny. Zmierzamy ku zamykaniu gałęzi właściwie od kroku $^{3.\surd b}$, zastosowanego do formuły o numerze (1_d).

Konsekwencją ostatniej z powyższych uwag jest też to, że niezawodną regułą wnioskowania jest również reguła o postaci:

$$\frac{\begin{array}{c}\exists y\,(Zy \wedge By)\\ \forall x\,((Zx \wedge Bx) \rightarrow Sx)\end{array}}{\exists x\,(Zx \wedge Sx)}$$

różniąca się od badanej przed chwilą reguły pominięciem pierwszego członu koniunkcji w pierwszej przesłance.

Pozostawiamy wolnej decyzji Czytelniczek ewentualne refleksje wiążące powyższe uwagi z wnioskowaniem od którego zaczęliśmy analizę w tym przykładzie. W szczególności, zauważmy, że przyjmowanie istnienia szczęściarza bogacza (niechby nazywał się np. John Coolcheek) nie wpływa na dedukcyjność tego wnioskowania. A czy je *ubogaca*? To już problem pozalogiczny. Jak mawia mądry Orient: *O nikim nie mów, że jest szczęśliwy, dopóki nie umrze.*

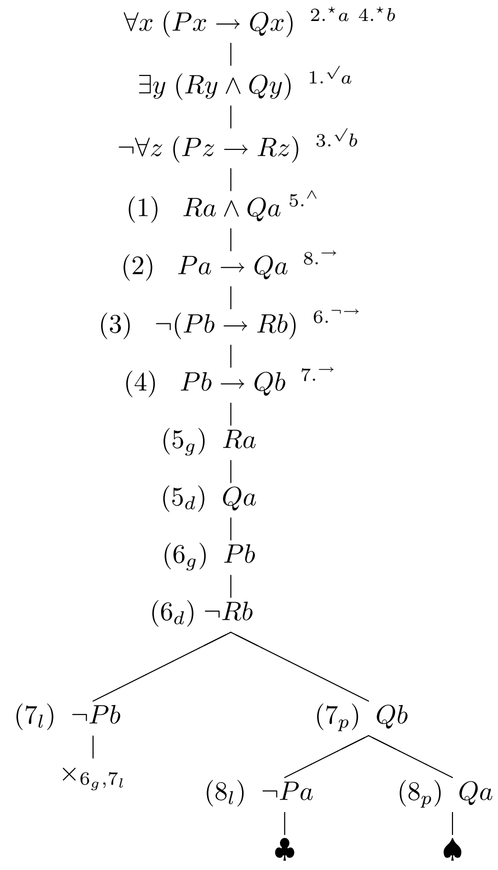
Przykład III.4.5.: Uśmiechnięty Parafianin

Humanistki często pytają, czy logika ma jakikolwiek związek z ***Życiem***. Nie jest im na to pytanie łatwo odpowiedzieć, bowiem trzeba by najpierw w miarę precyzyjnie ustalić, co Humanistki przez ***Życie*** rozumieją. Nie filozofujmy więc i pozostańmy przy może nudnawych, ale jednak chyba kształcących intelekt ćwiczeniach logicznych. Rozważmy prostą, niewinną regułę wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\,(Px \rightarrow Qx)\\ \exists y\,(Ry \wedge Qy)\end{array}}{\forall z\,(Pz \rightarrow Rz)}$$

Czy jest ona niezawodna?

Budujemy drzewo semantyczne, w którego pniu są przesłanki oraz zaprzeczony wniosek. Jeśli wszystkie gałęzie tego drzewa będą zamknięte, to wykluczona zostanie możliwość, iż przesłanki są w jakiejś interpretacji prawdziwe, a wniosek w tejże interpretacji fałszywy. Jak pamiętamy, wykluczenie tej możliwości oznacza, że badana reguła wnioskowania jest niezawodna, wniosek wynika logicznie z przesłanek. Jeżeli natomiast drzewo zawiera co najmniej jedną gałąź otwartą, to reguła jest zawodna; z gałęzi otwartych odczytać możemy interpretacje, w których przesłanki reguły są prawdziwe, a jej wniosek fałszywy. Oto drzewo:



Drzewo ma dwie gałęzie otwarte i do żadnej z formuł, na żadnej z tych gałęzi otwartych nie można już zastosować żadnej z reguł. Zatem nie jest wykluczone, że przesłanki reguły są prawdziwe w jakiejś interpretacji, w której wniosek tej reguły jest fałszywy. Oznacza to, że wniosek nie wynika logicznie z przesłanek. Reguła jest zawodna.

Kontrprzykłady, tj. interpretacje, w których przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy:

♣	P	Q	R
a	−	+	+
b	+	+	−

♠	P	Q	R
a	?	+	+
b	+	+	−

A jaki to ma związek z życiem? — zapytają może Humanistki. No cóż, gdy wsłuchać się uważnie...

> *Drodzy parafianie, nie wierzycie, że zawsze i wszędzie rozpoznam bezbożnika? Otóż — najmilsi moi — każdy, kto uprawia (tfu!!!) seks oralny, ten głupkowato się śmieje. A chodzi tu taki jeden bezbożnik po naszej wsi i śmieje się głupkowato. A więc wynika stąd niezbicie, drogie moje owieczki, że każdy, kto seks oralny uprawia, bezbożnikiem jest. A ty tam, w ostatniej ławce, czemu śmiejesz się głupkowato?*

Czytelniczki nie powinny mieć najmniejszych trudności z przekonaniem się, iż powyższe wnioskowanie przebiega wedle badanej reguły. Nie jest więc ono wnioskowaniem dedukcyjnym. Jeśli chcemy interpretację wyznaczoną przez gałąź otwartą ♣ odnieść do parafii, w której życie biegnie inaczej, niż życzy sobie tego „logika" proboszcza, to należy znaleźć w niej np. pobożną, rozchichotaną parafiankę, utalentowaną w miłości „francuskiej" (denotacja stałej indywiduowej b) oraz np. wesołkowatego bezbożnego parafianina (denotacja stałej indywiduowej a), który nigdy nie znalazł się w zasięgu denotacji predykatu *uprawia seks oralny* (z jakichś swoich osobistych powodów — np. dlatego, że rozmiłowany w nim ksiądz z sąsiedniej parafii czule mu to odradził).

Wesołą parafię odpowiadającą gałęzi otwartej ♠ zechcą Czytelniczki opisać samodzielnie. Jako wskazówka niech służy to, że denotacja stałej indywiduowej b ma tu takie same własności, jak w parafii ♣ (i to właśnie żywot tej parafianki ma moc destrukcyjną wobec argumentacji proboszcza — pozostali parafianie uzyskują całkowitą swobodę w sferze seksualnej, byle trwali w wesołym bezbożnictwie).[4]

Proszę zauważyć, że w powyższej regule wnioskowania wystąpiły trzy różne zmienne związane: x, y oraz z. Jest chyba jasne, że równie dobrze posłużyć się można jedną tylko zmienną związaną, np. x.

Wszystkim Czytelniczkom życzymy, aby ich lica jak najczęściej ozdabiał wesoły uśmiech. ***Logic is fun.***

Przykład III.4.6.: Chętna Ziuta

Rozważmy regułę wnioskowania, w której występują jakieś stałe indywiduowe (w tym przypadku dwie: a oraz b):

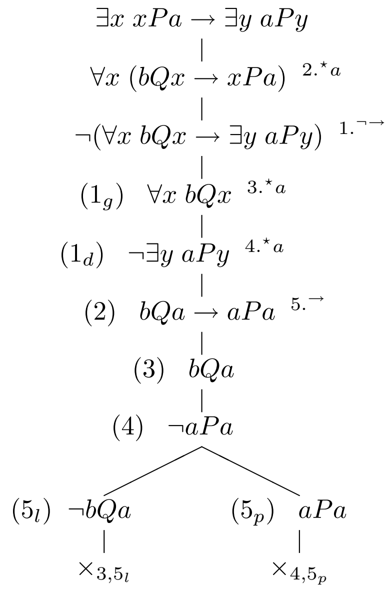
$$\begin{array}{c} \exists x\, xPa \rightarrow \exists y\, aPy \\ \forall x\, (bQx \rightarrow xPa) \\ \hline \forall x\, bQx \rightarrow \exists y\, aPy \end{array}$$

---

[4] Mnogie w tym skrypcie przykłady, które ktoś mógłby odczytać jako wyraz dobrodusznej ironii wobec działań perswazyjnych kleru w sferze seksualnej lub fiskalnej mogą być oczywiście zastąpione innymi przykładami, np. dotyczącymi ochrony środowiska lub Regulaminu Musztry. Logika jest aseksualna i aklerykalna. (Nie jestem pewien, jak zareaguje na poprzednie zdanie mój polonista pierwszego kontaktu.) Jedenaste przykazanie brzmiało podobno: *Będziesz czerpał(a) radość z seksu*, ale ten kawałek Tablic się ukruszył. Nie jest naszym zamiarem urażanie czyichkolwiek uczuć, przekonań i nastrojów religijnych. Pomyślcie przy okazji, przed jakimi dylematami stają Ateistki: co mają zrobić, poproszone o odmówienie modlitwy? Odmówić i nie odmówić czy też Nie odmówić i odmówić? Sytuacja Boga też pozazdroszczenia godna nie jest — podobno zniecierpliwiony rzekł niedawno do św. Piotra: *Słuchaj, gdyby przyszli jacyś ateiści, to mów, że* ***Mnie nie ma.***

Zbadamy, czy jest ona niezawodna, tj. czy wniosek wynika logicznie z przesłanek. Jeśli w rozważanych formułach występują stałe indywiduowe, to stosujemy najpierw, o ile wśród tych formuł są generalnie skwantyfikowane lub negacje egzystencjalnie skwantyfikowanych, reguły $R(\forall)$ lub $R(\neg\exists)$ względem tych stałych. Dopiero w dalszej kolejności — jeśli jest to możliwe (i potrzebne) — wprowadzamy ewentualnie nowe stałe.

Budujemy drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki reguły oraz zaprzeczenie jej wniosku. Jeśli wszystkie gałęzie tego drzewa zostaną zamknięte, to reguła jest niezawodna: nie może istnieć interpretacja, w której wszystkie przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy, a więc wniosek wynika logicznie z przesłanek. Gdyby któraś z gałęzi pozostała otwarta, to wniosek nie wynikałby logicznie z przesłanek; z takiej otwartej gałęzi odczytalibyśmy jak zbudować interpretację, w której prawdziwe są przesłanki, a fałszywy wniosek reguły. Oto drzewo:



Wszystkie gałęzie drzewa zostały zamknięte, a więc reguła jest niezawodna, wniosek wynika logicznie z przesłanek. Zauważmy, że do zamknięcia wszystkich gałęzi drzewa wystarczyło rozwinięcie formuł generalnie skwantyfikowanych względem tylko stałej a. Nadto, pierwsza przesłanka w ogóle nie musiała być brana pod uwagę w tak planowanym budowaniu drzewa, aby zamknąć wszystkie jego gałęzie. Oznacza to, że wniosek wynika logicznie z samej tylko przesłanki drugiej; reguła wnioskowania złożona z przesłanki drugiej oraz wniosku też jest niezawodna.

Wedle powyższej reguły zbudować można zatem nieskończenie wiele dedukcyjnych wnioskowań, lub choćby tylko 666 przykładów takich wnioskowań. My ograniczmy się do jednego:

Jeśli ktoś jest miły dla Ziuty, to i Ziuta jest miła dla kogoś.

Każdy, kto jest przekupiony przez Wacka, jest miły dla Ziuty.

Zatem, jeśli Wacek przekupił wszystkich, to Ziuta jest dla kogoś miła.

Ponieważ wniosek badanej reguły wynika logicznie z samej tylko przesłanki drugiej (jak przed chwilą ustaliliśmy), więc również następujące wnioskowanie jest dedukcyjne:

Przekupieni przez Wacka są mili dla Ziuty.

Stąd, jeśli Wacek przekupił wszystkich, to Ziuta jest dla kogoś miła.

Uprzejmie proszę zadumać się chwilę nad ***siłą pieniądza*** i jej wpływie na kobiece nastroje oraz zachowania. Jak prawdopodobnie już (boleśnie) się przekonaliście, relacja *być miłym dla* ***nie*** jest symetryczna: to, że Adam jest miły dla Chawy, nie implikuje, iż Chawa jest miła dla Adama. A tu przychodzi taki Wacek, przekupuje wszystkich, wszyscy przekupieni czynią umizgi do Ziuty i nagle — ***cud:*** nieprzystępna Ziuta staje się dla kogoś miła!

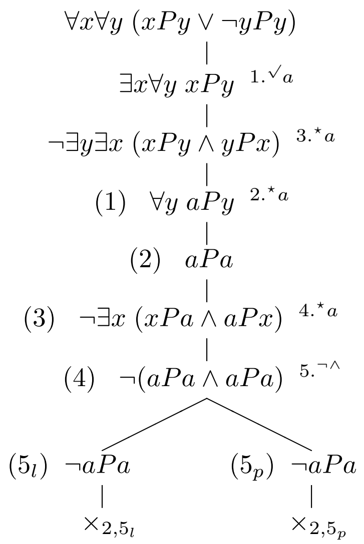
Z rozczuleniem wspominamy wszystkie miłe dla nas Humanistki. Tym bardziej, że nigdy nie mieliśmy niczego, czym moglibyśmy kogokolwiek przekupić.

PRZYKŁAD III.4.7.: UWAGA NA KAPUSTĘ

Spójrzmy na niewinnie wyglądającą regułę wnioskowania:

$$\begin{array}{c} \forall x \forall y\ (xPy \lor \neg yPy) \\ \exists x \forall y\ xPy \\ \hline \exists y \exists x\ (xPy \land yPx) \end{array}$$

Pokażemy, że jest ona niezawodna, a więc, że w każdej interpretacji, w której prawdziwe są wszystkie (tu: obie) przesłanki, prawdziwy jest też wniosek. Zgodnie z regułami sztuki, przekonamy wszelkich niedowiarków o tym w ten sposób, iż wykluczymy możliwość, aby istniała interpretacja, w której prawdziwe są wszystkie przesłanki oraz zaprzeczenie wniosku. Istotnie, drzewo, w którego pniu są obie przesłanki oraz zaprzeczony wniosek ma wszystkie gałęzie zamknięte:



Wszystkie gałęzie zamknięte. Reguła niezawodna. Wniosek wynika logicznie z przesłanek. Zauważmy ponadto, że nie korzystaliśmy z przesłanki pierwszej przy rozbudowywaniu drzewa, a więc wniosek wynika logicznie z samej przesłanki drugiej. Stosowanie reguły $R(\forall)$ w przesłance pierwszej względem wprowadzonej stałej a nie jest oczywiście zabronione, ale jest niepotrzebne dla zamknięcia wszystkich gałęzi drzewa. Tak więc, warto zwracać uwagę na to, w jakiej kolejności stosujemy reguły — sprytnie dobrana kolejność pozwala na zaniechanie pewnych kroków, uzyskanie efektów estetycznych (bardziej smukłe drzewo) i zaoszczędzenie czasu, który można wykorzystać na nieprzebranie wiele sposobów, aprobowanych bądź nieaprobowanych przez Watykan.

Z nieskończenie wielu dedukcyjnych wnioskowań zbudowanych wedle powyższej reguły wybierzmy, dla ilustracji, jedno:

> *Dla dowolnych dwóch obywateli, pierwszy donosi na drugiego lub drugi nie donosi na siebie. Ktoś donosi na wszystkich. Są zatem tacy, którzy donoszą na siebie nawzajem.*

Zauważmy jeszcze, że formuła $\forall x \forall y\ (xPy \lor \neg yPy)$ jest logicznie równoważna formule $\forall x \forall y\ (yPy \rightarrow xPy)$ (może nam ufasz, ale sprawdź też sama!), a „przekład" drugiej z tych formuł na język naturalny bywa (z jakichś względów — psychologicznych, stylistycznych,...) odbierany jako „bardziej przyjazny, naturalny" przez Humanistki. Parafrazę pierwszej przesłanki w podanej interpretacji można więc przeczytać np.: *Dla dowolnych dwóch obywateli, pierwszy donosi na drugiego, o ile drugi donosi też na siebie.* Jest także chyba oczywiste, że słowo *obywatel* pełni tu funkcję czysto stylistyczną, ratującą „przekład" z języka KRP na polski.

I ostatnia w analizie tego przykładu wiadomość, pod uwagę socjologom, służbom specjalnym, ale przede wszystkim Humanistkom ufnym w wielokrotnie w tym skrypcie przywoływaną Eufonię Słowa. Skoro, jak ustaliliśmy, wniosek powyższej reguły wynika logicznie z samej tylko przesłanki drugiej, tj. reguła:

$$\frac{\exists x \forall y\, xPy}{\exists y \exists x\, (xPy \wedge yPx)}$$

jest niezawodna, to następujące wnioskowanie przeprowadzone wedle tej reguły jest — ***o zgrozo*** — dedukcyjne:

Ktoś donosi na wszystkich.

Są zatem tacy, którzy donoszą na siebie nawzajem.

Zastanów się nad podłością tego świata: jakże zaraźliwe jest donosicielstwo — wystarczy, aby choć jeden osobnik kapował na kogo popadnie, a już gdzieś tam narasta wzajemna podejrzliwość — donoszą na siebie nawzajem teściowa i synowa, lub Bolek i Lolek, albo Jacek i Agatka, itd.

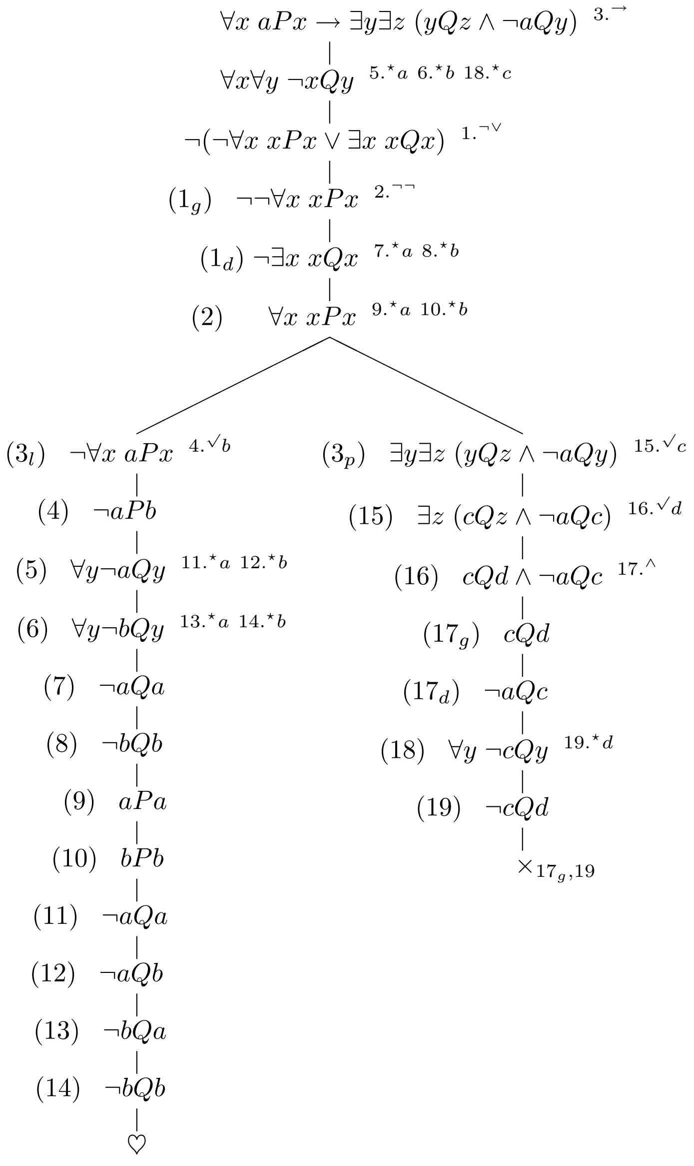
PRZYKŁAD III.4.8.: SCHEDA LENINOWSKA

Jest nieskończenie wiele niezawodnych reguł wnioskowania, ale jest też nieskończenie wiele reguł zawodnych. Za chwilę ujrzysz jedną z tych drugich. Nauczeni doświadczeniem dydaktycznym uznajemy za właściwe podkreślenie następującego stwierdzenia: dowolna reguła wnioskowania albo ***jest niezawodna***, albo ***jest zawodna*** — nie ma ***trzeciej*** możliwości, nie jest tak, że *czasem wynika, a czasem nie wynika*, jak z brawurą słowa wyprzedzającego myśl mawiają niekiedy Humanistki. Upraszamy oczywiście, aby tego komentarza nie traktować jako nietaktownego.

Przyjrzyjmy się następującej regule wnioskowania, w której występują predykaty dwuargumentowe P oraz Q, a także stała indywiduowa a:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\, aPx \rightarrow \exists y \exists z\, (yQz \wedge \neg aQy) \\ \forall x \forall y\, \neg xQy\end{array}}{\neg \forall x\, xPx \vee \exists x\, xQx}$$

A teraz zbudujmy drzewo o pniu złożonym z obu przesłanek reguły oraz jej zaprzeczonego wniosku. Jeśli drzewo to będzie miało gałąź otwartą, to rozważana reguła jest zawodna: z takiej gałęzi otwartej odtworzymy interpretację, w której zarówno przesłanki reguły, jak i zaprzeczenie jej wniosku będą prawdziwe. A w takiej interpretacji przesłanki reguły są prawdziwe, zaś jej wniosek fałszywy, więc istnienie takowej interpretacji świadczy o zawodności reguły.



Drzewo zawiera gałąź otwartą (i do żadnej formuły na tej gałęzi nie można już zastosować żadnych reguł), a więc badana reguła wnioskowania jest zawodna, wniosek nie wynika logicznie z przesłanek. Informacja zawarta na gałęzi otwartej pozwala na skonstruowanie takiej interpretacji, w której przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy. Konstrukcja ta polega na podaniu uniwersum oraz denotacji w nim predykatów P oraz Q. Potrzebne uniwersum jest dwuelementowe (złożone z desygnatów stałych indywiduowych a oraz b), relacje będące denotacjami predykatów podane są w poniższych tabelkach. Przypominamy, że znak „+" na przecięciu danego wiersza i danej kolumny oznacza, iż relacja zachodzi między elementem z tego wiersza a elementem z tej kolumny, znak „−", że nie zachodzi. Jeśli informacja, czy relacja zachodzi, czy nie zachodzi między danymi elementami nie znalazła się w rozważanej gałęzi otwartej, to na przecięciu stosownego wiersza i kolumny umieszczamy znak „?" (oznacza to, że może w takim miejscu wystąpić zarówno „+", jak i „−").

P	a	b
a	+	−
b	?	+

Q	a	b
a	−	−
b	−	−

Zauważmy jeszcze, że pracę na prawej gałęzi (formuła o numerze (3_p) i formuły pod nią) udało się zakończyć bardzo sprawnie, zamykając tę gałąź — w szczególności, nie stosowaliśmy reguły $R(\forall)$ względem stałej a, bo nie było takiej potrzeby. Wprowadzenie nowych stałych indywiduowych c i d i wykonanie kroków $^{18\star c}$ oraz $^{19\star d}$ pozwoliło na uzyskanie pary formuł wzajem sprzecznych.

Przy następującej ponurej interpretacji predykatów P oraz Q i stałej indywiduowej a:

xPy interpretujemy jako — *x z troską przejmuje się losem y*;

xQy interpretujemy jako — *x ufa y*;

stała indywiduowa a denotuje *Józefa Stalina*;[5]

wnioskowaniem (zawodnym!) przeprowadzonym wedle rozważanej reguły jest:

> *Jeśli Józef Stalin z troską przejmuje się losem wszystkich, to pewnemu obywatelowi, który komuś ufa, towarzysz Stalin nie ufa.*
>
> *Nikt nikomu nie ufa.*
>
> *Zatem nie każdy przejmuje się z troską własnym losem lub ktoś ufa samemu sobie.*

Prosimy jeszcze zauważyć, że na mocy znanego prawa KRZ wniosek powyższego wnioskowania jest równoważny stwierdzeniu: *Jeśli każdy z troską przejmuje się swoim losem, to ktoś ufa sobie samemu.*

Towarzysz Lenin ponoć mawiał dobrotliwie mniej więcej tak: *Ufać dobrze, kontrolować lepiej.* Nie wiemy, czy myśl tę kończył jakimś ***leninowskim superlatywem***.

PRZYKŁAD III.4.9.: CUDA SIĘ ZDARZAJĄ, LECZ NIE POWTARZAJĄ

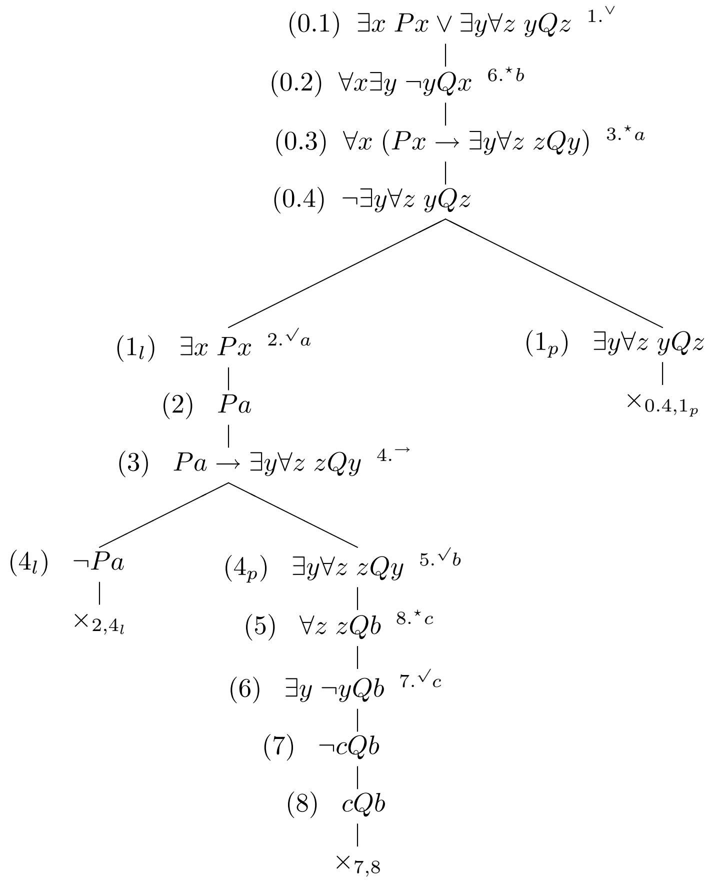
Pokażemy, że niezawodna jest następująca reguła:

$$\begin{array}{c}\exists x\ Px \lor \exists y \forall z\ yQz \\ \forall x \exists y\ \neg yQx \\ \forall x\ (Px \rightarrow \exists y \forall z\ zQy) \\ \hline \exists y \forall z\ yQz\end{array}$$

Budujemy drzewo, w którego pniu umieszczamy przesłanki oraz zaprzeczenie wniosku badanej reguły:

---

[5] Drogie Czytelniczki mają szczęście żyć w świecie, w którym denotacja tej stałej jest już truchłem. Nie każdy zdążył to o sobie powiedzieć.



Wszystkie gałęzie drzewa są zamknięte, a to oznacza, że rozpatrywana reguła wnioskowania jest niezawodna. Nie istnieje więc interpretacja, w której prawdziwe byłyby wszystkie przesłanki tej reguły, a fałszywy jej wniosek. Zatem wniosek reguły wynika logicznie z jej przesłanek.

Zauważmy, że nie wykonywano mechanicznie wszystkich zalecanych reguł, wybierając te (np. krok $^{7.\surd c}$, w którym wprowadzamy nową stałą indywiduową c), które doprowadziły do jak najszybszego zamknięcia wszystkich gałęzi. Nie ma w przypadku takich „usprawnień” żadnego algorytmu, jest to sprawa pomysłu i sprzyjających okoliczności.

Zwróćmy uwagę jeszcze i na to, iż w poddrzewie o korzeniu (1_l) nie wykorzystywano (z oczywistych powodów!) drugiego członu alternatywy, którą jest przesłanka pierwsza (tj. formuła o numerze (0.1)); ale nie wykorzystywano również zanegowanego wniosku (tj. formuły o numerze (0.4)) rozpatrywanej reguły. Oznacza to, że przesłanki druga (tj. formuła o numerze (0.2)) i trzecia (tj. formuła o numerze (0.3)) wraz z formułą o numerze (1_l) tworzą zbiór ***semantycznie sprzeczny***.

W pewnym sensie, ilustrowanie niezawodnych reguł wnioskowania (lub praw logiki) przykładami użyć języka naturalnego jest czynnością nużąco bezsensowną. Skoro np. wyżej rozważana reguła jest niezawodna, to ***jakkolwiek*** zinterpretujemy występujące w niej predykaty, to o ile przesłanki będą prawdziwe, to i wniosek będzie prawdziwy. Po co więc cokolwiek ilustrować? Z drugiej strony, trening logiczny powinien brać pod uwagę nie tylko (często arcytrudne!) odnajdywanie struktur logicznych w analizowanych wypowiedziach języka naturalnego, ale także (zwykle łatwiejsze) ćwiczenia polegające np. na umiejętności uprzytomnienia sobie, że gotowe formuły oraz reguły mają walor uniwersalności aplikacyjnej — nadto, ***są one dobrem publicznym, ich używanie jest bezpłatne!!!*** Wreszcie, nie możemy przecież zostawić bezbronnych, ufnych w Eufonię Słowa młodych Humanistek całkowicie na pastwę nagich, nieprzybranych kojącymi wtrętami lingwistycznymi, praw logiki. Tak więc, niech np.:

Px będzie interpretowane jako — *x jest cudem (zdarzeniem cudownym, nadprzyrodzonym)*;

xQy będzie interpretowane jako — *(zdarzenie) x jest przyczyną (zdarzenia) y* (co odczytywać też będziemy jako *y jest skutkiem x*).

Wtedy następujące wnioskowanie przeprowadzone jest wedle wyżej zbadanej reguły, a ponieważ jest ona niezawodna, jest wnioskowaniem dedukcyjnym:

> ($*$) *Cuda się zdarzają lub istnieje przyczyna wszystkich zdarzeń. Dla każdego zdarzenia istnieje (co najmniej jedno) zdarzenie, które nie jest jego przyczyną. Dla dowolnego zdarzenia cudownego istnieje zdarzenie, które jest skutkiem wszystkich zdarzeń. Zatem istnieje przyczyna wszystkich zdarzeń.*

Nie twierdzimy, że istnieje dokładna odpowiedniość między formułami KRP a zdaniami języka naturalnego. Mądra Księga też tak nie twierdzi. Nie można jednak straszyć Humanistek samymi formułkami: proste znaczeniowo, nieułomne gramatycznie i niezbyt zgrzebne stylistycznie przykłady rozsiane w tekście mają być wyrazem naszej empatii dydaktycznej.

Ponieważ, jak stwierdziliśmy powyżej, formuły

$$\exists x\ Px$$
$$\forall x \exists y\ \neg y Q x$$
$$\forall x\ (Px \rightarrow \exists y \forall z\ z Q y)$$

tworzą zbiór semantycznie sprzeczny, więc przy każdej (a zatem także podanej wyżej) interpretacji predykatów P oraz Q otrzymany tekst będzie, jako całość, absurdalny, choćby *ubogacać* go najbardziej wykwintnymi stylistycznie ozdobnikami; zainteresowane Czytelniczki mogą wykonać taką pracę stylistyczną nad inkryminowanym tekstem:

> *Cuda się zdarzają. Dla każdego zdarzenia istnieje zdarzenie, które nie jest jego przyczyną. Dla każdego zdarzenia cudownego istnieje zdarzenie, które jest skutkiem wszystkich zdarzeń.*

Teilhard de Chardin nie polubiłby tego przykładu, to pewne.

Zauważmy na koniec, że pierwsza przesłanka omawianej reguły jest semantycznie równoważna, na mocy znanych tautologii KRZ, każdej z następujących implikacji:

$$\neg \exists x\ Px \rightarrow \exists y \forall z\ y Q z$$

$$\neg \exists y \forall z\ y Q z \rightarrow \exists x\ Px$$

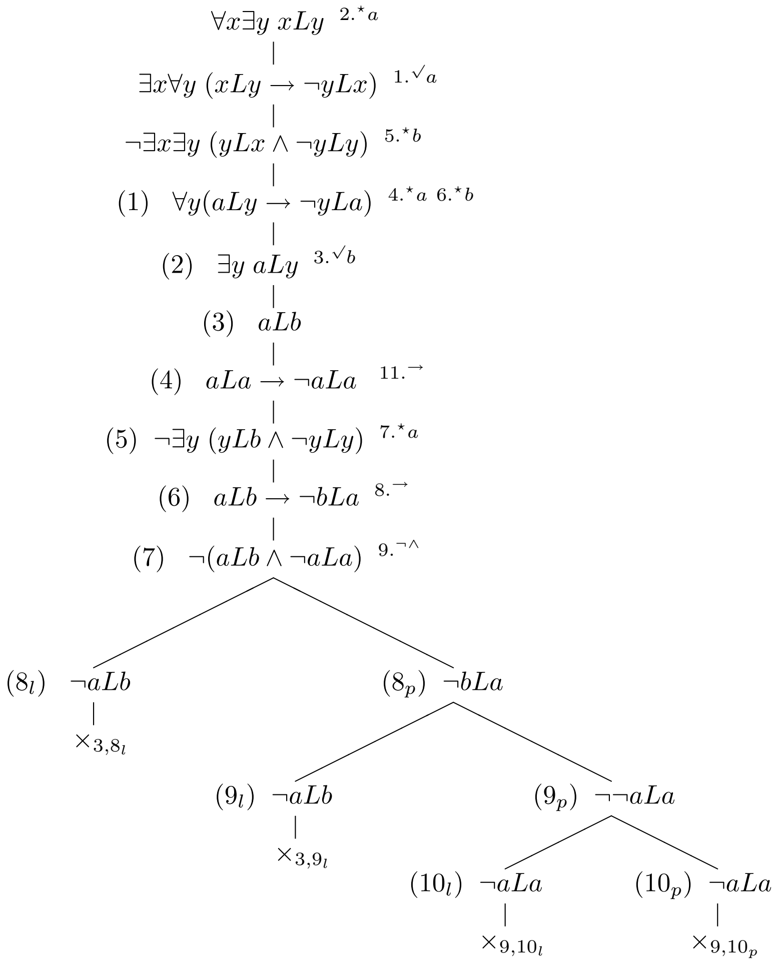
Tak więc, pierwsze zdanie (alternatywę) w tekście ($*$) zastąpić można np. każdym ze zdań:

> *Jeśli nie ma cudów, to wszystkie zdarzenia mają wspólną przyczynę.*
>
> *Cuda się zdarzają, o ile nie istnieje przyczyna wszystkich zdarzeń.*

Można igrać dalej z tym przykładem, figlując z czasem gramatycznym oraz liczbą gramatyczną, itp. Takie niewinne zabawy mogą pomóc Czytelniczkom w uświadomieniu sobie, w jakim sensie struktury logiczne są NIEZMIENNIKAMI niektórych operacji językowych (np. parafrazowania).

* * *

Rozwiązanie ćwiczenia z przykładu III.4.3.: Konsekwencje nieodwzajemnianych uczuć:



Wszystkie gałęzie drzewa są zamknięte. Wniosek wynika logicznie z przesłanek. W drzewie nie ma żadnych zbędnych (dla zamykania gałęzi) kroków.

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl